УДК 512.7

С.А. Тихомиров

Обобщение понятий спектра и типа расщепления для некоторых пучков и расслоений на трехмерном проективном пространстве

В данной статье мы вводим новое понятие для алгебраической геометрии – понятие мультиспектра.

Ключевые слова: пучок, векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна.

S.A. Tikhomirov

Generalisation of Spectrum Notions and a Splitting Type for Some Sheaves and Bundles on the Projective Space

In this article we introduce the new notion for Algebraic Geometry – the notion of multispectrum.

Key words: a sheaf, a vector bundle, a stable bundle, Chern classes.

В настоящей работе впервые предлагается новое для алгебраической геометрии понятие мультиспектра, обобщающее понятия спектра и типа расщепления для некоторых видов пучков и векторных расслоений на трехмерном проективном пространстве.

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, если дополнительно не оговаривается иное.

Понятия спектра стабильного расслоения E ранга 2 на P^3 с $c_1(E)=0$ над полем нулевой характеристики, спектра рефлексивного пучка F ранга 2 на P^3 с $c_1(F)=0$ или -1 и условием $H^0(F(-1))=0$ над полем произвольной характеристики были введены соответственно в статьях [3] и [4]. Широко известно также понятие типа расщепления расслоения ранга r на P^n (см., например, [1]). Напомним определения всех трех понятий.

Определение 1. Пусть E – стабильное расслоение ранга 2 на P^3 с $c_1(E)=0$ над полем характеристики 0, L – общая прямая в P^3, $p: X \to P^3$ – раздутие L и $q: X \to P^1$ – морфизм, определенный пучком плоскостей в P^3, проходящих через L. Тогда пучок $H = R^1 q_* p^* E(-1)$ – локально свободный пучок ранга $c_2(E)$ на P^1 и, следовательно, может быть записан в виде $H \cong \oplus_{i=1}^{c_2} O_{P^1}(k_i)$ для подходящего набора целых чисел $k_1,...,k_{c_2}$. Этот набор $\{k_i\}$ называется *спектром E.*

Замечание 1. Разложение пучка H в прямую сумму возможно в соответствии с теоремой Гротендика, утверждающей, что всякое расслоение ранга r на P^1 расщепляется в прямую сумму $O_{P^1}(a_1) \oplus ... \oplus O_{P^1}(a_r)$, где $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_r$ – однозначно определенные целые числа. Также из теоремы Гротендика следует, что спектр расслоения E в предыдущем определении единственен.

Определение 2. Пусть F – рефлексивный пучок ранга 2 с $c_1=0$ или -1 на P^3, предположим, что $H^0(F(-1))=0$. Тогда существует единственный набор целых чисел $\{k_i\}_{i=1}^{c_2}$, называемый *спектром* F и обладающий свойствами (где H обозначает пучок $\oplus O(k_i)$ на P^1):

(a) $h^1(P^3, F(l)) = h^0(P^1, H(l+1))$ для $l \le -1$;

(b) $h^2(P^3, F(l)) = h^1(P^1, H(l+1))$ для $l \ge -3$, если $c_1=0$, и $l \ge -2$, если $c_1=-1$.

Замечание 2. Определение 2 было введено Р. Хартсхорном с целью обобщения свойств спектров стабильных расслоений ранга 2 на P^3 с $c_1 = 0$ над полем характеристики 0 на случай стабильных или полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на P^3 с $c_1 = 0$ или -1 над полем произвольной характеристики.

Определение 3. Пусть G_n – грассманово многообразие прямых в P^n. Обозначим через l точку в G_n, соответствующую проективной прямой *L* в P^n. Пусть *E* – расслоение ранга *r* на P^n. Согласно указанной выше теореме Гротендика, каждой точке $l \in G_n$ отвечает единственный набор из *r* целых чисел $\alpha_E(l) = (\alpha_1(l),...,\alpha_r(l)),\ \alpha_1(l) \ge ... \ge \alpha_r(l),$ такой что $E|_L \cong \oplus_{i=1}^r O_L(\alpha_i(l)).$ Таким способом определяется отображение $\alpha_E : G_n \to Z^r$; набор $\alpha_E(l)$ называется *типом расщепления E* на *L*.

Для произвольных рефлексивных пучков и стабильных расслоений ранга, большего двух, ввести понятие спектра затруднительно в силу ряда причин, тем не менее, для пучков G_{ij} вида

$$G_{ij} \cong \oplus_{i=1}^p A_i \oplus \oplus_{j=1}^q F_j, \qquad (*)$$

где A_i – расслоения некоторых рангов r_i, а F_j – рефлексивные пучки ранга 2 с $c_1 = 0$ или -1 и условием $h^0(F_j(-1)) = 0$, возможно ввести новое понятие.

Определение 4. Пусть G_{ij} – пучок вида (*), имеющий ранг $\sum_{i=1}^p r_i + 2q$. Назовем *мультиспектром* такого пучка:

1) при $p = q = 0$ – пустое множество Ø;

2) при $p = 1$, $q = 0$ – тип расщепления расслоения A_1, упорядоченный по неубыванию;

3) при $p = 0$, $q = 1$ – спектр пучка F_1, упорядоченный по неубыванию;

4) при $p \ge 1$, $q \ge 1$ – набор ($\alpha_{A_1}(l),...,\alpha_{A_p}(l),\ \{k_{i1}\},...,\{k_{iq}\}$), упорядоченный по неубыванию, где $\alpha_{A_i}(l)$ – тип расщепления расслоения A_i, $1 \le i \le p$ и $\{k_{ij}\}$ – спектр пучка F_j, $1 \le j \le q$.

Замечание 3. Как видно из определения мультиспектра, он является единственным и обобщает понятия спектра и типа расщепления для пучков вида (*), которые могут иметь ранг, больший двух.

Пример. При исследовании пространства модулей $M_{P^3}(2;0,6)$ стабильных расслоений ранга 2 на P^3 с $c_1 = 0$ и $c_2 = 6$ методом двойных расширений, описанный автором в статье [2], среди прочих появляется вспомогательное ранга 8 расслоение $E_8 \cong T_{P^3}(-3) \oplus \Omega_{P^3}(3) \oplus E_2^{nc}$, где E_2^{nc} – нуль-корреляционное расслоение. В соответствии с разложением (*) E_8 представимо в виде

$$E_8 \cong A_1 \oplus A_2 \oplus F_1,$$

где $A_1 = T_{P^3}(-3)$, $A_2 = \Omega_{P^3}(3)$ и $F_1 = E_2^{nc}$ – стабильное 2-расслоение с $c_1 = 0$. Тогда, согласно определению 4, мультиспектр расслоения E_8 будет складываться из типов расщепления A_1 и A_2, а также спектра F_1. Как известно, A_1 имеет тип расщепления (-1, -2, -2), A_2 – (2, 2, 1). Поскольку $c_2(F_1) = 1$, то в данном случае ввиду связности и симметричности спектра F_1 (см., например, [4]), спектр F_1 будет состоять из одного числа 0. В итоге, мультиспектр E_8 имеет вид (-2, -2, -1, 0, 1, 2, 2), связен и симметричен.

Библиографический список

1. Оконек, К., Шнайдер, М., Шпиндлер, Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах [Текст] / К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер. – М. : Мир, 1984.

2. Тихомиров, С.А. Метод двойных расширений в исследовании стабильных расслоений на P^3 [Текст] / С.А. Тихомиров // Труды Шестых Колмогоровских Чтений.– Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2008. – 174–183.

3. Barth W., Elencwajg G. Concernant la cohomologie des fibres algebriques sur P_n, Springer Lecture Notes, 683 (1978), 1–24.

4. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Mathematische Annalen, 254 (1980), 121–176.