УДК 519.85

А.В. Ганичева

Оптимальное решение и оценка полезности организационных вопросов

Предложен алгоритм оптимального решения организационных вопросов, связанный с максимизацией взвешенной суммы вероятностей выполнения всех подзадач данной задачи, основанный на методе неопределенных множителей. Рассмотрены портфели средств и оценочных баллов решения задач; оценка их эффективности, риска и полезности. Приведено сравнение критериев оценки полезности портфелей.

Ключевые слова: организационные вопросы, взвешенная сумма вероятностей, оптимальное решение, портфель средств, портфель оценочных баллов, эффективность, риск и полезность портфеля, критерии сравнения портфелей, максимизация полезности портфеля.

A.V. Ganicheva

Optimum Solution of Organizational Questions and Estimation of Utility

The algorithm of the optimum solution of the organizational questions, connected with maximization of the weighed sum of probabilities of all subtasks performance of the given problem, based on the method of indefinite factors. Portfolios of means and estimated points of the solution of problems are considered; an estimation of their efficiency, risk and utility. Comparison of estimation criteria of portfolios' utility is represented.

Key words: organizational questions, the weighed sum of probabilities, the optimum solution, a portfolio of means, a portfolio of estimated points, efficiency, a risk and utility of a portfolio, criteria of portfolios comparison, portfolio utility maximization.

При решении глобальной задачи часто бывает целесообразно разбить ее на подзадачи и распределить имеющиеся силы (средства) на решение этих подзадач таким образом, чтобы был достигнут общий максимальный эффект. Пусть выделено n подзадач и имеется m однотипных средств по их решению, при этом известны вероятности p_j $(j=\overline{1,n})$ выполнения j-ой подзадачи каждым средством, причем $0<p_j<1$. Обозначим через x_j число средств (из m имеющихся), выделенных на решение j-ой подзадачи, через P_j – вероятность решения j-ой подзадачи хотя бы одним средством из выделенных, то есть

$$P_j = 1-(1-p_j)^{x_j}. \qquad (1)$$

Средний эффект при решении всех n подзадач можно вычислять по формуле

$$Э=\sum_{j=1}^{n} C_j\left[1-(1-p_j)^{x_j}\right], \qquad (2)$$

то есть как взвешенную сумму вероятностей выполнения всех подзадач. В формуле (2) коэффициент C_j представляет собой важность (эффективность) решения j-ой подзадачи. Он может иметь различное смысловое содержание и количественно выражаться в виде баллов, процентов и т. п. Удобно его выражать в долях 1 (единицы). В этом случае C_j нормируют введением приведенных коэффициентов:

$$g_j = \frac{C_j}{\sum_{j=1}^{n} C_j}\,(j=\overline{1,n}) \text{ , при этом } \sum_{j=1}^{n} x_j = \nu . \qquad (3)$$

Проблема заключается в определении $x_1, x_2,..., x_n$, то есть сил (средств), направленных на решение 1-ой, 2-ой, …, *n*-ой подзадачи, и при таком распределении средний эффект Э должен быть максимальным.

Формулы (2) и (3) определяют оптимизационную задачу нелинейного программирования, заключающуюся в максимизации функции (2) при ограничениях (3). Один из способов ее решения связан с методом неопределенных множителей Лагранжа [1], согласно которому отыскание максимума функции при ограничениях сводится к отысканию максимума функции Лагранжа

$$Э^* = Э + \lambda\varphi(\overline{X}), \tag{4}$$

где $\overline{X} = (x_1,...,x_n), \quad \varphi(\overline{X}) = v - \sum_{j=1}^{n} x_j$. Следовательно,

$$Э^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{\sum_{j=1}^{n} C_j}\left[1-(1-p_j)^{x_j}\right] + \lambda\left(v - \sum_{j=1}^{n} x_j\right). \tag{5}$$

Предположим для простоты изложения, но, не нарушая общности, что *n*=2, то есть глобальная задача разбивается на 2 подзадачи, на решение которых выделено *m* средств, тогда (5) запишется как

$$Э^* = \frac{C_1}{C_1+C_2}\left[1-(1-p_1)^{x_1}\right] + \frac{C_2}{C_1+C_2}\left[1-(1-p_2)^{x_2}\right] + \lambda(v - x_1 - x_2). \tag{6}$$

Следуя методу Лагранжа, найдем частные производные функции $Э^*$ из (6) по x_1, x_2, λ и приравняем их к нулю. Получим

$$\begin{cases} Э^{*'}_{x_1} = \dfrac{c_1}{c_1+c_2}(1-p_1)^{x_1} \cdot \ln(1-p_1) - \lambda = 0, \\ Э^{*'}_{x_2} = \dfrac{c_2}{c_1+c_2}(1-p_2)^{x_2} \cdot \ln(1-p_2) - \lambda = 0, \\ Э^{*'}_{\lambda} = v - x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решим данную систему. Из 1-го и 2-го уравнения получаем $c_1(1-p_1)^{x_1}\ln(1-p_1) = c_2(1-p_2)^{x_2}\ln(1-p_2)$, откуда с учетом 3-го уравнения системы $c_1(1-p_1)^{v-x_2}\ln(1-p_1) = c_2(1-p_2)^{x_2}\ln(1-p_2)$, или

$$\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{x_2} = \frac{c_1}{c_2}(1-p_1)^{v} \cdot \frac{\ln(1-p_1)}{\ln(1-p_2)}. \tag{8}$$

Положим $Z = \dfrac{c_1}{c_2}(1-p_1)^{v} \cdot \dfrac{\ln(1-p_1)}{\ln(1-p_2)}$, тогда получается:

$$x_2 = \log_{(1-p_1)(1-p_2)} Z, \tag{9}$$

$$x_1 = v - x_2. \tag{10}$$

Таким образом, точка $P(x_1, x_2)$, обладающая координатами, удовлетворяющими равенствам (9)–(10), является критической точкой, в которой возможен экстремум. Проверим достаточное условие экстремума. Для этого найдем частные производные второго порядка функции $Э^*$, определяемой формулой (7), по переменным x_1, x_2, а также частные производные первого порядка функции $\varphi(x) = v - x_1 - x_2$ по x_1 и x_2. Итак,

$$э^{*''}_{x_1^2} = \frac{-c_1}{c_1 + c_2}(1-p_1)^{x_1}(\ln(1-p_1))^2,\ э^{*''}_{x_2^2} = \frac{-c_2}{c_1 + c_2}(1-p_2)^{x_2}(\ln(1-p_2))^2,\ э^{*''}_{x_1 x_2} = 0,\ \varphi'_{x_1} = \varphi'_{x_2} = -1.$$

Далее составляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_{x_1} & \varphi^1_{x_2} \\ \varphi'_{x_1} & э^{*''}_{x_1^2} & э^{*''}_{x_1 x_2} \\ \varphi'_{x_2} & э^{*''}_{x_1 x_2} & э^{*''}_{x_2^2} \end{vmatrix}$$

и вычисляется его значение в точке *P*. Для рассматриваемой задачи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{-c_1}{c_1+c_2}(1-p_1)^{x_1} \cdot (\ln(1-p_1))^2 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{-c_2}{c_1+c_2}(1-p_2)^{x_2} \cdot (\ln(1-p_2))^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{c_1}{c_1+c_2}(1-p_1)^{x_1} \cdot (\ln(1-p_1))^2 + \frac{c_2}{c_1+c_2}(1-p_2)^{x_2} \cdot (\ln(1-p_2))^2 > 0.$$

Положительность данного определителя (а он оказался положительным для любых x_1 и x_2) означает, что в точке *P* исходная функция Э имеет максимум. Значит, на решение второй подзадачи должно быть выделено $x_2 = \log_{(1-p_1)(1-p_2)} Z$ средств, где *Z* обозначает правую часть равенства (8), а на решение первой подзадачи, согласно (10), выделяется $x_1 = v - x_2$ средств.

Рассматриваемые подзадачи образуют систему $(A_1, A_2, ..., A_n)$, которая продуцирует систему средств $(X_1, X_2, ..., X_n)$, выделенных соответственно на их решение, и систему балльных оценок $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ эффективности их решения. Для любого $j = \overline{1, n}$ X_j и Y_j представляют собой случайные величины, причем $\sum_{j=1}^{n} x_j = v$, где x_j – значение случайной величины X_j; $\sum_{j=1}^{n} y_j = w$, где y_j – значение случайной величины Y_j. Система $(X_1, X_2, ..., X_n)$ образует **портфель средств**, используемый для реализации различного рода ситуаций, мероприятий и т. п. Система $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ образует **портфель оценочных баллов**. Стоимостью портфеля средств (оценочных баллов) будем называть сумму $V = \sum_{j=1}^{N} X_j$ $(W = \sum_{j=1}^{n} Y_j)$ составляющих его величин $X_j(Y_j)(j = \overline{1, n})$. Как сумма случайных величин стоимость $V(W)$ является случайной. Будем считать, что данный (начальный) момент времени имеет значение $t = 0$ и при этом $V(W)$ обозначает стоимость портфеля в этот момент времени. Поскольку в начальный момент времени все $X_j(Y_j)$, а тем самым, и $V(W)$ фиксированы, можно считать, что в этот момент времени данные величины неслучайны, поэтому положим $X_j(0) = C_j^{(1)}$, $V(0) = V_0$, $Y_j(0) = C_j^{(2)}$ и $W(0) = W_0$, где $C_j^{(1)}$; $C_j^{(2)}$, V_0 и W_0 – известные неслучайные величины, причем $V_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j^{(1)}$, $W_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j^{(2)}$.

Величину $\frac{V(\Delta t)-V_0}{V_0}=d_p^{(1)}(\Delta t)$ будем называть **доходностью портфеля средств** за промежуток Δt, величину $d_j^{(1)}(\Delta t)=\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{C_j^{(1)}}$ – **доходностью** j**-ой компоненты** этого портфеля, а $C_j^{(1)}/V_0=\lambda_j^{(1)}$ – долей начальной стоимости портфеля средств, приходящейся на j-ую подзадачу. Аналогично определяется доходность $d_p^{(2)}(\Delta t)$ портфеля оценочных баллов. Доходность портфеля – это доходность на единицу его стоимости, при этом доходность составляющей портфеля показывает ее доходность, приходящуюся на единицу стоимости. Среднее значение доходности портфеля называется **эффективностью портфеля**, среднее квадратическое отклонение доходности портфеля называется **риском портфеля**. Для эффективности портфеля будем использовать обозначение $\overline{d_p}$, для риска – σ_p.

Оценим эффективность и риск портфеля средств:

$$\overline{d_p}^{(1)}=M\left[d_p^{(1)}\right]=M\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{V_0}\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(1)}\cdot M\left[d_j^{(1)}(\Delta t)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_j^{(1)}}{V_0}\cdot M\left[\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{C_j^{(1)}}\right]=\frac{1}{V_0}\sum_{j=1}^{n}(M\left[X_j(\Delta t)\right]-C_j^{(1)})$$

Положим $M_j^{(1)}=M\left[X_j(\Delta t)\right]$, тогда

$$\overline{d_p}^{(1)}=\frac{1}{V_0}\cdot\sum_{j=1}^{n}(M_j^{(1)}-C_j^{(1)}). \qquad (11)$$

Вычислим $D\left[d_p^{(1)}\right]=D\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{V_0}\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(1)})^2\cdot D\left[d_j^{(1)}(\Delta t)\right]+2\cdot\sum_{i\langle j}\lambda_i^{(1)}\cdot\lambda_j^{(1)}\cdot K_{ij}^{(1)}$, где $K_{ij}^{(1)}$ – момент корреляции между $d_i^{(1)}(\Delta t)$ и $d_j^{(1)}(\Delta t)$. Последняя формула преобразуется следующим образом:

$$D\left[d_p^{(1)}\right]=\sum_{j=1}^{n}\frac{(C_j^{(1)})^2}{V_0^2}\cdot D\left[\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{C_j^{(1)}}\right]+\frac{2}{V_0^2}\cdot\sum_{i<j}C_i^{(1)}\cdot C_j^{(1)}\cdot K_{ij}^{(1)}=\frac{1}{V_0^2}\cdot\sum_{j=1}^{n}D\left[X_i(\Delta t)\right]+$$

$$+\frac{2}{V_0^2}\cdot\sum_{i<j}(D\left[X_i(\Delta t)\right]\cdot D\left[X_j(\Delta t)\right])^{\frac{1}{2}}\cdot r_{ij}^{(1)},$$

здесь $r_{ij}^{(1)}$ – коэффициент корреляции между X_i и X_j. Положим $D_j^{(1)}=D\left[X_j(\Delta t)\right]$, тогда

$$\sigma_p^{(1)}=\left(\frac{1}{V_0^2}\cdot\sum_{j=1}^{n}D_j^{(1)}+\frac{2}{V_0^2}\cdot\sum_{i<j}\sqrt{D_i^{(1)}D_j^{(1)}}\cdot r_{ij}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Аналогичные формулы имеют место и для характеристик портфеля оценочных баллов. Имеем сравнение портфелей средств и портфелей оценочных баллов по двум критериям: по средней доходности и по риску, определяемому через среднее квадратическое отклонение доходности. Объединение этих критериев в осуществляется по одной из формул:

$$U=\overline{d_p}-\alpha\sigma_p, \qquad (13)$$

$$U = \frac{\overline{d_p}}{\alpha \sigma_p}, \qquad (14)$$

где вес первого критерия полагается равным 1, вес второго полагается равным α, U – **полезность портфеля.**

В литературе сравнение полезностей мероприятий (ситуаций и т. п.), моделируемых соответствующими портфелями средств, осуществляется либо по формуле (15), либо по формуле (16):

$$\overline{d_p}^{(2)} - \alpha_2 \sigma_p^{(2)} > \overline{d_p}^{(1)} - \alpha_1 \sigma_p^{(1)}, \qquad (15)$$

$$\frac{\overline{d_p}^{(2)}}{\alpha_2 \sigma_p^{(2)}} > \frac{\overline{d_p}^{(1)}}{\alpha_1 \sigma_p^{(1)}}. \qquad (16)$$

Покажем, что неравенства (15) и (16) при определенных условиях равносильны. Для этого сначала проведем общие рассуждения. Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 – произвольные положительные числа, образующие систему двух неравенств:

$$a_2 - b_2 > a_1 - b_1, \qquad (17)$$

$$\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1}. \qquad (18)$$

Исследуем условия равносильности этих неравенств. Если $a_1 = a_2$ или $b_1 = b_2$, то равносильность неравенств очевидна. Рассмотрим случай, когда $a_2 > b_2$. Если при этом $a_1 < b_1$, то равносильность очевидна, поэтому допустим, что $a_1 > b_1$ и $b_1 > b_2$. Пусть для данных положительных чисел a_1, b_1, a_2, b_2 имеет место неравенство (17). Докажем, что тогда имеет место неравенство (18). Доказываем от противного. Пусть $\frac{a_2}{b_2} \le \frac{a_1}{b_1}$. Вычтем 1 из обеих частей этого неравенства и приведем к общему знаменателю обе части, получим: $\frac{a_2 - b_2}{b_2} \le \frac{a_1 - b_1}{b_1}$. Поскольку $b_2 < b_1$, $a_2 > b_2$ и $a_1 > b_1$, то $\frac{a_2 - b_2}{b_1} < \frac{a_1 - b_1}{b_1}$, тогда $a_2 - b_2 < a_1 - b_1$, что противоречит неравенству (17). Поэтому в данном случае из (17) вытекает (18).

Пусть теперь $b_2 > b_1$, если при этом $a_1 > a_2$, то, как нетрудно видеть, неравенства (17) и (18) не имеют смысла. Пусть $a_2 > a_1$ и имеет место неравенство (17). Проанализируем, при каком условии имеет место неравенство (18). Один из подходов заключается в следующем. Из условия $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$ при фиксированных значениях трех переменных, например, a_1, a_2, b_2, находим значение $b_1^{(0)} = a_1 b_2 / a_2$, из условия $a_2 - b_2 = a_1 - b_1$ находим значение $b_1^{(1)} = a_1 - a_2 + b_2$. Тогда при $b_1 > \max\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\}$ выполняются неравенства (17) и (18), а при $b_1 < \min\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\}$ выполняются противоположные неравенства.

Пусть имеет место неравенство (18). Если $a_1 < a_2$ и $b_2 < b_1$, тогда очевидно, что $a_1 - b_1 < a_2 - b_2$. Если $b_2 > b_1$, то вычтем 1 из обеих частей неравенства (18) и приведем обе части к общему знаменателю: $\frac{a_1 - b_1}{b_1} < \frac{a_2 - b_2}{b_2}$, отсюда с учетом того, что $b_2 > b_1$ и $a_2 > b_2$, имеем:

$\frac{a_1 - b_1}{b_2} < \frac{a_2 - b_2}{b_2}$, то есть $a_1 - b_1 < a_2 - b_2$. Если $a_1 > a_2$ и $b_1 > b_2$, то из условия $a_2 - b_2 = a_1 - b_1$ при фиксированных значениях трех переменных, например, a_1, a_2, b_2, находим значение $b_1^{(2)}$, а из условия $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$ находим значение $b_1^{(3)}$. Тогда при $b_1 > \max\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\}$ выполняются неравенства (17) и (18), а при $b_1 < \min\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\}$ выполняются противоположные неравенства. Пусть $\alpha_1 = \min\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\}$, $\beta_1 = \max\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\}$, $\alpha_2 = \min\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\}$, $\beta_2 = \max\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\}$.

Из проведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема. Если $a_2 > b_2$ и $a_1 < b_1$ или $a_2 > b_2$, $a_1 > b_1$, $a_2 > a_1$ и $b_1 > b_2$, то неравенства (17) и (18) равносильны. Если $a_2 > b_2$, $a_1 > b_1$, $a_2 > a_1$ и $b_2 > b_1$, то при фиксированных a_1, a_2, b_2 неравенства (17) и (18) равносильны при $b_1 > \beta_1$, а при $b_1 < \alpha_1$ равносильны противоположные неравенства. Если $a_2 > b_2$, $a_1 > b_1$, $a_1 > a_2$ и $b_1 > b_2$, то при фиксированных a_1, a_2, b_2 неравенства (17) и (18) равносильны при $b_1 > \beta_2$, а при $b_1 < \alpha_2$ равносильны противоположные неравенства.

Итак, рассмотрен случай, когда $a_2 > b_2$. При $a_2 < b_2$ от системы неравенств (17) и (18) переходим к неравенствам: $b_1 - a_1 > b_2 - a_2$, $b_1 / a_1 > b_2 / a_2$.

В этом случае $b_1 > a_1$ и все рассуждения повторяются, но вместо "a_2" теперь будет "b_1", вместо "b_2"– "a_1", вместо "a_1"– "b_2", вместо "b_1"– "a_2".

Из этой теоремы при $a_1 = \overline{d_p}^{(1)}$, $a_2 = \overline{d_p}^{(2)}$, $b_1 = \alpha_1 \sigma_p^{(1)}$, $b_2 = \alpha_2 \sigma_p^{(2)}$ вытекает равносильность неравенств (15) и (16) при указанных в теореме ограничениях.

Рассмотрим **пример**. Для сравнения успеваемости двух групп были выбраны два критерия: Y_1 – средний балл группы по текущей успеваемости в первом семестре, и Y_2 – во втором семестре. Будем обозначать индексом 1 вверху эти показатели для первой группы, индексом 2 – для второй группы обучаемых. Значения $Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, Y_1^{(2)}$ и $Y_2^{(2)}$ приведены в таблице. В данной таблице $k = 1, 2$.

Значения $Y_1^{(k)}$	$y_{11}^{(k)}$	$y_{12}^{(k)}$	…	$y_{1S_k}^{(k)}$
Число обучаемых с данным баллом	$n_{11}^{(k)}$	$n_{12}^{(k)}$	…	$n_{1S_k}^{(k)}$
Значения $Y_2^{(k)}$	$y_{21}^{(k)}$	$y_{22}^{(k)}$	…	$y_{2S_k}^{(k)}$
Число обучаемых с данным баллом	$n_{21}^{(k)}$	$n_{22}^{(k)}$	…	$n_{2S_k}^{(k)}$

Начальные значения этих баллов (в начале первого и второго семестров) соответственно равны $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)}$. Имеем два портфеля оценочных баллов: $\left(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}\right)$ – для первой группы обучаемых, $\left(Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}\right)$ – для второй группы обучаемых. Оценим эффективность и риск по формулам (11), (12) соответственно:

$$\overline{d_p}^{(1)} = M\left[d_p^{(1)}\right] = \frac{1}{C_1^{(1)} + C_2^{(1)}} \cdot \left(M\left[Y_1^{(1)}(\Delta t)\right] - C_1^{(1)} + M\left[Y_2^{(1)}(\Delta t)\right] - C_2^{(1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1^{(1)} + C_2^{(1)}} \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^{S_1} y_{1j}^{(1)} \cdot n_{1j}^{(1)}}{\sum_{j=1}^{S_1} n_{1j}^{(1)}} - C_1^{(1)} + \frac{\sum_{j=1}^{S_1} y_{2j}^{(1)} \cdot n_{2j}^{(1)}}{\sum_{j=1}^{S_1} n_{2j}^{(1)}} - C_2^{(1)} \right),$$

$$\sigma_p^{(1)} = \frac{1}{C_1^{(1)} + C_2^{(1)}} \cdot \left(D_1^{(1)} + D_2^{(1)} + 2 \cdot \sqrt{D_1^{(1)}} \cdot \sqrt{D_2^{(1)}} \cdot r_{12}^{(1)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $D_1^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^{S_1} (y_{1j}^{(1)})^2 \cdot n_{1j}^{(1)}}{\sum_{j=1}^{S_1} n_{1j}^{(1)}} - M_1^{(1)2}$, $D_2^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^{S_1} (y_{2j}^{(1)})^2 \cdot n_{2j}^{(1)}}{\sum_{j=1}^{S_1} n_{2j}^{(1)}} - M_2^{(1)2}$.

Для второй группы данные показатели рассчитываются совершенно аналогично. Таким образом, имеем два портфеля оценочных баллов: $\left(\overline{d_p}^{(1)}, \sigma_p^{(1)}\right)$ и $\left(\overline{d_p}^{(2)}, \sigma_p^{(2)}\right)$. Полезности этих портфелей сравниваются либо по формуле (15), либо по формуле (16).

Одна из важных задач заключается в отыскании максимального значения функции полезности портфеля при данных ограничениях. Часто ограничения представляют собой линейные неравенства вида $\alpha \le \overline{d_p} \le \beta$, $\delta \le \sigma_p \le \gamma$, связывающие эффективность и риск портфеля. В этом случае очевидно, что максимальное значение полезности портфеля достигается при $\overline{d_p} = \beta$ и $\sigma_p = \delta$. В ряде случаев используется линейное ограничение $l_1 \cdot \overline{d_p} + l_2\sigma_p \le l_3$. Для решения этой задачи можно использовать метод Лагранжа; однако если полезность портфеля определяется по формуле $U = \overline{d_p} - \alpha \cdot \sigma_p$, то, как нетрудно показать, коэффициенты l_1 и l_2 в случае наличия стационарной точки должны быть связаны соотношением $l_2 = -\alpha l_1$. А это далеко не всегда имеет место, поэтому при линейном ограничении целесообразно определять полезность портфеля по формуле $U = \frac{\overline{d_p}}{\alpha\sigma_p}$. Можно показать, что в этом случае полезность обладает максимальным значением при $\overline{d_p} = (l_3 + l_1)/l_1$, $\sigma_p = -l_1/l_2$, если $l_3 \cdot l_2 < 0$, и имеет в этой точке минимальное значение, если $l_3 \cdot l_1 > 0$.

Подведем итог. Задача оптимального решения организационных вопросов является актуальной задачей планирования и организации работы любых систем в области техники, экономики, социальной сфере. Предложенный алгоритм ее решения универсален. Для характеристики решаемой задачи введены два портфеля (средств и оценочных баллов). Такой подход дает возможность системного анализа эффективности, риска и полезности решения.

Библиографический список

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов [Текст] / Н.Ш. Кремер и др. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999 г. – 480 с.