УДК 519.676

И. А. Осетров, М. А. Суворова

Вероятность на вариациях одной задачи из биатлона

В работе предлагается построение основ теории вероятностей на одной задаче о стрельбе в эстафетной гонке, что может использоваться при изложении курса «Спортивная метрология».

Ключевые слова: биатлон, эстафетная гонка, правила сложения и умножения вероятностей, условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса, схема Бернулли, цепи Маркова.

I. A. Osetrov, M. A. Suvorova

Probability on Variations of One Problem from Biathlon

In the article is offered constructing the bases of Probability Theory on one problem about shooting in relay race what can be used at reading the course «Sports Metrology».

Key words: biathlon, relay race, rules of addition and multiplication of probabilities, conditional probability, the total probability formula, the formula of Bayes, the scheme of Bernulli, Markov's chains.

Метод варьирования задач является одним из важных средств формирования осознанных знаний учащихся по математике. О значении вариативных упражнений писал еще К. Д. Ушинский, объясняя механизм действия таких упражнений с психологической точки зрения: «Если возбужденное в нас представление есть вполне повторение прежнего, то оно только усугубляет след прежнего и тем укореняет его в памяти. Но если в новом представлении есть несколько членов, которые были и в прежнем, а вместе с тем есть и несколько новых членов, которых в прежнем не было, тогда происходит совершенно другое явление: сходные следы, одинаковые члены ассоциаций совпадают, усиливая друг друга, и вместе с тем крепко связывают и то, что есть различного в новых представлениях» [3].

Под методом варьирования задач будем понимать конструирование из одной задачи (назовем ее базовой) целой цепочки взаимосвязанных задач.

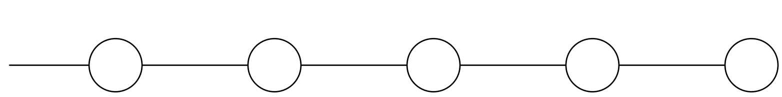
В работе предлагается построение основ теории вероятностей на одной задаче о стрельбе в эстафетной гонке.

Базовая задача: Во время эстафетных соревнований по биатлону каждый спортсмен в команде преодолевает дистанцию с 2-мя огневыми рубежами. Стрельба ведется на первом огневом рубеже из положения лежа, на втором – стоя. Во время стрельбы биатлонисту требуется поразить 5 мишеней. В эстафете, в отличие от других биатлонных гонок, на огневой рубеж дается 5 основных патронов и 3 дополнительных. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле принимаем за $p\left(0<p<1\right)$ и будем считать ее постоянной для этого спортсмена. Рассмотрим вероятности возможных исходов при стрельбе с использованием основных и дополнительных патронов.

Вариация 1. (на правило произведения вероятностей). Найти вероятность того, что биатлонист поразит 5 мишеней без использования дополнительных патронов.

Решение.

Обозначим символом «+» попадание биатлониста в мишень. Тогда ветвь графа, отображающая результаты стрельбы, будет выглядеть следующим образом:



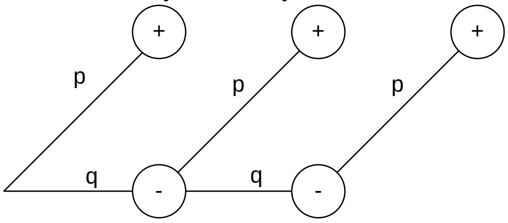
Чтобы вычислить вероятность по графу, нужно перемножить значения вероятностей на выбранной ветке от корня дерева до конечной вершины графа.

$$P = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p = p^5$$

Вариация 2. (на правила сложения и умножения вероятностей). Биатлонист во время основной стрельбы допустил один промах. Найти вероятность того, что он все-таки закроет эту мишень с помощью дополнительных патронов.

Решение.

Продолжим стрельбу с использованием дополнительных патронов, тогда вероятностное дерево исходов будет следующее:



Используя интерпретацию правил сложения и умножения вероятностей на графе [1, с. 43–44], получаем:

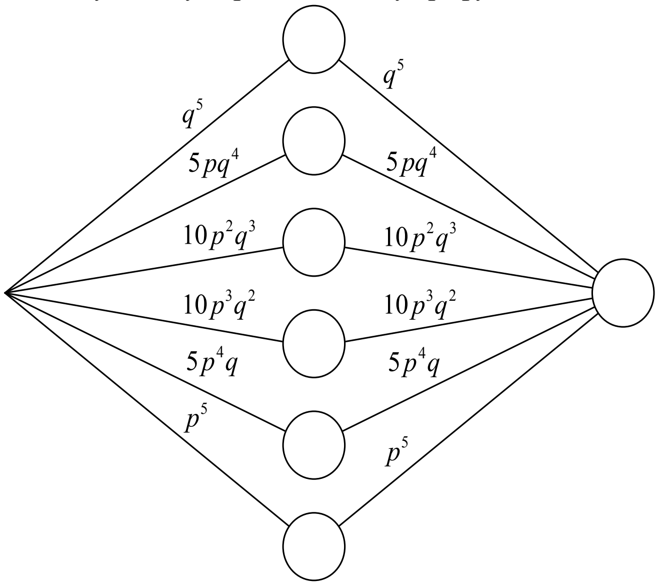
$$P(+) = p + qp + q^2 p = p\left(1+q+q^2\right) = (1-q)\left(1+q+q^2\right) = 1-q^3,$$

что соответствует вероятности противоположного события непопадания дополнительными патронами $\left(P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1\right)$.

Вариация 3. (на схему Бернулли). Какова вероятность того, что количество промахов при стрельбе лежа и при стрельбе стоя совпадет. Будем считать, что вероятности попадания из положения лежа и из положения стоя одинаковы.

Решение.

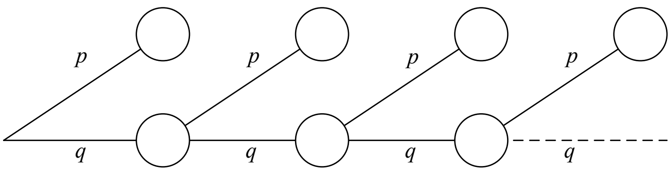
При первой стрельбе возможны 6 вариантов числа закрытых мишеней, для вычисления вероятностей которых используем формулу Бернулли для 5 выстрелов с использованием основных патронов. Второе испытание должно совпадать с первым, поэтому искомую вероятность находим по следующему вероятностному графу:



$$\begin{aligned} P(+) &= \left(q^5\right)^2 + \left(5pq^4\right)^2 + \left(10p^2q^3\right)^2 + \left(10p^3q^2\right)^2 + \left(5p^4q\right)^2 + \left(p^5\right)^2 = \\ &= q^{10} + 25p^2q^8 + 100p^4q^6 + 100p^6q^4 + 25p^8q^2 + p^{10} = \\ &= \left(p^{10}+q^{10}\right) + 25p^2q^2\left(p^6+q^6\right) + 100p^4q^4\left(p^2+q^2\right) \end{aligned}$$

Вариация 4. (на продолжение схемы Бернулли). При использовании основных патронов был допущен один промах. Сколько нужно дополнительных патронов, чтобы закрыть эту мишень с вероятностью не меньшей 0,99.

Решение.



$$P(+) \geq 0.99$$

$$P(+) = p + qp + q^2 p + q^3 p + \ldots + q^n p = p\left(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}\right) = p\sum_{i=0}^{n} q^i$$

Вероятность противоположного события: $P(-) = q^n \le 0.01$.

$$q^n \le 0.01$$

$$\ln\left(q^n\right) \le \ln(0.01)$$

$$n \cdot \ln(q) \le \ln(0.01)$$

$$n \ge \frac{\ln(0.01)}{\ln(q)}$$

Пусть вероятность попадания равна $p = 0.8$, тогда $n \ge \dfrac{\ln(0.01)}{\ln(0.2)} \approx 2.861$

Таким образом, число дополнительных патронов должно быть не меньше 3.

Вариация 5. (на условные вероятности). Известно, что один из биатлонистов при стрельбе стоя поразил не все 5 мишеней. Какова вероятность того, что он избежит штрафных кругов, если известна его неустойчивая психика.

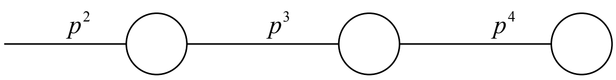
Решение.

Примем, что в случае непоражения мишени основными патронами вероятность ее поражения дополнительными выстрелами уменьшается, и примем эту вероятность p_1 за p^2. Тогда $q_1 = 1 - p_1 = 1 - p^2$. Такие вероятности, которые зависят от исходов предыдущих испытаний, называются ***условными***.

Вероятность избежать штрафных кругов для биатлониста, который промахнулся всеми основными патронами или попал только один раз, равна нулю.

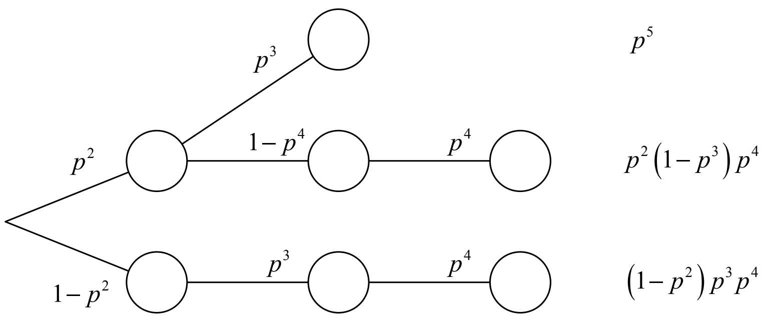
Рассмотрим 3 других случая.

a. Биатлонист поразил ровно 2 мишени, тогда, учитывая его психику, примем, что условная вероятность попадания каждым следующим дополнительным патроном равна предыдущей вероятности, умноженной на p.



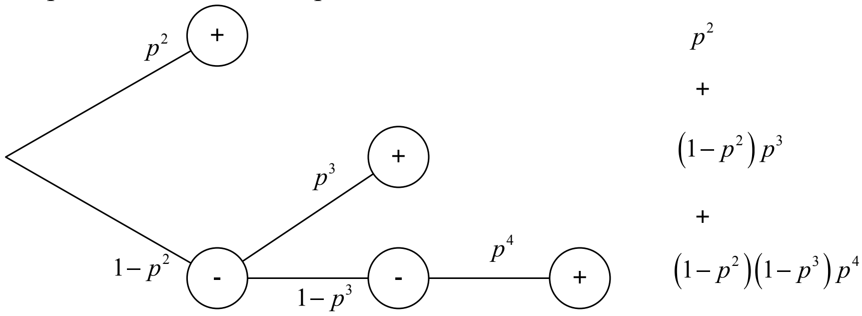
$$P_1 = p^2 \cdot p^3 \cdot p^4 = p^9$$

b. Биатлонист поразил основными патронами ровно 3 мишени, тогда вероятностный граф дополнительных испытаний будет следующий:



$$P_2 = p^5 + p^2\left(1-p^3\right)p^4 + \left(1-p^2\right)p^3p^4 = p^5\left(1 + p\cdot\left(1-p^3\right) + p^2\left(1-p^2\right)\right) =$$
$$= p^5\left(1 + p - p^4 + p^2 - p^4\right) = p^5\left(1 + p + p^2 - 2p^4\right)$$

c. Биатлонист поразил основными патронами только 1 мишень.



$$P_3 = p^2 + \left(1-p^2\right)p^3 + \left(1-p^2\right)\left(1-p^3\right)p^4 = p^2\left(1 + p\cdot\left(1-p^2\right) + p^2\left(1-p^2\right)\left(1-p^3\right)\right) =$$
$$= p^2\left(1 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^5 + p^7\right)$$

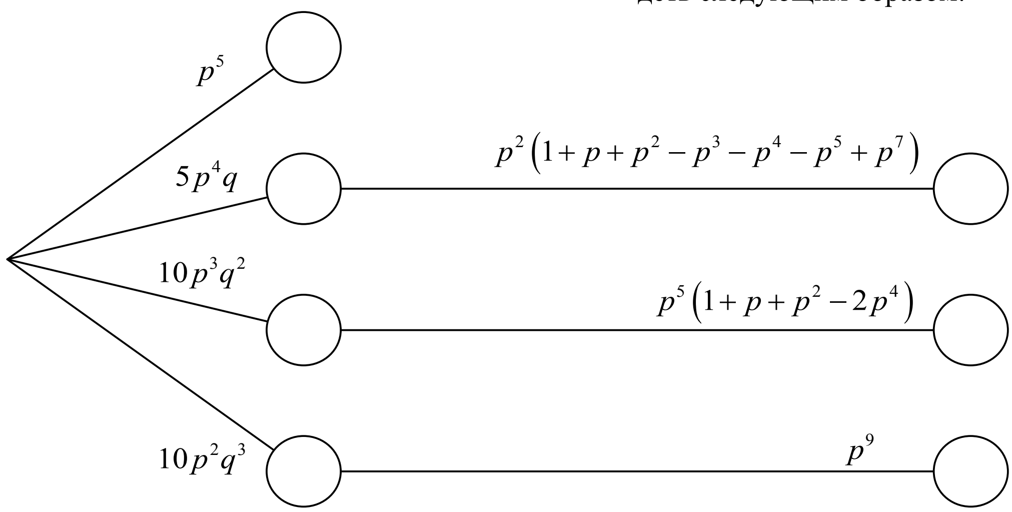
Так, например, для биатлониста, у которого вероятность поражения мишени p примерно равна 0,9, искомые вероятности будут:

$P_1 \approx 0.387;\quad P_2 \approx 0.825;\quad P_3 \approx 0.982$.

Вариация 6. (условные вероятности). Найти вероятность того, что все мишени будут поражены.

Решение.

Вероятностное дерево исходов будет выглядеть следующим образом:



Тогда

$$P(+) = p^5 + 5p^4q\cdot p^2\left(1+p+p^2-p^3-p^4-p^5+p^7\right) +$$
$$+10p^3q^2\cdot p^5\left(1+p+p^2-2p^4\right) + 10p^2q^3\cdot p^9 =$$
$$= p^5\left[\begin{array}{l} 1+5p(1-p)\left(1+p+p^2-p^3-p^4-p^5+p^7\right)+ \\ +10p^3(1-p)^2\left(1+p+p^2-2p^4\right)+10p^6(1-p)^3 \end{array}\right] =$$
$$= p^5\left(1+5p+10p^3-20p^4-35p^7+75p^8-35p^9\right)$$

Вычислим вероятность поражения всех мишеней для биатлониста, у которого вероятность поражения мишени $p \approx 0.9$:

$P(+) \approx 0.976$.

Вариация 7. (на формулу полной вероятности). Определить вероятность того, что все патроны будут израсходованы.

Решение.

$A = \{\textit{использованы все патроны}\}$.

Биатлонист сначала пытается закрыть мишени 5-ю основными патронами, а затем при необходимости использует дополнительные. Ставим гипотезы относительно результатов основной стрельбы:

$H_i = \{i\ \textit{промахов основными патронами}\},\ i = 0,1,2,3,4,5$

В зависимости от результатов основной стрельбы биатлонист использует дополнительные патроны.

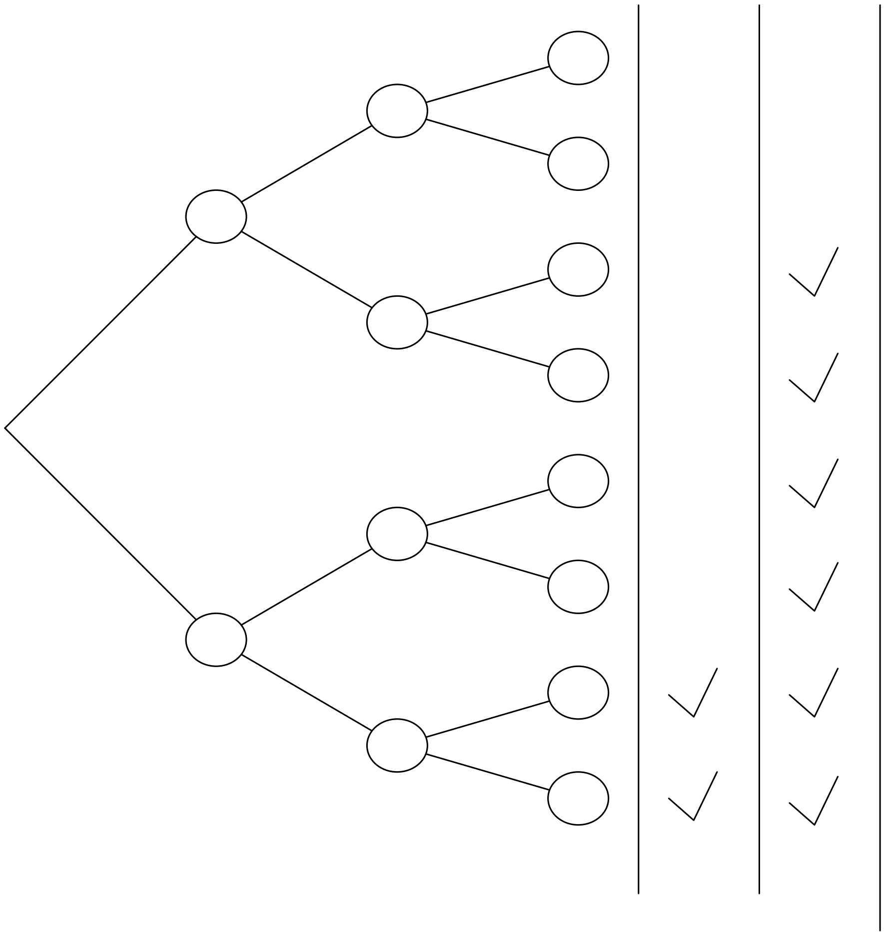
1) Если все 5 мишеней закрыты основными патронами, то дополнительные патроны не используются, то есть $P\left(A/H_0\right)=0$.

2) Если после основной стрельбы осталось больше 2-х незакрытых мишеней, то обязательно дополнительные патроны будут использованы полностью, то есть

$$P\left(A/H_3\right)=P\left(A/H_4\right)=P\left(A/H_5\right)=1.$$

3) Если остались одна или две незакрытые мишени, то количество необходимых дополнительных патронов зависит от качества стрельбы, которое считаем стабильным и независимым от предыдущих выстрелов и чистого бега на дистанции.

Рассмотрим возможные результаты стрельбы с 3-мя дополнительными патронами.



$$P\left(A/H_1\right)=q^3+q^2p=q^2\left(q+p\right)=q^2$$

$$P\left(A/H_2\right)=q^3+3q^2p+2qp^2=q^3+3q^2p+3qp^2+p^3-p^3-qp^2=$$
$$=\left(q+p\right)^3-\left(p^3+p^2q\right)=1-\left(p^3+p^2q\right)=1-p^2\left(p+q\right)=1-p^2=\left(1-p\right)\left(1+p\right)=q\left(1+p\right)$$

Теперь определим вероятности гипотез, то есть результаты основной стрельбы. Эту задачу можно решать графически или, используя формулу Бернулли:

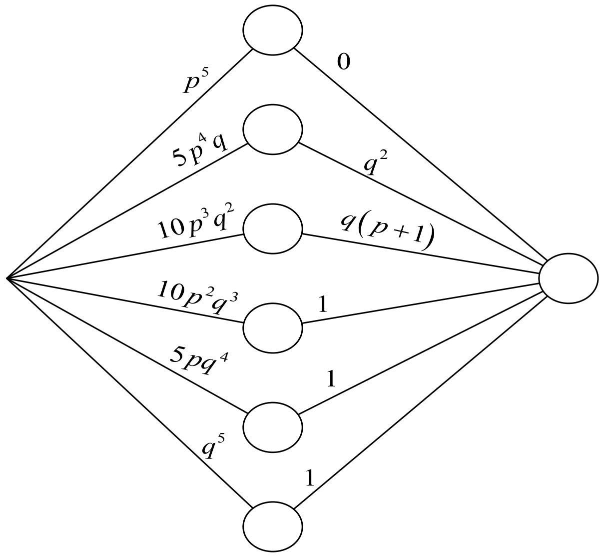
$P_5\left(0\ \textit{промахов}=5\ \textit{попаданий}\right)=C_5^5p^5q^0=p^5$; $P_5\left(1\ \textit{промах}\right)=C_5^4p^4q^1=5p^4q$;

$P_5\left(2\ \textit{промаха}\right)=C_5^3p^3q^2=10p^3q^2$; $P_5\left(3\ \textit{промаха}\right)=C_5^2p^2q^3=10p^2q^3$;

$P_5\left(4\ \textit{промаха}\right)=C_5^1p^1q^4=5pq^4$; $P_5\left(5\ \textit{промахов}\right)=C_5^0p^0q^5=q^5$

Составим полный вероятностный граф:

+
q
p

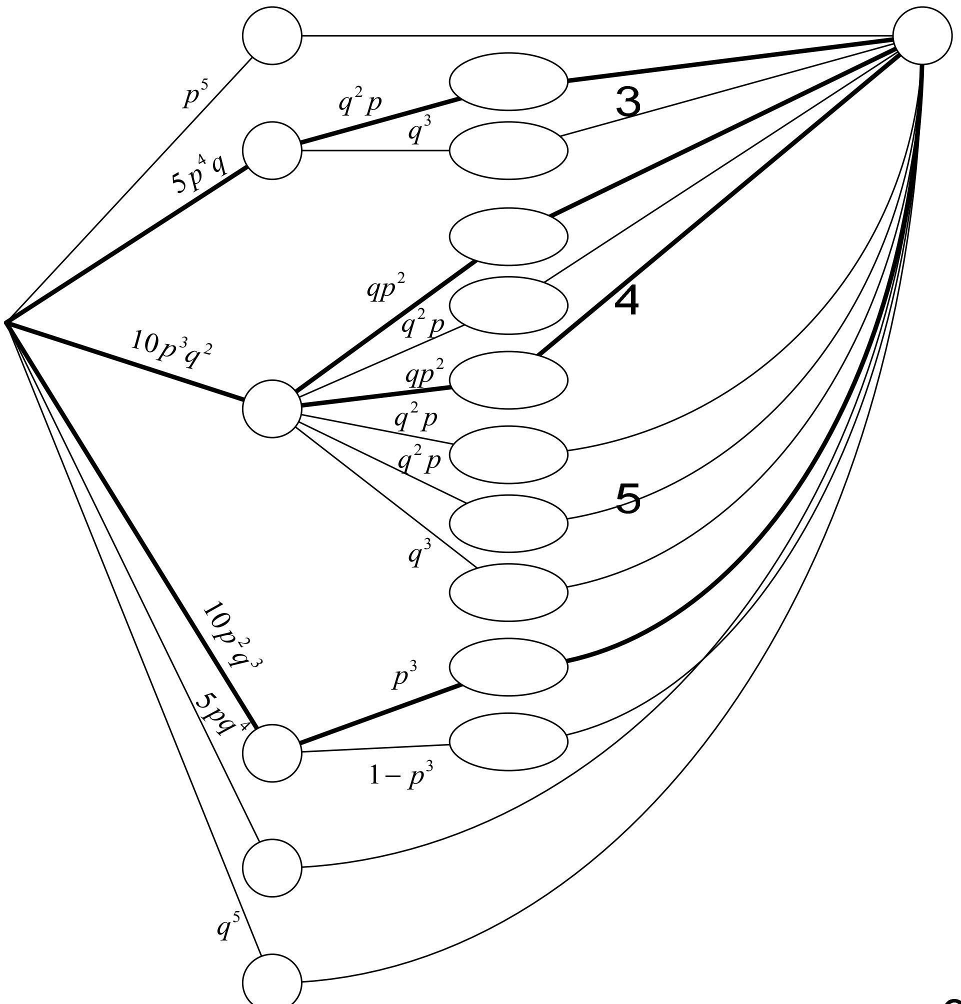


$$P(A)=5p^4q\cdot q^2+10p^3q^2\cdot q(p+1)+10p^2q^3\cdot 1+5pq^4\cdot 1+q^5\cdot 1=$$
$$=5p^4q^3+10p^4q^3+10p^3q^3+5pq^4+q^5=$$
$$=15p^4q^3+10p^3q^3+5pq^4+q^5=q^3\cdot\left(15p^4+10p^3+5pq+q^2\right)$$

Вариация 8. (на формулу Байеса). Определить вероятность того, что биатлонист, который закрыл все мишени, израсходовал все 8 патронов.

Решение.

Расширим граф, обозначив результаты использования дополнительных патронов. Выделим ветви графа, где с помощью дополнительных патронов биатлонист справился со стрельбой.



Вариация 9. (на цепи Маркова). Найти матрицу перехода из начальных состояний $E_i = \{i \text{ попаданий}\}\ (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ после стрельбы основными патронами в состояние E_j после стрельбы с использованием дополнительных патронов.

Решение.

Вектор $a = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, где $a_i = P(E_i)$ – вероятность появления состояния E_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ в начальном испытании, называется *вектором начальных вероятностей*. Используя формулу Бернулли, находим вектор начальных вероятностей:

$\vec{a}\left(q^5, 5pq^4, 10p^2q^3, 10p^3q^2, 5p^4q, p^5\right)$.

Построим матрицу перехода. Пусть биатлонист при использовании основных патронов закрыл все 5 мишеней (E_5). Значит, из этого состояния он может перейти только в состояние (E_5) с вероятностью 1, так как дополнительных патронов он не использует. Получили последнюю строку матрицы перехода.

Если биатлонист закрыл 4 мишени (E_4), то с использованием дополнительных патронов он может поразить оставшуюся мишень (E_5) или не поразить ее (E_4) с соответствующими вероятностями. Получили предпоследнюю строку матрицы.

Проведя аналогичные рассуждения, получим матрицу перехода:

$$P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q^3 & 3q^2p & 3qp^2 & p^3 & 0 & 0 \\ 0 & q^3 & 3q^2p & 3qp^2 & p^3 & 0 \\ 0 & 0 & q^3 & 3q^2p & 3qp^2 & p^3 \\ 0 & 0 & 0 & q^3 & 3q^2p & p^2+2qp \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^3 & p+qp+q^2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрица P обладает следующими свойствами:

а) $0 \le p_{ij} \le 1$;

б) $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1\ (i = 1, 2, \ldots, k)$;

Проверим второе свойство:

$$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3 = (q+p)^3 = 1$$

$$q^3 + \underline{3q^2p} + p^2 + \underline{2p^2q} = \underline{q^3} + 2qp(q+p) + \underline{q^2p} + p^2 =$$

$$= q^2(q+p) + 2qp + p^2 = q^2 + 2qp + p^2 = (p+q)^2 = 1$$

$$q^3 + p + qp + q^2p = q^2(q+p) + p + qp = q(q+p) + p = q + p = 1$$

Библиографический список:

1. Афанасьев, В. В. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособ. для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В. В. Афанасьев. – М. : Владос, 2007. – 350 с.
2. Афанасьев, В. В., Сивов, М. А. Десять вариаций одной вероятностной задачи [Текст] / В. В. Афанасьев, М. А. Сивов // Международная научная конференция «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство». – Плоцк, 2010. – С. 21.
3. Ушинский, К. Д. Человек как предмет воспитания [Текст] : собр. соч. в 8 т., гл. 23 / К. Д. Ушинский. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1950.