УДК 519.1

В.А. Бондаренко, А.В. Николаев

Некоторые свойства релаксаций разрезного многогранника

Исследуется связь между классом гиперграфов специального вида и свойствами точек релаксаций $M_{n,k}$ разрезного многогранника. Устанавливается, что при достаточно больших n в многограннике $M_{n,4}$ имеются точки, в любом разложении которых по вершинам многогранника $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины.

Ключевые слова: гиперграфы, релаксации разрезного многогранника, корневой полуметрический многогранник, распознавание целочисленности.

V.A. Bondarenko, A.V. Nikolaev

Some Properties of Cut Polytope Relaxations

The topic of the research is the relationship between the class of hypergraphs of a special type and properties of the points of the cut polytope relaxations $M_{n,k}$. It has been established that for sufficiently large n in $M_{n,4}$ polytope there are points in any expansion of which in a convex combination of $M_{n,3}$ vertices, there are no integer vertices.

Key words: hypergraphs, cut polytope relaxations, rooted semimetric polytope, integrity recognition.

Рассмотрим множество 3-однородных смешанных гиперграфов [6] вида $G=(V,E,A)$, где

- V – множество вершин, $V=N_n=\{1,\dots,n\}$;
- E – множество неориентированных ребер, $E=\{(i,j,k)\}\subseteq N_n\times N_n\times N_n$;
- A – множество ориентированных ребер, $A=\{((i,j),k)\}\subseteq N_n\times N_n\times N_n$, где пара вершин (i,j) – начало ребра, вершина k – конец ребра.

Введем операцию *инвертирования* $i-$той вершины гиперграфа $G=(V,E,A)$, которая преобразует все ребра, инцидентные этой вершине, следующим образом:

$$(i,j,k)\to((j,k),i),$$
$$((j,k),i)\to(i,j,k),$$
$$((i,j),k)\to((i,k),j).$$

Результатом операции инвертирования является новый 3-однородный смешанный гиперграф $G'=Inv_iG=(V,E',A')$.

Аналогично определим операцию *инвертирования подмножества вершин* гиперграфа G, так что $Inv_{i,j,k}(G)=Inv_i(Inv_j(Inv_k(G)))$.

Введем класс G_I гиперграфов $G=(V,E,A)$, для которых множество неориентированных ребер E непусто и остается непустым при всех возможных инверсиях. Таким образом:

$$G=(V,E,A)\in G_I \Leftrightarrow \begin{cases} E\neq\varnothing, \\ \forall W\subseteq V: Inv_W(G)\in G_I. \end{cases}$$

Рассмотрим сужение задачи 3-выполнимость (3-SAT), а именно: задачу *монотонная 3-выполнимость при различных литералах* (monotone not-all-equal 3-SAT, MNAE 3-SAT) [4].

Условие. Заданы множество логических переменных $U = \{u_1, ..., u_n\}$ и набор трехместных дизъюнкций $C = \{c_j = u_{j_1} \vee u_{j_2} \vee u_{j_3};\ j \in N_n\}$.

Вопрос. Существует ли для набора C такой выполняющий набор истинностных значений, что в каждой дизъюнкции из C найдется хотя бы один истинный и хотя бы один ложный литерал?

К этой задаче сводится [10] (см. также [4]) задача 3-SAT, следовательно, задача MNAE 3-SAT является NP-полной.

С индивидуальной задачей $Z \in \text{MNAE 3-SAT}$ свяжем гиперграф $G(Z) = (V, E, A)$ рассматриваемого вида, который назовем гиперграфом задачи Z, по следующим правилам:

1) $|V| = |U| = n$;

2) три вершины i, j, k гиперграфа $G(Z)$ образуют неориентированное ребро $(i, j, k) \in E$ тогда и только тогда, когда логические переменные u_i, u_j и u_k входят в общую дизъюнкцию из C;

3) $A = \varnothing$.

Легко проверяется, что индивидуальная задача $Z \in \text{MNAE 3-SAT}$ предполагает ответ «нет» тогда и только тогда, когда связанный с ней гиперграф $G(Z)$ принадлежит классу G_I, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф G не принадлежит классу G_I?» – является NP-полной.*

Далее гиперграфы приведенного вида используются для описания свойств точек релаксаций разрезного многогранника.

В работе [1] определен класс многогранников $M_n \subseteq R^{4n^2}$, $n \in N$, позже названных корневыми полуметрическими [5]. Задающие M_n линейные ограничения имеют вид:

$$x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j} = 1, \tag{1}$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} = x_{k,j} + y_{k,j}, \tag{2}$$

$$x_{i,j} + z_{i,j} = x_{i,l} + z_{i,l}, \tag{3}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i}, \quad t_{i,j} = t_{j,i}, \quad y_{i,j} = z_{j,i}, \tag{4}$$

$$y_{i,i} = z_{i,i} = 0, \tag{5}$$

$$x_{i,j} \ge 0, \ y_{i,j} \ge 0, \ z_{i,j} \ge 0, \ t_{i,j} \ge 0, \tag{6}$$

где i, j, k, l независимо пробегают значения $1, ..., n$.

Заметим, что координаты точек многогранника M_n удобно представлять в виде матрицы из блоков вида:

Таблица 1

Блок координат

$x_{i,j}$	$y_{i,j}$
$z_{i,j}$	$t_{i,j}$

а ограничения (4) задают симметрию относительно главной диагонали в матрице из блоков, и, значит, достаточно ограничиться рассмотрением лишь половины матрицы координат ($i \le j$).

Многогранники этого класса обладают рядом особенностей, обусловливающих значительный к ним интерес (см. [2, 5, 9]). В частности, в работе [3] установлена полиномиальная разрешимость задачи следующего вида: для заданной линейной целевой функции f требуется выяснить, достигается ли $\max\{f(u): u \in M_n\}$ в целой вершине многогранника M_n (задача распознавания целочисленности).

Многогранник M_n^Z, порождаемый целыми вершинами из M_n, называется разрезным многогранником, так как известная NP-полная задача о максимальном разрезе (как, впрочем, и ряд других) сводится к оптимизации линейной целевой функции на M_n^Z. Поэтому M_n является релаксационным многогранником задачи о разрезе, или релаксацией разрезного многогранника.

Определим, следуя [5], релаксации более высоких уровней. С этой целью выберем натуральное k $(k < n)$ и рассмотрим систему неравенств S, задающую многогранник M_k^Z; обозначим через Θ число этих неравенств. Далее для каждого $k-$элементного подмножества $\nu = \{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ множества N_n рассмотрим систему S_ν, получающуюся из системы неравенств S заменой переменных $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$ и $t_{i,j}$, соответственно на x_{ν_i,ν_j}, y_{ν_i,ν_j}, z_{ν_i,ν_j} и t_{ν_i,ν_j}. Дополним систему (1)–(6) совокупностью всех $\Theta \cdot C_n^k$ указанных неравенств, а многогранник, который задается расширенной системой ограничений, обозначим через $M_{n,k}$.

Очевидно, что $M_{n,1} = M_{n,2} = M_n$. Таким образом, $M_{n,3}$ – первая, отличная от M_n, релаксация разрезного многогранника. $M_{n,3}$ задается системой (1)–(6) и дополнительными ограничениями:

$$x_{i,j} + t_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \le 2, \tag{7}$$

$$x_{i,j} + t_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \le 2, \tag{8}$$

$$y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \le 2, \tag{9}$$

$$y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \le 2, \tag{10}$$

для каждой тройки $i, j, k \in N_n$, где $i < j < k$ [2, 3].

Рассмотрим индивидуальную задачу $Z \in \text{MNAE 3-SAT}$, где $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и набор C содержит p дизъюнкций, а также многогранник $M_{n,3}$. Построим целевую функцию следующего вида:

$$\forall x \in R^{4n^2}: \quad f(x) = \sum_{i,j,k} (y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k}),$$

по всем тройкам i, j, k, для которых логические переменные u_i, u_j и u_k входят в общую дизъюнкцию из C.

Очевидно, что $\max\{f(u): u \in M_{n,3}\} = 2p$, и если этот максимум достигается в целой вершине $M_{n,3}$, то соответствующий задаче набор дизъюнкций выполним, в противном случае набор не выполним.

Таким образом, задача MNAE 3-SAT сводится к задаче распознавания целочисленности на $M_{n,3}$.

В основе упомянутого выше результата о полиномиальной разрешимости задачи распознавания целочисленности на M_n [3] лежит следующее утверждение.

Утверждение 1. *Каждая точка многогранника $M_{n,3}$ является выпуклой комбинацией вершин многогранника M_n, среди которых есть хотя бы одна целая.*

Ниже устанавливается, что ситуация оказывается принципиально иной уже при переходе к следующей релаксации.

Отметим, что каждой точке $u \in M_{n,3}$ можно также сопоставить 3-однородный смешанный гиперграф рассматриваемого вида, который назовем гиперграфом точки $G(u)$, по следующим правилам:

1. $|V| = n$;
2. $(i, j, k) \in E(u)$ тогда и только тогда, когда
$y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} = 2$;
3. $((i, j), k) \in A(u)$ тогда и только тогда, когда
$y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} = 2.$

Введем для точек многогранника $M_{n,3}$ операцию *инвертирования*, которая произвольную точку $u \in M_{n,3}$ превращает в точку $v = Inv_j(u)$ следующим образом:

Таблица 2

Преобразование координат при инвертировании точки

$x_{i,i}$	0	$\boldsymbol{x_{i,j}}$	$\boldsymbol{y_{i,j}}$	$x_{i,k}$	$y_{i,k}$		$x_{i,i}$	0	$\boldsymbol{z_{i,j}}$	$\boldsymbol{t_{i,j}}$	$x_{i,k}$	$y_{i,k}$
0	$t_{i,i}$	$\boldsymbol{z_{i,j}}$	$\boldsymbol{t_{i,j}}$	$z_{i,k}$	$t_{i,k}$		0	$t_{i,i}$	$\boldsymbol{x_{i,j}}$	$\boldsymbol{y_{i,j}}$	$z_{i,k}$	$t_{i,k}$
		$\boldsymbol{x_{j,j}}$	0	$\boldsymbol{x_{j,k}}$	$\boldsymbol{y_{j,k}}$	$\Rightarrow$			$\boldsymbol{t_{j,j}}$	0	$\boldsymbol{y_{j,k}}$	$\boldsymbol{x_{j,k}}$
		0	$\boldsymbol{t_{j,j}}$	$\boldsymbol{z_{j,k}}$	$\boldsymbol{t_{j,k}}$				0	$\boldsymbol{x_{j,j}}$	$\boldsymbol{t_{j,k}}$	$\boldsymbol{z_{j,k}}$
				$x_{k,k}$	0						$x_{k,k}$	0
				0	$t_{k,k}$						0	$t_{k,k}$

Нетрудно проверить, что так построенная точка v удовлетворяет системе (1)–(10) и также принадлежит многограннику $M_{n,3}$.

Отметим, что операции инвертирования точки многогранника $M_{n,3}$ и вершины гиперграфа G эквивалентны в том смысле, что для точки $v = Inv_j(u)$ ее гиперграф $G(v) = Inv_j G(u)$.

Теорема 2. *Если для некоторой точки* $u \in M_{n,3}$ *ее гиперграф* $G(u)$ *принадлежит классу* G_I, *то в любом разложении* u *в виде выпуклой комбинации вершин* $M_{n,3}$ *нет ни одной целой вершины.*

Доказательство. Предположим противное, то есть предположим, что точка u раскладывается в выпуклую комбинацию вершин, среди которых есть целая:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k,$$
$$\forall i : \alpha_i > 0,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$$
$$\exists i : v_i \in ext M_{n,3}^Z.$$

Не ограничивая общности, примем, что целой является вершина $v_1 = v \in ext M_{n,3}^Z$, тогда:

$$u = \alpha v + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k,$$

$$\sum_{i=2}^{k}\alpha_i = 1-\alpha,$$
$$w = \frac{1}{1-\alpha}(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k),$$
$$\sum_{i=2}^{k}\frac{\alpha_i}{1-\alpha} = 1 \;\Rightarrow\; w \in M_{n,3},$$
$$u = \alpha v + (1-\alpha)w.$$

Нетрудно проверить, что:

$$\forall i:\; Inv_i(u) = \alpha(Inv_i(v)) + (1-\alpha)(Inv_i(w)).$$

Вершина v является целой, любая ее инверсия $(Inv_i(v))$ также будет целой вершиной $M_{n,3}$, тогда, инвертировав точки $u,\ v$ и w несколько раз, получим:

$$u^* = \alpha v^* + (1-\alpha)w^*,$$
$$v^* : \forall i,j : x_{i,j}^{v^*} = 1.$$

Гиперграф $G(u)$ принадлежит классу G_I, следовательно, $G(u^*)$ также принадлежит G_I. Тогда:

$$\exists i,j,k:\; y_{i,j}^{u^*} + z_{i,j}^{u^*} + y_{i,k}^{u^*} + z_{i,k}^{u^*} + y_{j,k}^{u^*} + z_{j,k}^{u^*} = 2,$$
$$y_{i,j}^{v^*} + z_{i,j}^{v^*} + y_{i,k}^{v^*} + z_{i,k}^{v^*} + y_{j,k}^{v^*} + z_{j,k}^{v^*} = 0,$$
$$y_{i,j}^{w^*} + z_{i,j}^{w^*} + y_{i,k}^{w^*} + z_{i,k}^{w^*} + y_{j,k}^{w^*} + z_{j,k}^{w^*} = \frac{2}{1-\alpha},$$
$$\alpha > 0, \qquad \frac{2}{1-\alpha} > 2,$$
$$y_{i,j}^{w^*} + z_{i,j}^{w^*} + y_{i,k}^{w^*} + z_{i,k}^{w^*} + y_{j,k}^{w^*} + z_{j,k}^{w^*} > 2.$$

Противоречие, точка w не принадлежит многограннику $M_{n,3}$, а значит, точка u представляет собой выпуклую комбинацию вершин $M_{n,3}$, среди которых нет ни одной целой. **Теорема доказана.**

Теперь обратимся к $M_{n,4}$ – следующей релаксации разрезного многогранника. Введем новые обозначения для координат:

$$x_{i,j} = x_{i,j}^{1,1},\quad y_{i,j} = x_{i,j}^{1,2},\quad z_{i,j} = x_{i,j}^{2,1},\quad t_{i,j} = x_{i,j}^{2,2}.$$

Утверждение 2. *Многогранник* $M_{n,4}$ *задается системой неравенств (1)–(10) и дополнительными ограничениями вида:*

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{i,l}^{a_l,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} \le 1, \quad (11)$$

для каждой четверки индексов $i,j,k,l,$ *где* $1 \le i < j < k < l \le n$ *и для всех векторов* $a \in [1,2]^n$.

Доказательство. Рассмотрим многогранник $M_{n,4}^*$, удовлетворяющий системе (1)–(11). Достаточно проверить тот факт, что $M_{4,4}^*$ не имеет нецелочисленных вершин и равен M_4^Z [11]. Отсюда напрямую следует, что $M_{n,4}^* = M_{n,4}$. **Утверждение доказано.**

Теорема 3. *При любых* $n \geq 5$ *найдутся точки многогранника* $M_{n,4}$, *гиперграфы которых принадлежат* G_I.

Доказательство. Рассмотрим класс G_U гиперграфов $G=(V,E,A)$, для которых множество ориентированных ребер A является пустым. Нетрудно проверить, что для гиперграфа $\overline{G}$ из класса G_U задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф $\overline{G}$ не принадлежит классу G_I?» – равносильна задаче раскрашивания гиперграфа $\overline{G}$ в два цвета так, чтобы ни одно ребро не было монохромным (не содержало три вершины одного цвета). Достаточно сопоставить множества инвертированных и неинвертированных вершин с двумя разными цветами. Таким образом, любой 3-однородный не 2-раскрашиваемый гиперграф (как и его произвольная инверсия) принадлежит классу G_I, в частности, этому условию удовлетворяют [8]:

1) полный 3-однородный гиперграф на n вершинах, где $n \geq 5$;
2) плоскость Фано (7 вершин и 7 ребер);
3) аффинная плоскость 3-го порядка (9 вершин и 12 ребер) и многие другие.

Гиперграфу $\overline{G}$ из класса G_U сопоставим такую точку $\overline{u}$, что $\overline{G}=G\left(\overline{u}\right)$, по следующему правилу:

$$\begin{cases} x_{i,j}=t_{i,j}=\dfrac{1}{6}, \\ y_{i,j}=z_{i,j}=\dfrac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \ \exists (i,j,k)\in E,$$

$$x_{i,j}=y_{i,j}=z_{i,j}=t_{i,j}=\frac{1}{4}, \text{ в противном случае.}$$

Нетрудно проверить, что точка $\overline{u}$ удовлетворяет системе (1)–(10) и принадлежит многограннику $M_{n,3}$. Оценим неравенство (11) для точки $\overline{u}$:

$$\forall i:\ x_{i,i}=t_{i,i}=\frac{1}{2},$$

$$2-x_{i,j}^{a_j,a_i}-x_{i,k}^{a_k,a_i}-x_{i,l}^{a_l,a_i}-x_{j,k}^{a_k,a_j}-x_{j,l}^{a_l,a_j}-x_{k,l}^{a_l,a_k}\leq 1,$$

$$1\leq x_{i,j}^{a_j,a_i}+x_{i,k}^{a_k,a_i}+x_{i,l}^{a_l,a_i}+x_{j,k}^{a_k,a_j}+x_{j,l}^{a_l,a_j}+x_{k,l}^{a_l,a_k},$$

$$\min_{i,j} x_{i,j}=\min_{i,j} y_{i,j}=\min_{i,j} z_{i,j}=\min_{i,j} t_{i,j}=\frac{1}{6},$$

$$\forall i,j,k,l:\ x_{i,j}^{a_j,a_i}+x_{i,k}^{a_k,a_i}+x_{i,l}^{a_l,a_i}+x_{j,k}^{a_k,a_j}+x_{j,l}^{a_l,a_j}+x_{k,l}^{a_l,a_k}\geq 1.$$

Точка $\overline{u}$ удовлетворяет системе (1)–(11) и, следовательно, принадлежит многограннику $M_{n,4}$.

Таким образом, для произвольного 3-однородного не 2-раскрашиваемого гиперграфа $\overline{G}$ (или некоторой его инверсии) существует такая точка $\overline{u}\in M_{n,4}$, что ее гиперграф $G\left(\overline{u}\right)=\overline{G}$ принадлежит классу G_I, и, соответственно, в любом разложении которой в выпуклую комбинацию вершин многогранника $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины. Например, гиперграф приведенной ниже точки u_c

многогранника $M_{5,4}$ принадлежит классу G_I, так как является инверсией $Inv_{1,2,3}\left(G_c\right) = Inv_{4,5}\left(G_c\right)$ полного 3-однородного гиперграфа на 5 вершинах G_c.

Таблица 3

Координаты точки u_c

$1/2$		$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$	$1/3$	$1/6$
	$1/2$	$1/3$	$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/3$
		$1/2$		$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$	$1/3$	$1/6$
			$1/2$	$1/3$	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/3$
				$1/2$		$1/3$	$1/6$	$1/3$	$1/6$
					$1/2$	$1/6$	$1/3$	$1/6$	$1/3$
						$1/2$		$1/6$	$1/3$
							$1/2$	$1/3$	$1/6$
								$1/2$	
									$1/2$

Библиографический список

1. Бондаренко, В.А. Об одном комбинаторном многограннике [Текст] / В.А. Бонадренко // Моделирование и анализ вычислительных систем : сб. науч. тр. – Ярославль : Яросл. гос. ун-т, 1987. – С. 133–134.

2. Бондаренко, В.А., Максименко, А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации [Текст] / В.А. Бондаренко, А.Н. Максименко. – М. : ЛКИ, 2008. – 184 с.

3. Бондаренко, В.А., Урываев, Б.В. Об одной задаче целочисленной оптимизации [Текст] / В.А. Бондаренко, Б.В. Урываев // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №6. – С. 18–23.

4. Гэри, М., Джонсон, Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Текст] / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 416 с.

5. Деза, М.М., Лоран, М. Геометрия разрезов и метрик [Текст] / М.М. Деза, М. Лоран ; пер. с англ. Е. Пантелеевой и П. Сергеева ; под ред. В. Гришухина. – М. : МЦНМО, 2001. – 736 с.

6. Емеличев, В.А. Лекции по теории графов [Текст] / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 384 с.

7. Емеличев, В.А. Многогранники, графы, оптимизация [Текст] / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М. : Наука, 1981. – 344 с.

8. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. North-Holland Mathematical Library, v. 45. Amsterdam, North-Holland Publishing Co. 1989. 287 p.

9. Padberg M.V. The Boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Program. 1989. V. 45. P. 139–172.

10. Schaefer T.J. The complexity of satisfiability problems // Proc. 10th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York, 1978, P. 216–226.

11. Thomas Christof, Andreas Loebel. PORTA: POlyhedron Representation Transformation Algorithm 1.4.0. The Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin, http://www.zib.de/Optimization/Software/Porta/