УДК 512.54

Г. В. Пастухова

Об одной проблеме из Коуровской тетради

Работа посвящена теории конечной группы. Мы решили проблему Ши Виджи из тетради Коурова (сборник группы нерешенных задач) о классе спорадических групп после примера группы J1.

Ключевые слова: конечные простые спорадические группы, Коуровская тетрадь.

G. V. Pastukhova

About One Problem from Kourov's Writing-Book

The work is devoted to the finite group theory. We have resolved the problem of Shi Vidgi from Kourov's writing-book (a collection of non-resolved group problems) about the class of sporadic groups after the example of group J_1.

Keywords: final simple sporadic groups, Kourov's writing-book.

Рассмотрим проблему Ши Вуджи, которую озвучил А. С. Кондратьев в 12-ом издании Коуровской тетради (вопрос 12.39) [3]:

Верно ли, что конечная группа и конечная простая группа изоморфны, если у них один и тот же порядок и одно и то же множество порядков элементов?

Если H конечная группа, то через *Or(H)* обозначим множество порядков элементов группы H. Доказана следующая теорема.

Теорема: Пусть G такая конечная группа, что $|G|=|J_1|$ и множества порядков элементов G и J_1 совпадают. Тогда $G \cong J_1$.

Для доказательства воспользуемся теоремой о строении группы порядка pq, где p и q – простые числа [2, с. 101–103]. Также необходимы теоремы Силова и лемма Фраттини. Общая идея такова: имея четкий список порядков элементов, используя метод от противного и вышеуказанные теоремы, перебрать все возможные варианты нормальной подгруппы данной группы.

Доказательство. Возьмем группу J_1, напомним, что это первая группа Янко, одна из спорадических групп и ее порядок $|J_1|=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 19$. Имеем $Or(J_1)=\{1,2,3,5,6,7,10,11,15,19\}$ [1]. Допустим, что G – непростая группа и N – минимальная нормальная подгруппа G. Тогда возможны два случая.

Случай 1. $N = Z_p\times Z_p\times\ldots\times Z_p$. Так как $|G|$ делится только на первые степени нечетных простых чисел, то при p – нечетном $N \cong Z_p$ и $|N|=p$.

Случай 1.1 Пусть $|N| = 19$ и $N = P$ – силовская 19-подгруппа. Так как P нормальна в G, то для любой силовской q-подгруппы Q имеем $QP = PQ$, и тогда QP – подгруппа порядка $19q$. При $q = 5$ получаем, что $|QP| = 95$, и так как 5 не делит 19-1=18, то по теореме о строении группы порядка pq имеем, что $QP = <a>$ – циклическая порядка 95 и в G существует элемент порядка 95, что невозможно по условию.

Случай 1.2 Пусть $|N| = 11$ и $N = P$ – силовская 11-подгруппа. Так как P нормальна в G, то для любой силовской q-подгруппы Q имеем $QP=PQ$, и тогда QP – подгруппа порядка $11q$. При $q = 3$ получаем, что $|QP| = 33$, и так как 3 не делит 11-1= 10, то $QP=<a>$ – циклическая порядка 33 и в G существует элемент порядка 33, что невозможно по условию.

Случай 1.3 Пусть $|N| = 7$ и $N = P$ – силовская 7-подгруппа. Так как P нормальна в G, то для любой силовской q-подгруппы Q имеем $QP=PQ$, и тогда QP – подгруппа порядка $7q$. При $q = 5$ получаем что $|QP| =35$ и, рассуждая аналогично, получаем, что в G существует элемент порядка 35, что невозможно по условию.

Случай 1.4 Пусть $|N|$=5 и $N = P$ – силовская 5-подгруппа. Так как P нормальна в G, то для любой силовской q-подгруппы Q имеем $QP=PQ,$ и тогда QP-подгруппа порядка $5q$. При $q = 3$ получаем, что $|QP|$ =15 и в G существует элемент порядка 15, что невозможно по условию.

Случай 1.5 Пусть $|N|$=3 и $N = P$ – силовская 3-подгруппа. Так как P нормальна в G, то для любой силовской q-подгруппы Q имеем $QP=PQ,$ и тогда QP – подгруппа порядка $3q$. При $q = 5$ получаем, что $|QP|$ =15 и в G существует элемент порядка 15, что невозможно по условию.

Случай 1.6 Пусть $|N|$=2. Тогда для $t \in N\backslash\{e\}$ и любого $x \in G$ $x^{-1}tx= t$ получаем $xt=tx$. Тогда для элемента x 7-порядка имеем $o(xt) = o(x)o(t) = 2 \cdot 7 = 14$, что невозможно по условию.

Случай 1.7 Пусть $|N|=2 \cdot 2$, то есть $N \cong Z_2 \times Z_2$. Тогда рассмотрим полупрямое произведение N и S_{19}. Существует $x \in S_{19}$ такой, что $xt = tx$, для $t \in N\backslash\{e\}$. В противном случае S_{19} разбивает $N\backslash\{e\}$ на орбиты длины 19 и 19 делит 22-1, что невозможно, тогда $xt = tx$ и $o(xt) = o(x) \cdot o(t) = 2 \cdot 19$ =38, что невозможно по условию.

Случай 1.8 Пусть $|N|=2 \cdot 2 \cdot 2$ и $N=P \times P \times P$ – силовская подгруппа порядка 2^3. Рассмотрим подгруппу $U=NQ$ порядка $2^3 \cdot 19$. Такая подгруппа существует, так как N – минимальная нормальная подгруппа **G** и $NQ=QN$ для любой $Q \leq G$. Пусть $x \in O\backslash\{e\}$, тогда существует $t \in N\backslash\{e\}$, что $xt = tx$. В противном случае 19 делит 2^3-1, а это невозможно. Тогда $o(xt) = o(x) \cdot o(t) = 19 \cdot 2$=38 и в G существует элемент порядка 38, что опять же невозможно по условию.

Случай 2. N есть прямое произведение простых неабелевых групп.

Заметим, что N – простая группа. Действительно, в противном случае, если N – прямое произведение нескольких, скажем, k простых неабелевых групп, то в силу того, что $|A|$ делит $|N|$, в свою очередь, $|N|$ делит $|J_1|$, получаем $|A|$ делит $|J_1|$, но $|A|$ не делит $|J_1|$. Значит, N – простая группа. Рассмотрим все возможные случаи, которые вытекают из того, что порядок простой группы N должен делить $|J_1|$. А именно, из списка простых неабелевых групп, порядки которых не превосходят $|J_1|$, выбираем те, порядки которых делят $|J_1|$. Этот список можно найти в [1, с. 146].

Случай 2.1. $\mathrm{N} \cong \mathrm{A}_5$, где $|\mathrm{A}_5| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Применим лемму Фраттини. Пусть $P \in Syl5(N),$ $N \cong A_5$. По лемме Фраттини $G=A_5 \cdot N_G(P)$. С одной стороны, 19 делит $|G|$, с другой стороны, 19 не делит $|A_5|$. Следовательно, 19 делит $|N_G(P)|$ и в $N_G(P)$ существует подгруппа порядка 19. В $N_G(P)$ P – нормальная группа, и если Q суть 19-подгруппа группы $N_G(P)$, то $PQ = Q \times P$ – циклическая подгруппа порядка $19 \cdot 5$=95 и в G существует элемент порядка 95, что невозможно по условию.

Случай 2.2. $N \cong L_2(7)$, где $|L_2(7)|=2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Снова применим лемму Фраттини. Пусть $P \in Syl_7(N),$ $N \cong L_2(7)$. По лемме Фраттини $G=N \cdot N_G(P)$. С одной стороны, 19 делит $|G|$, с другой стороны, 19 не делит $|N|$. Следовательно, 19 делит $|N_G(P)|$ и в $N_G(P)$существует подгруппа порядка 19. В $N_G(P)$ P – нормальная группа, и если Q есть 19-подгруппа группы $N_G(P)$, то $PQ=Q \times P$ – циклическая подгруппа порядка $19 \cdot 7$=133 и в G существует элемент порядка 133, что невозможно по условию.

Случай 2.3. $N \cong L_2(11)$, где $|L_2(7)|=2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Снова применим лемму Фраттини. Пусть $P \in Syl_{11}(N),$ $N \cong L_2(11)$. Как и выше, получаем, что в G существует элемент порядка $209 = 11 \cdot 19$, что невозможно по условию.

Таким образом, G – простая группа. Далее снова из теоремы о классификации конечных простых групп [1, с. 146] вытекает, что $G = J_1,$ так как среди простых неабелевых групп только J_1 имеет порядок $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$, то теорема доказана.

Библиографический список

1. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию [Текст] / Д. Горенстейн. – М. : Мир, 1985 г. – 352 с.

2. Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И. Основы теории групп [Текст] / М. И. Каргаполов, Ю. И. мерзляков. – М. : Наука, 1982 г. – 288 с.

3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп [Текст]. – Новосибирск : Институт математики СО АИ СССР, 1998 г. – 75 с.