УДК 524.8

**В. Г. Кречет, Д. В. Садовников, М. В. Левкоева**

## Пятимерная геометрическая скалярно-электро-вакуумная задача

Рассматривается электро-вакуумная задача с геометрическим скалярным полем в рамках пятимерной теории гравитации и электромагнетизма. Получены соответствующие точные сферически-симметричные решения пятимерных вакуумных уравнений Эйнштейна, определяющих физические поля в данной задаче. Среди них есть решения, описывающие геометрию «кротовых нор».

**Ключевые слова:** гравитация, пятимерная теория, электромагнетизм, «кротовые норы».

**V. G. Krechet, D. V. Sadovnikov, M. V. Levkoeva**

## A Five-Measured Geometrical Scalar-Electro-Vacuum Problem

The electro-vacuum problem with a geometrical scalar field within the limits of the five-measured gravitation theory and electromagnetism is considered. Are received corresponding exact spherical-symmetric solutions of the five-measured vacuum equations of Einstein defining physical fields in the given problem. Among them there are the solutions describing geometry of «mole holes».

**Keywords** gravitation, a five-measured theory, electromagnetism, “mole holes”.

В рамках пятимерной геометрической теории гравитации электромагнетизма Калуцы [1] рассматривается стационарная скалярная электро-вакуумная задача при учете геометрического скалярного поля $G_{44}(x)$ в пространстве со сферической симметрией, описываемом пятимерной метрикой вида

$$dI^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dx^2 + e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + e^{\alpha}(dx^4)^2 + 2e^{\beta} dt\, dx^4, \quad (1)$$

где все метрические коэффициенты являются функциями от $x$, при этом коэффициент $G_{44}(x) = e^{\alpha}$ соответствует скалярному полю геометрического происхождения, $e^{\beta}$ пропорционален электромагнитному потенциалу $\phi_{,e}$.

Метрика эффективного пространственно-временного сечения [1] при этом будет иметь вид

$$ds^2 = -e^{\nu}_{эфф} dt^2 + e^{\lambda} dx^2 + e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \quad (2)$$

где

$$e^{\nu}_{эфф} = \Delta e^{-\alpha}, \quad \Delta = e^{\alpha+\nu} + e^{2\beta}. \quad (3)$$

В общем случае в качестве гравитационного лагранжиана $L_g$ в теории Калуцы выбирается пятимерная скалярная кривизна ${}^5R(G_{AB})$:

$$L_g = {}^5R(G_{AB})\sqrt{-G}, \quad (4)$$

где $G_{AB}$ – метрические коэффициенты общей пятимерной метрики, $G$ – определитель матрицы метрических коэффициентов.

В рассматриваемом случае пятимерный гравитационный лагранжиан данной вакуумной модели с метрикой (1) за вычетом дивергентного члена принимает вид

$$L = \left( \frac{\Delta'\mu'}{\Delta} + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{\alpha'\nu' e^{\alpha+\nu} + \beta'^2 e^{2\beta}}{2\Delta} + 2e^{\lambda-\mu} \right) \sqrt{\Delta}\, e^{\mu - \frac{\lambda}{2}}. \quad (5)$$

После варьирования данного лагранжиана (5) по метрическим коэффициентам получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta'\mu'}{\Delta}+\dfrac{\mu'^2}{2}+\dfrac{\alpha'\nu'e^{\alpha+\nu}+\beta'^2e^{2\beta}}{2\Delta}-2e^{\lambda-\mu}=0; \\ \dfrac{\Delta''}{\Delta}-\dfrac{\Delta'^2}{2\Delta^2}+\mu''+\mu'^2+\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta'\mu'}{\Delta}-\dfrac{\Delta'\lambda'}{2\Delta}-\dfrac{\mu'\lambda'}{2}-2e^{\lambda-\mu}=0; \\ 2\mu''+\alpha''+\mu'^2+\alpha'^2+\alpha'\mu'-\mu'\lambda'-\dfrac{\alpha'\lambda'}{2}-\dfrac{\alpha'\Delta'}{2\Delta}-\dfrac{\Delta'\mu'}{\Delta}=0; \\ 2\mu''+\nu''+\mu'^2+\nu'^2+\nu'\mu'-\mu'\lambda'-\dfrac{\nu'\lambda'}{2}-\dfrac{\nu'\Delta'}{2\Delta}-\dfrac{\Delta'\mu'}{\Delta}=0; \\ 2\mu''+\beta''+\mu'^2+\beta'^2+\beta'\mu'-\mu'\lambda'-\dfrac{\beta'\lambda'}{2}-\dfrac{\beta'\Delta'}{2\Delta}-\dfrac{\Delta'\mu'}{\Delta}=0. \end{cases} \tag{6}$$

В интегральном виде эта система выглядит так:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta'\mu'}{\Delta}+\dfrac{\mu'^2}{2}+\dfrac{\alpha'\nu'e^{\alpha+\nu}+\beta'^2e^{2\beta}}{2\Delta}-2e^{\lambda-\mu}=0; \\ \left[\left(\dfrac{\Delta'}{\Delta}+\mu'\right)\sqrt{\Delta}\,e^{\mu-\frac{\lambda}{2}}\right]=2\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}}; \\ (\alpha'-\nu')e^{\alpha+\nu}=C_1\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}-\mu}; \\ (\alpha'-\beta')e^{\alpha+\beta}=C_2\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}-\mu}; \\ (\nu'-\beta')e^{\nu+\beta}=C_3\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}-\mu}, \end{cases} \tag{7}$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ – постоянные интегрирования.

Вводя гармонические координаты: $G^{11}\sqrt{-G}=const$, которые в данной задаче записываются как $\Delta=e^{\lambda-2\mu}$ ($\Delta=e^{\alpha+\nu}+e^{2\beta}$), – из системы (6) получим систему первых интегралов:

$$\begin{cases} \mu'\lambda'-\dfrac{3}{2}\mu'^2+\dfrac{\alpha'\nu'e^{\alpha+\nu}+\beta'^2e^{2\beta}}{2\Delta}-2e^{\lambda-\mu}=0; \\ (\lambda-\mu)'=n\sqrt{4e^{\lambda-\mu}+k}, \quad где \quad n=\pm1, k=const; \\ (\alpha'-\nu')e^{\alpha+\nu}=C_1\Delta; \quad \Delta=e^{\alpha+\nu}+e^{2\beta}; \\ (\alpha'-\beta')e^{\alpha+\beta}=C_2\Delta; \\ (\nu'-\beta')e^{\nu+\beta}=C_3\Delta. \end{cases} \tag{8}$$

Первые два уравнения системы (8) сводятся к следующим соотношениям соответственно:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f'^2(x)}{f^2(x)}-\frac{\Delta'^2}{\Delta^2}\right)+\frac{\alpha'\nu'e^{\alpha+\nu}+\beta'^2e^{2\beta}}{2\Delta}-2f(x)=0; \tag{9}$$

$$f(x)=e^{\lambda-\mu}=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & при \quad k\equiv 0; \\ \dfrac{a^2}{\cos^2 ax} & при \quad k\equiv -4a^2<0; \\ \dfrac{a^2}{\mathrm{sh}^2 ax} & при \quad k\equiv 4a^2>0, \end{cases} \tag{10}$$

из которых в случае, когда $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, получаем решения системы (8):

1) при $k \equiv 0$

$$e^{\nu} = \frac{1}{b^2\sqrt{2}} = const, \quad e^{\lambda} = \frac{b^4}{x^4}, \quad e^{\mu} = \frac{b^4}{x^2}, \quad \alpha = \beta = \nu. \qquad (11)$$

Когда $b^2 = \sqrt{2}$ и $x = \frac{b^2}{r}$, в пространственно-временном сечении получаем плоскую метрику ($e^{\nu}_{эфф} = 2e^{\nu}$) в сферических координатах:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

2) при $k \equiv -4a^2 < 0$ уравнение (9) сводится к соотношению $\nu'^2 = -2a^2$, что невозможно, то есть в данном случае решений нет;

3) при $k \equiv -4a^2 > 0$ имеем решение:

$$e^{\nu} = b^2 e^{a\sqrt{2}x}, \quad e^{\lambda} = \frac{a^4}{2b^4}\cdot\frac{e^{-2a\sqrt{2}x}}{\mathrm{sh}^4 ax}, \quad e^{\mu} = \frac{a^2}{2b^4}\cdot\frac{e^{-2a\sqrt{2}x}}{\mathrm{sh}^2 ax}, \quad \alpha = \beta = \nu, \qquad (12)$$

где $b^2 = const$.

Полагая $a = b^2\sqrt{2}$, решение (12) приводится к более простому виду

$$e^{\nu}_{эфф} = a\sqrt{2}e^{a\sqrt{2}x}, \quad e^{\lambda} = \frac{a^2 \cdot e^{-2a\sqrt{2}x}}{\mathrm{sh}^4 ax}, \quad e^{\mu} = \frac{e^{-2a\sqrt{2}x}}{\mathrm{sh}^2 ax}, \qquad (13)$$

где $-\infty < x < 0$.

В решении (13) удобнее произвести преобразование отражения: $x \to -x$. Тогда решение (13) приведется к виду

$$e^{\nu}_{эфф} = a\sqrt{2}e^{-a\sqrt{2}x}, \quad e^{\lambda} = \frac{a^2 \cdot e^{2a\sqrt{2}x}}{\mathrm{sh}^4 ax}, \quad e^{\mu} = \frac{e^{2a\sqrt{2}x}}{\mathrm{sh}^2 ax}, \qquad (14)$$

где $0 < x < +\infty$.

Из (14) видно, что коэффициент $e^{\mu}$ метрики (1), стоящий при квадрате угловой координаты, нигде в области определения $0 < x < +\infty$ не обращается в нуль, а на границах области ($x \to +\infty$ и $x \to 0$) неограниченно возрастает. Такое поведение этого метрического коэффициента соответствует пространству-времени «кротовой норы» [2].

Однако при этом отсутствует плоская асимптотика, так как метрические коэффициенты $e^{\nu}$ и $e^{\lambda}$ на границах области определения сингулярны.

## Библиографический список

1. Владимиров, Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации [Текст] / Ю. С. Владимиров. – М. : Энергоиздат, 1982.
2. Bronnikov K. A. Acta Phys. Pol. B4 (1973), 251.