УДК 514.112

Х. Д. Нурлигареев

Полуправильные многоугольники на правильных паркетах

В настоящей статье дано описание полуправильных (равносторонних и равноугольных) многоугольников, которые могут быть расположены на каждом из 11 правильных паркетов. Приведены основные идеи и ключевые моменты доказательств, также статья снабжена большим количеством иллюстраций.

Ключевые слова: правильный паркет, равноугольный многоугольник, равносторонний многоугольник, расположенный на паркете многоугольник, решетка, Болл.

Kh. D. Nurligareev

Semiregular Polygons on Regular Parquets

In the present article the description of semiregular (equilateral and equiangular) polygons which can be located on each of 11 regular parquets is given. The basic ideas and key moments of the proof are resulted. Also the article is supplied with a great number of illustrations.

Keywords: regular parquet, an equiangular polygon, an equilateral polygon, polygon located on the parquet, lattice, Boll.

Введение

Одна из известных теорем дискретной геометрии гласит: если правильный многоугольник можно расположить на целочисленной решетке так, чтобы вершины многоугольника лежали в узлах решетки, то это квадрат [5], [7], [6]. Интереснее дело обстоит с полуправильными (равноугольными и равносторонними) многоугольниками. Во второй половине двадцатого века Д. Боллом было показано, что равноугольный многоугольник с вершинами в целых точках обязан быть четырехугольником или восьмиугольником [4]. Что касается равносторонних многоугольников на решетке Z^2, то можно предъявить такие многоугольники с любым наперед заданным четным числом сторон.

Множество узлов целочисленной решетки на плоскости можно рассматривать так же, как множество узлов квадратного паркета. Этот паркет является одним из одиннадцати правильных паркетов, то есть замощений плоскости правильными многоугольниками без пробелов и наложений, при которых любые два многоугольника либо не пересекаются, либо пересекаются по вершине или ребру и для которых все узлы замощения эквивалентны. В 2001 году десятиклассники И. Седошкин и Е. Мычка, продолжая тему, впервые рассмотренную на одном из геометрических кружков, которым руководил А. Н. Колмогоров, показали, что на каждом из правильных паркетов можно расположить только такие правильные многоугольники, которые «видны невооруженным глазом» (то есть базисные плитки и их простейшие комбинации).

В настоящей статье будет рассматриваться обобщение этой проблемы, а именно, вопрос о расположении на правильных паркетах различных полуправильных многоугольников. Полный ответ на него был получен автором в начале 2011 года и заключается в следующем. Если равноугольный многоугольник лежит на каком-либо из паркетов, то количество его сторон может быть равным 3, 4, 6, 8, 12, 16 или 24 (но ни для какого паркета не достигаются все эти значения). Равносторонний же многоугольник с любым наперед заданным числом сторон можно предъявить для каждого из паркетов, кроме квадратного и усеченного квадратного, для которых дополнительно необходимо потребовать выполнения условия четности числа сторон.

Определения и постановка задачи

Паркетом называется любое покрытие плоскости правильными многоугольниками без пробе-

© Нурлигареев Х. Д., 2011

лов и наложений, при котором любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не пересекаются вовсе. Правильные многоугольники, составляющие паркет, мы будем называть базисными плитками паркета, а их вершины — узлами паркета.

Для каждого узла определим его тип как порядок, в котором базисные плитки паркета встречаются при обходе данного узла против часовой стрелки. Так, например, в квадратном паркете в каждом узле сходятся четыре квадрата, что означает, что тип узла этого паркета есть 4, 4, 4, 4. Обычно используется сокращенный вариант записи – (4)4.

Будем говорить, что паркет правильный, если его можно наложить самого на себя так, чтобы любая заданная вершина совместилась с другой произвольной наперед заданной вершиной. Очевидно, что все вершины правильного паркета имеют одинаковый тип. Он называется типом правильного паркета.

Существует ровно 11 различных типов правильных паркетов [3], [2]. Три из них составлены из базисных плиток одного типа: (4)4; (6)3 и (3)6. Еще шесть включают в себя по два типа разных базисных плиток: 4, 8, 8; 3, 12, 12; 3, 6, 3, 6; (4) 3, 6; (3)3, (2)4; (2)3, 4, 3, 4. Наконец, последние два правильных паркета состоят из базисных плиток целых трех различных типов: 3, 4, 6, 4 и 4, 6, 12.

Далее, мы будем иметь дело с двумя классами полуправильных многоугольников: равносторонними и равноугольными. Уточним, что многоугольник называется равносторонним, если все его стороны равны между собой, и равноугольным, если равны все его углы. И, наконец, важнейшее определение, связывающее между собой понятия паркета и произвольного многоугольника. Будем говорить, что многоугольник F лежит на паркете T, если каждая вершина многоугольника F является узлом паркета T.

Теперь мы готовы сформулировать основной вопрос. Именно, какие полуправильные многоугольники могут быть расположены на каждом из правильных паркетов? Естественным образом, этот вопрос распадается на две части:

- Какие равносторонние многоугольники можно расположить на каждом из правильных паркетов?
- Какие равноугольные многоугольники можно расположить на каждом из правильных паркетов?

Результаты авторских исследований

Ответ на поставленный выше вопрос можно оформить в виде следующих теорем.

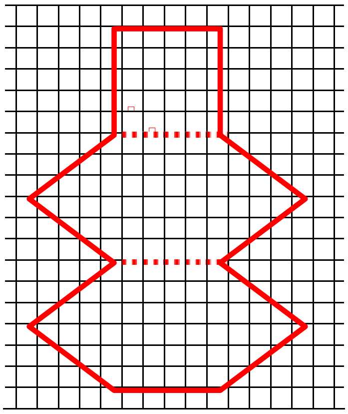
Теорема 1. На паркетах (4)4 и 4, 8, 8 равносторонний многоугольник может лежать тогда и только тогда, когда количество его сторон четно. На каждом из остальных паркетов можно расположить равносторонний многоугольник с произвольным числом сторон.

Следствие. На решетке Z^3 можно расположить равносторонний многоугольник с произвольным числом сторон.

Теорема 2. На каждом из паркетов можно расположить равноугольный n-угольник тогда и только тогда, когда n принимает одно из значений, указанных в нижеследующей таблице:

Тип паркета	(4)4	4, 8, 8	(3)3, (2)4	(6)3 (3)6 3, 6, 3, 6	3, 12, 12 (2)3, 4, 3, 4 3, 4, 6, 4
Число n	4, 8	4, 8, 16	3, 4, 6, 8	3, 4, 6, 12	3, 4, 6, 8, 12, 24

Доказательство теоремы 1 не представляет большой трудности. Возможность расположения соответствующих равносторонних многоугольников на паркетах (4)4; 4, 8, 8; (2)3, 4, 3, 4 и (6)3 доказывается конструктивно. Фактически мы указываем лежащие на этих паркетах базовые многоугольники, а потом предъявляем процедуру, которая позволяет нам на их основе построить равносторонний многоугольник с нужным числом сторон. Так, на рис. 1 показано, как при помощи квадрата и шестиугольника разместить на паркете (4)4 равносторонний двенадцатиугольник. Для каждого из остальных паркетов указывается подмножество узлов, являющееся одновременно множеством узлов паркета (6)3.



Невозможность расположения равносторонних многоугольников с нечетным числом сторон на паркетах (4)4 и 4, 8, 8 доказывается простейшими методами теории чисел. Предполагая противное и рассматривая координаты векторов сторон, мы составляем систему уравнений на них, после чего доказываем, что она не может иметь целочисленных решений.

Доказательство теоремы 2 основывается на свойствах тангенсов углов вида $\frac{2\pi}{n}$. В самом деле, если при некотором натуральном n на каком-либо из паркетов можно расположить равноугольный n-угольник, то на этом паркете лежат его внутренние и внешние углы, а последние равны в точности $\frac{2\pi}{n}$. С другой стороны, если координаты точек A, B и C равны (0, 0), (a, b) и (c, d) соответственно, то тангенс угла ∠BAC выражается формулой

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \frac{ad - bc}{ac + bd}.$$

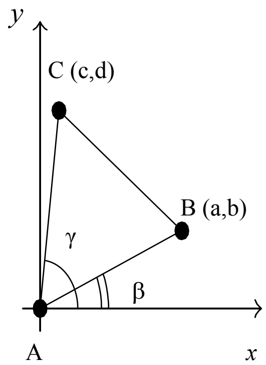


Рис. 2

Выбором подходящей системы координат можно добиться того, чтобы координаты узлов каждого из паркетов принадлежали одному из следующих четырех множеств: $\{p \mid p \in Q\}$, $\{q\sqrt{3} \mid q \in Q\}$, $\{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in Q\}$, и $\{p + q\sqrt{3} \mid p, q \in Q\}$. Для каждого из них указывается, какие значения может принимать натуральное число n, если tg(2π/n) принадлежит этому множеству или не существует:

Вид	p	$q\sqrt{3}$	$p+q\sqrt{2}$	$p+q\sqrt{3}$
n	1, 2, 4, 8	1, 2, 3, 4, 6, 12	1, 2, 4, 8, 16	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

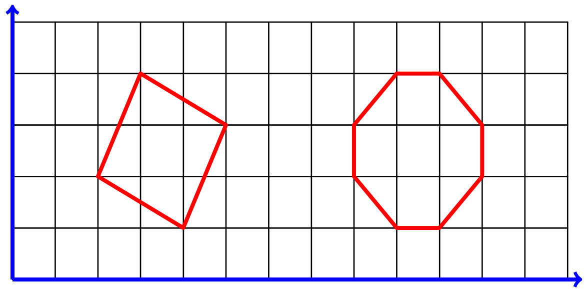
Таким образом, почти для всех паркетов после проведенного исследования тангенсов углов вида $\frac{2\pi}{n}$ остается привести примеры соответствующих равноугольных многоугольников. Исключение составляет паркет (2)3, 4, 3, 4. Выясняется, что на нем, помимо прочего, нельзя расположить ни один равноугольный 12-угольник и 24-угольник, хотя на первый взгляд это ничему не противоречит. Доказательство этого факта рутинно и базируется на перечислении всех возможных расположений углов $\frac{2\pi}{12}$ и $\frac{2\pi}{24}$ на паркете (2)3, 4, 3, 4.

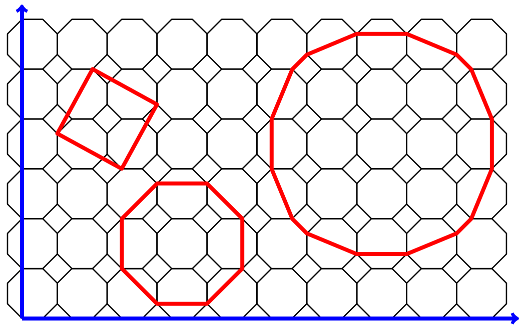
В заключение отметим пару смежных с рассмотренными вопросов, которые на текущий момент остаются открытыми.

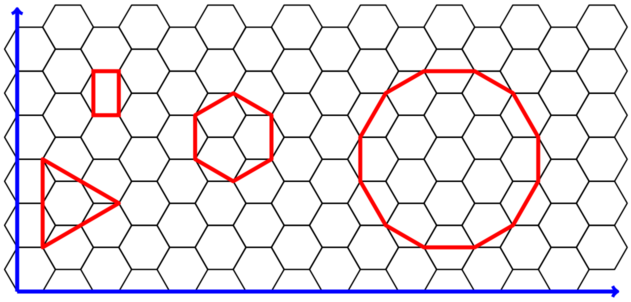
• Для каких натуральных n на решетке Z^3 можно расположить замкнутую равноугольную ломаную из n звеньев?

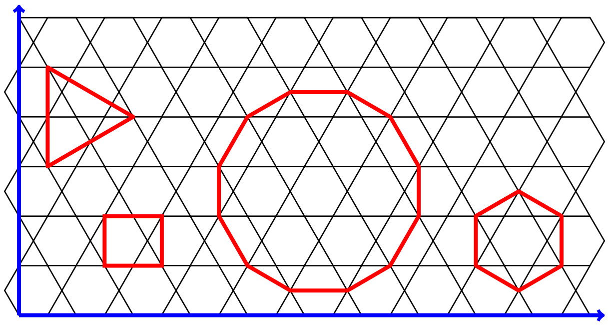
• Какие полуправильные многоугольники можно расположить на плоскости так, чтобы все их вершины имели координаты из Q(α) (здесь α – алгебраическое число)?

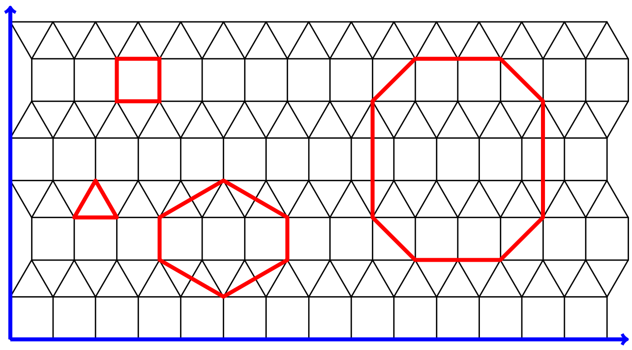
Автор весьма признателен В. В. Вавилову, во многом благодаря которому появление этой работы стало возможным, а также Е. Поршневу, высказавшему ряд ценных замечаний, заметно упростивших изложение.











Библиографический список

1. Вавилов, В. В., Устинов, А. В. Многоугольники на решетках [Текст] / В. В. Вавилов, А. В. Устинов. — М. : МЦНМО, 2006.

2. Колмогоров, А. Н. Паркеты из правильных многоугольников [Текст] / А. Н. Колмогоров // Квант. – 1986. – №8. – С. 3–7.

3. Михайлов, О. Одиннадцать правильных паркетов [Текст] / О. Михайлов // Квант. – 1972. – № 2. – С. 9–14.

4. Ball D.G., The constructibility of regular and equilateral polygons on square pinboard, — Math. Gaz., V.57, P.119–122, 1973.

5. Lucas E., Theoreme sur la geometrie des quinconces, — Bull. Soc. Math.France, V.6, P.9–10, 1878.