МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 517.9

А. Р. Абдуллаев, О. А. Неволина

Задача Коши для квазилинейного дифференциального уравнения нейтрального типа

Рассматривается дифференциальное уравнение вида $p(t)x'(t)+k(t)x'(h(t))=f(t,x(t),(Tx)(t))$. Для этого уравнения получены достаточные условия разрешимости задачи Коши без предположения однозначной разрешимости соответствующей линейной задачи. В работе приводятся необходимые вспомогательные утверждения об операторе внутренней суперпозиции.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа, задача Коши, теоремы существования, оператор внутренней суперпозиции.

A. R. Abdullaev, O. A. Nevolina

Cauchy's Problem for a Quasilinear Differential Equation of a Neutral Type

The differential equation of a kind $p(t)x'(t)+k(t)x'(h(t))=f(t,x(t),(Tx)(t))$ is considered. For this equation sufficient conditions of resolvability of Cauchy's Problem without the assumption of unequivocal resolvability of the corresponding linear problem are received. In the work necessary auxiliary statements about the operator of internal superposition are resulted.

Keywords: an equation of a neutral type, Cauchy's Problem, the existence theorems, the operator of internal superposition.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} p(t)x'(t)+k(t)x'(h(t))=f(t,x(t),(Tx)(t)) & (1)\\ x(a)=\alpha, & (2)\end{cases}$$

в предположениях: $p,k,h:[a,b]\to R^1$ – измеримые и ограниченные в существенном функции, функция $f:[a,b]\times R^2\to R^1$ удовлетворяет условиям Каратеодори, T – линейный оператор. Во избежание недоразумений, связанных с различными трактовками задачи Коши, для уравнения (1), всюду в работе предполагается выполненным условие $h([a,b])\subset[a,b]$. Специальный случай уравнения (1) – уравнение

$$x'(t)+k(t)x'(\alpha(t))=f(t,x(t),x(\alpha(t))),$$

где $\alpha,k:[0,1]\to R^1$ и $f:[0,1]\times R^2\to R^1$ – непрерывные функции, – возникает в квантовой механике [10].

В теории функционально-дифференциальных уравнений уравнение вида (1) принято называть «уравнением нейтрального типа» [3, 9]. Уравнения нейтрального типа образуют особый класс как по свойствам решений, так и по методам исследования. Это обусловлено и тем обстоятельством, что у уравнений нейтрального типа обнаруживаются парадоксальные свойства, не характерные для обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [4]. В частности, фундаментальная система решений соответствующего уравнению (1) однородного уравнения может быть бесконечномерной. Поэтому уравнение (1) и некоторые его обобщения представляют значительный интерес для специалистов.

В известных исследованиях краевых задач для уравнения вида (1) предполагается, что главная линейная часть [3, с. 16] уравнения (1) является обратимым оператором. Предлагаемая работа в основном посвящена ранее не исследованному случаю задачи (1), а именно, когда упомянутый линейный оператор не является обратимым.

Положим $E=[a,b]\subset R^1=(-\infty,\infty)$ и определим следующие банаховы функциональные пространства: L_p, $1<p<\infty$ – пространство функций $y:E\to R^1$, суммируемых в p-й степени (по Лебегу), с нормой $\|y\|=\left(\int_E |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$; D_p – пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:E\to R^1$, что $x'\in L_p$, с нормой $\|x\|_{D_p}=|x(a)|+\|x'\|$.

Под решением задачи $(1),(2)$ будем понимать такую функцию $x\in D_p$, которая почти всюду на E удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

Последующее содержание работы для удобства чтения разобьем на пункты.

П 1. В этом пункте приведем необходимые понятия из теории меры, сведения об операторе внутренней суперпозиции и докажем вспомогательные утверждения, которые потребуются в дальнейшем. Через $m(e)$ обозначим меру Лебега измеримого множества $e\subset R^1$ и сформулируем условия, которые всюду далее предполагаются выполненными.

a1) для каждого измеримого множества $e\subset E$ из равенства $m(e)=0$ следует $m(h^{-1}(e))=0$.

При выполнении этого условия функция множества $\mu(e)=m\left(h^{-1}(e)\right)$, определенная на σ–алгебре измеримых по Лебегу подмножеств E, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега [5, с. 234], и существует такая суммируемая функция $\mu'(\cdot)$, что

$$\mu(e)=\int_e \mu'(s)\,ds,\ e\subset E.$$

Функция $\mu'(\cdot)$ называется производной Радона – Никодима функции множества $\mu(e)$ и может быть определена также по формуле

$$\mu'(s)=\lim_{\substack{m(e)>0\\ m(e)\to 0}}\frac{\mu(e)}{m(e)},$$

где e – интервал, содержащий точку s.

a2) функция $g(t)=k(t)\left(\mu'(h(t))\right)^{1/p}$, $1<p<+\infty$, ограничена в существенном.

С учетом условия $h(E)\subset E$ оператор внутренней суперпозиции определим равенством

$$(Sy)(t)=k(t)y(h(t)) \qquad (3)$$

Условие *a2)* гарантирует ограниченность оператора $S:L_p\to L_p$ [6], причем $\|S\|=vrai\sup\limits_{t\in E}\left|k(t)(\mu'(h(t)))^{1/p}\right|$.

a3) из $m(e)=0$ следует, что $m\left(h(e)\right)=0$ и существует такая измеримая функция h^{-1}, что почти всюду выполняются равенства $h^{-1}\left(h(t)\right)=t$, $t\in E$ и $h(h^{-1}(\tau))=\tau$, $\tau\in h(E)$. Это условие обеспечивает измеримость образа $h(e)$ измеримого множества $e\subset E$ [7, с. 231] и, кроме того, позволяет рассматривать функцию множества $\lambda(e) = m(h(e))$, которая также оказывается мерой, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. При этом почти всюду на E справедливо равенство [1].

$$\lambda'(t)\mu'(h(t)) = 1, \qquad (4)$$

где $\lambda'(t)$ – производная Радона – Никодима функции множества $\lambda(e)$. В случае, если $h(t)$ является кусочно абсолютно непрерывной функцией, для определения производной Радона – Никодима перечисленных функций множеств можно воспользоваться равенством

$$\mu'(h(t)) = \left(h'(t)\right)^{-1},$$

справедливым почти для всех $t \in E$.

Всюду далее полагаем $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $T : L_p \to L_p$ – линейный ограниченный оператор и $L_p = \left(L_q\right)^*$.

Лемма 1 [8]. Оператор $S^* : L_q \to L_q, 1 < q < \infty$, сопряженный с оператором $S : L_p \to L_p$, имеет представление

$$\left(S^*\omega\right)(\tau) = \begin{cases} k\left(h^{-1}(\tau)\right)\mu'(\tau)\omega\left(h^{-1}(\tau)\right), \tau \in h(E) \\ 0, \quad \tau \notin h(E). \end{cases} \qquad (5)$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия:

1) $\underset{\tau \in h(E)}{vrai\inf}\ \mu'(\tau) = \mu_0 > 0$, 2) $\underset{t \in E}{vrai\inf}\ k(t) = k_0 > 0$. Тогда для оператора (5) $S^* : L_q \to L_q$ справедливо неравенство

$$\mu_0^{1/p} k_0 \|\omega\| \le \|S^*\omega\|, \ \omega \in L_q.$$

Доказательство. Для произвольного $\omega \in L_q$ рассмотрим

$$\|S^*\omega\|^q = \int_E \left|\left(S^*\omega\right)(\tau)\right|^q d\tau = \int_{h(E)} \left[\mu'(\tau)\left|\omega\left(h^{-1}(\tau)\right)k\left(h^{-1}(\tau)\right)\right|\right]^q d\tau.$$

Произведем в интеграле замену переменной и с учетом $h(E) \subset E$ и равенства (4) получим

$$\|S^*\omega\|^q = \int_E \left[\mu'(h(t))\right]^q \lambda'(t)\left|\omega(t)k(t)\right|^q dt = \int_E \left[\mu'(h(t))\right]^{q/p} \left|\omega(t)k(t)\right|^q dt.$$

В силу условий леммы получим неравенство

$$\|S^*\omega\|^q \ \ge \ \mu_0^{q/p} k_0^q \|\omega\|^q.$$

Лемма доказана.

П 2. В этом пункте для получения условий разрешимости задачи (1), (2) приведем теорему существования для квазилинейного операторного уравнения и вспомогательные утверждения, необходимые для проверки условий этой теоремы. Рассмотрим уравнение

$$Lu = Fu \qquad (6)$$

с линейным ограниченным оператором $L : X \to Y$ и вполне непрерывным оператором $F : X \to Y$. Здесь X, Y – действительные банаховы пространства. Через $L^* : Y^* \to X^*$ обозначим сопряженный с $L : X \to Y$ оператор. Следующее утверждение, доказанное в работе [2], приведем в удобной редакции.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) существует $q > 0$ такая, что неравенство $q\|\omega\| \le \|L^*\omega\|$ выполнено для всех $\omega \in Y^*$;

2) оператор $F : X \to Y$ вполне непрерывен и существуют константы $c, d \geq 0$ такие, что $\|Fu\| \leq c + d\|u\|$ для всех $u \in X$;

3) $d < q$. Тогда уравнение (6) имеет хотя бы одно решение.

Будем предполагать $\alpha \in R^1$ произвольно фиксированным, и пусть $x'(t) = y(t)$. Определим оператор $V : L_p \to L_p$ равенством $(Vy)(t) = \alpha + \int\limits_a^t y(s)ds$, а также: оператор умножения $M : L_p \to L_p$: $(My)(t) = p(t)y(t)$; оператор Немыцкого $N : L_p \times L_p \to L_p : (N(u,v))(t) = f(t,u(t),v(t))$, порождаемый функцией $f : E \times R^2 \to R^1$.

Теперь задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению вида (6)

$$My + Sy = N(Vy, TVy), \qquad (7)$$

где $Ly = My + Sy$, $Fy = N(Vy, TVy)$, $L, F : L_p \to L_p$, $T : L_p \to L_p$ – линейный ограниченный оператор.

Положим $p_0 = vrai \inf\limits_{t \in E} |p(t)|$, $p_1 = vrai \sup\limits_{t \in E} |p(t)|$.

Лемма 3. Если $\|S\| < p_0$, то $(p_0 - \|S\|)\|\omega\| \leq \|L^*\omega\|$.

Если же $p_1 < \mu_0^{1/p} k_0$, то $\left(\mu_0^{1/p} k_0 - p_1\right)\|\omega\| \leq \|L^*\omega\|$.

Доказательство. Если $p_0 > 0$, то оператор $M : L_p \to L_p$ обратим и $\|M^{-1}\|^{-1} = \left\|(M^*)^{-1}\right\|^{-1} \geq p_0$. Поэтому

$$\|L^*\omega\| \geq \|M^*\omega\| - \|S^*\omega\| \geq \left(\left\|(M^*)^{-1}\right\|^{-1} - \|S\|\right)\|\omega\| \geq (p_0 - \|S\|)\|\omega\|.$$

Этим неравенством установлена справедливость первого утверждения леммы. Для доказательства второго утверждения воспользуемся леммой 2. Имеем

$$\|L^*\omega\| \geq \|S^*\omega\| - \|M^*\omega\| \geq \left(\mu_0^{1/p} k_0 - \|M^*\|\right)\|\omega\| \geq \left(\mu_0^{1/p} k_0 - p_1\right)\|\omega\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть выполнено неравенство

$$|f(t,u,v)| \leq A + B|u| + C|v|$$

при $u, v \in R^1$ и почти всюду $t \in E$. Тогда оператор $F : L_p \to L_p$, $Fy = N(Vy, TVy)$, удовлетворяет неравенству

$$\|Fy\| \leq A_1 + B_1\|y\|,$$

где $A_1 = (b-a)^{1/p}(A + B|\alpha| + C|\alpha|\|T\|)$, $B_1 = (b-a)(B + C\|T\|)$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что для оператора $V : L_p \to L_p$ справедливо неравенство $\|Vy\| \leq |\alpha|(b-a)^{1/p} + (b-a)\|y\|$. Для произвольного $y \in L_p$ имеем

$$|(Fy)(t)| \leq A + B|(Vy)(t)| + C|(TVy)(t)|.$$

Отсюда, с учетом свойств нормы пространства L_p, получим

$$\|Fy\| \leq A(b-a)^{1/p} + B\left((b-a)^{1/p}|\alpha| + (b-a)\|y\|\right) + C\left((b-a)^{1/p}|\alpha|\|T\| + (b-a)\|T\|\|y\|\right) =$$
$$= (b-a)^{1/p}(A + B|\alpha| + C|\alpha|\|T\|) + (b-a)(B + C\|T\|)\|y\|.$$

Лемма доказана.

П 3. В этом пункте на основе ранее установленных вспомогательных утверждений докажем теорему существования решения задачи $(1),(2)$. Для этого воспользуемся операторным представлением (7) задачи $(1),(2)$ при произвольно фиксированном $\alpha \in R^1$. Если существует решение $y \in L_p$ уравнения (7), то очевидно функция $x(t) = \alpha + \int_a^t y(s)\,ds$ будет решением задачи $(1),(2)$. Поэтому достаточно доказать разрешимость уравнения (7). К этому уравнению будем применять теорему 1. Для удобства сравнения достаточные признаки существования условия существования хотя бы одного решения задачи $(1),(2)$ сформулируем в виде двух утверждений.

Теорема 2. Пусть:

1) выполнено неравенство $|f(t,u,v)| \le A + B|u| + C|v|$ при $u, v \in R^1$, и почти всюду $t \in E$;

2) справедливо условие $\|S\| + (b-a)(B + C\|T\|) < p_0$.

Тогда задача (1), (2) для произвольного $\alpha \in R^1$ имеет хотя бы одно решение.

Теорема 3. Пусть:

1) выполнено неравенство $|f(t,u,v)| \le A + B|u| + C|v|$ при $u, v \in R^1$ и почти всюду $t \in E$;

2) справедливо условие $p_1 + (b-a)(B + C\|T\|) < \mu_0^{1/p} k_0$.

Тогда задача (1), (2) для произвольного $\alpha \in R^1$ имеет хотя бы одно решение.

Доказательство теорем 2 и 3 проведем по единой схеме. Условие 1) теорем 2 и 3 гарантирует вполне непрерывность оператора $Fy = N(Vy, TVy)$. Выполнение условия 1) теоремы 1 очевидно. Кроме того, имеем соответственно:

$q = p_0 - \|S\| > d = B_1 = (b-a)(B + C\|T\|)$ в теореме 2;

$q = \mu_0^{1/p} k_0 - p_1 > d = B_1 = (b-a)(B + C\|T\|)$ в теореме 3.

Следовательно, выполнено и условие 3) теоремы 1. Таким образом, существует хотя бы одно решение операторного уравнения (7), а следовательно, и задачи Коши (1), (2).

Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 2 оператор $Ly = My + Sy$ является обратимым и утверждение этой теоремы можно получить с применением стандартных схем, основанных на теоремах о неподвижных точках. Принципиальное отличие теоремы 3 состоит в том, что при выполнении условий этой теоремы соответствующая задаче (1), (2) линейная задача

$$p(t)y(t) + k(t)y(h(t)) = f(t), \; x(a) = \alpha,$$

вообще говоря, не является однозначно разрешимой. Так, например, для уравнения $y(t) - ky\left(t/2\right) = 0$ имеем $d = 0$, $q = |k|\sqrt{2} - 1$, то есть выполняется условие 2) теоремы 3. Тем не менее это уравнение имеет ненулевое решение.

Отметим, что полученные результаты остаются справедливыми в случае краевой задачи для уравнения с линейным ограниченным функционалом $l : D_p \to R^1$, при выполнении условия $l(1) \ne 0$.

Библиографический список

1. Абдуллаев, А. Р. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций [Текст] / А. Р. Абдуллаев. – М. : Изд-во ВИНИТИ, 1981. – № 981-81Деп. – 20 с.

2. Абдуллаев, А. Р., Бурмистрова, А. Б. Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач [Текст] / А. Р. Абдуллаев, А. Б. Бурмистрова // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №11. – С. 14–22.

3. Азбелев, Н. В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. – М. : Наука, 1982. – 280 с.

4. Ахмеров, А. А. Теория уравнений нейтрального типа [Текст] / А. А. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. – 1982. – Т. 19. – С. 55–126.

5. Данфорд, Н., Шварц, Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория [Текст] / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1972. – 895 с.

6. Драхлин, М. Е. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций [Текст] / М. Е. Драхлин // Известия вузов. Математика. – 1986. – № 5. – С. 17–24.

7. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной [Текст] / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

8. Плехова, Э. В. О коэффициенте сюръективности одного класса операторов [Текст] / Э. В. Плехова, О. А. Неволина, О. В. Фукалова // Изв. научно-образовательного центра «Математика» : сб. научных трудов. – 2006. – Вып. 3. – С. 62–71.

9. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Хейл. – М. : Мир, 1984. – 422 с.

10. Furi, M. Contributions to the spectral theory for nonlinear operators in Banach spases [Текст] / M. Furi, M. Martelli, A. Vignoli // Ann. Mat. pura ed appl. – 1978. – No 118. – P. 229–294.