УДК 512.7

А. Д. Уваров

Компактификация многообразия модулей MQ(–1, 2) стабильных расслоений ранга 2 на трехмерной квадрике

В настоящей статье приводится описание компактификации пространства, модулей стабильных векторных расслоений на проективной трехмерной квадрике Q с классами Черна c_1 = -1 и c_2 = 2. А именно, показано, что замыкание есть 6-мерное гладкое проективное рациональное многообразие.

Ключевые слова: пучок, тройка, диаграмма, спектральная последовательность, функтор, семейство, морфизм, расслоенное произведение, многообразие.

A. D. Uvarov

Compactification of Varieties of Modules MQ (–1, 2) of Stable Stratifications of the Rank 2 on a Three-Dimensional Quadric

In the present article the description of space compactification is resulted, modules of stable vector stratifications on the projective three-dimensional quadric Q with classes of Cherna c¬1 =-1 and c2 = 2. In Particular, it is shown that short circuit is a 6-dimensional smooth projective rational variety.

Keywords: a bunch, triad, a diagram, spectral sequence, functor, family, a morphism, a stratified product, variety.

В настоящей статье приводится описание компактификации пространства модулей стабильных векторных расслоений на проективной трехмерной квадрике Q с классами Черна c_1 = - 1 и c_2 = 2.

Пусть *MQ* (2; -1, 2, 0) – схема модулей стабильных пучков ранга 2 на проективной трехмерной квадрике Q с классами Черна c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0, а *M* = *MQ* (-1, 2) – многообразие модулей расслоений ранга 2 на Q с классами Черна c_1 = -1, c_2 = 2. Нас интересует замыкание $\overline{M}$ многообразия *M* в схеме *MQ* (2; -1, 2, 0). Для этого мы построим семейство пучков *E* из *MQ*(2; -1, 2, 0), получаемых как расширения вида

$$0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_C \to 0, \tag{1}$$

где $C = l_1 \cup l_2$ – пара скрещивающихся прямых на Q либо вырождение этой пары такое, что база этого семейства сюръективно отображается на $\overline{M}$ при модулярном морфизме.

Теорема. *Замыкание* $\overline{M}$ *пространства M = MQ(-1, 2) модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на Q с* c_1 *= -1,* c_2 *= 2 в схеме модулей Гизекера – Маруямы, MQ(2, -1, 2, 0) есть 6-мерное гладкое проективное рациональное многообразие.*

Доказательство теоремы будет вытекать из доказанных ниже предложений 1 и 2 статьи.

Пусть $\sigma : B := \mathrm{P}^3 \times \mathrm{P}^3 \to \mathrm{P}^3 \times \mathrm{P}^3$ – раздутие $\mathrm{P}^3 \times \mathrm{P}^3$ вдоль диагонали Δ. Рассмотрим прямое произведение $T := B \times Q$ с проекцией $f : T \to B$. Пусть $D_\Delta = \sigma^{-1}(\Delta)$ – исключительный дивизор раздутия σ. Как известно, база семейства прямых на Q изоморфна P^3. Поэтому рассмотрим график инциденции $\Upsilon = \{($ прямая l точка $x) \in \mathrm{P}^3 \times Q \mid x \in l\}$. Пусть Σ_1, Σ_2 – прообразы Υ при проекциях $p_1, p_2 : T := B \times Q \to \mathrm{P}^3 \times Q$ соответственно, $\Sigma := \Gamma \cup \Lambda$, $f_\Sigma := f|_\Sigma : \Sigma \to B$ – проекция и $Y_\Delta = f_\Sigma^{-1}(D_\Delta)$. Пересечение $\Gamma \cap \Lambda$ есть объединение двух дивизоров $Y_{\square} \cup Y$ в Σ, где Y – замыка-

© Уваров А. Д., 2011

ние в Σ множества $\{(l_1, l_2, x) \in (\mathrm{P}^3 \times \mathrm{P}^3\ ,\ \ \Delta) \times Q \mid x = l_1 \cap l_2\}$. Пусть $H := \mathrm{Hilb}_2 \mathrm{P}^3$ – схема Гильберта пар точек в P^3. Обозначим через $Z := H \times Q$ прямое произведение и рассмотрим расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "g"] & T \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "f"] \\ H & B, \arrow[l, "\tau"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

где g, ρ, τ – проекции.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathcal{O}_T(a,b,c,\mathcal{G}) := \mathcal{O}_B(a,b,c))\ \ \mathcal{G}$, $\mathcal{O}_T(a,b,c,d) := \mathcal{O}_B(a,b,c))\ \ \mathcal{O}_Q(d)$

$\mathcal{O}_B(a,b,c) := \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathrm{P}^3}(a))\ \ \mathcal{O}_{\mathrm{P}^3}(b)) \otimes \mathcal{O}_B(cD_\Delta)\ \mathcal{O}_Z(0,e) := \mathcal{O}_H\ )\ \ \mathcal{O}_Q(e)$, где $a,b,c,d,e \in$ Z,, а $\mathcal{G}$ – произвольный $\mathcal{O}_Q$ –пучок.

Воспользовавшись тем, что $\mathcal{I}_{Y_{\square},\Lambda} = \mathcal{O}_\Lambda(-Y_{\square}) = \mathcal{O}_T(0,0,-1,0)|_\Lambda = \mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,0)$ и $\mathcal{I}_{\Gamma\cap\Lambda,\Lambda} = \mathcal{I}_{Y,\Lambda}(-Y_{\square}) = \mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,0)$, из точной тройки:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\Gamma\cap\Lambda,\Lambda} \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma \longrightarrow 0 \tag{3}$$

получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\Sigma \arrow[r] & \mathcal{O}_\Gamma \arrow[r] & 0. \\ & \mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,0) \arrow[d] & & & \\ & \mathcal{O}_Y(0,0,-1,0) \arrow[d] & & & \\ & 0 & & & \end{tikzcd} \tag{4}$$

Вычислим пучок относительных $\mathcal{E}xt$-ов $\mathcal{F} := \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma,T}(0,0,0,1), \mathcal{O}_T)$. Рассмотрим точную тройку:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\Sigma,T}(0,0,0,1) \longrightarrow \mathcal{O}_T(0,0,0,1) \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma(0,0,0,1) \longrightarrow 0 \tag{5}$$

и применим к ней функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-, \mathcal{O}_T)$:

$$\to \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1), \mathcal{O}_T) \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Sigma(0,0,0,1), \mathcal{O}_T) \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1), \mathcal{O}_T). \tag{6}$$

Из нее следует, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Sigma(0,0,0,1), \mathcal{O}_T), \tag{7}$$

так как

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1), \mathcal{O}_T) = \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1), \mathcal{O}_T) = 0. \tag{8}$$

Для доказательства последних равенств рассмотрим спектральную последовательность локальных и относительных *Ext*-ов:

$$E_2^{p,q} = R^p f_* \mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_T(0,0,0,1), \mathcal{O}_T) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1), \mathcal{O}_T), \tag{9}$$

которая дает длинную точную последовательность:

$$0 \to R^1 f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)) \to \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) \to$$

$$\to f_*(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)) \to R^2 f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)).$$

Имеем $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) = \mathcal{O}_B \boxtimes \mathcal{O}_Q(-1)$ и по формуле Кюннета $R^1 f_*(\mathcal{O}_B \boxtimes \mathcal{O}_Q(-1)) = \mathcal{O}_B(0,0,1)\otimes H^1(\mathcal{O}_Q(-1)) = 0$.

Аналогично доказывается, что $R^2 f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)) = 0$ и, соответственно, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) \cong f_*(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)) = 0$. Также заметим, что поскольку все пучки $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) = 0$ для $i > 0$ [1, с. 301], то спектральная последовательность (9) дает $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) = 0$. Равенство (7) доказано. По аналогии с (7) доказывается равенство:

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,-1,-1,S),\mathcal{O}_T) = 0. \tag{10}$$

и равенство:

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(-1,0,0,S),\mathcal{O}_T) = 0. \tag{11}$$

Далее, для нахождения пучка $\mathcal{F} = \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Sigma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)$ выпишем кусок длинной точной последовательности относительных $\mathcal{E}xt$-ов для верхней строки диаграммы (4), подкрученной на $\mathcal{O}_T(0,0,0,1)$, и воспользуемся формулой (7):

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to$$

$$\to \mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T). \tag{12}$$

Вычислим входящие в эту последовательность пучки $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)$, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T), \mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)$ и $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)$.

Во-первых, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)$ из столбца диаграммы (4), применяя к нему функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_T)$:

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to$$

$$\to \mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to \mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T). \tag{13}$$

Далее, для последовательности (13) вычислим пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)$.

Рассмотрим $\mathcal{O}_T$ – резольвенту для пучка $\mathcal{O}_\Lambda$ и подкрутим ее на $\mathcal{O}_T(0,0,0,1)$; получим:

$$0 \to \mathcal{O}_T(0,-2,-1,0) \to \mathcal{O}_T(0,-1,-1,S) \to \mathcal{O}_T(0,0,-1,1) \to \mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1) \to 0, \tag{14}$$

где S – спинорное расслоение на квадрике Q [2]. Применяя к точной тройке:

$$0 \to \mathcal{I}_{\Sigma_2,T}(0,0,0,1) \to \mathcal{O}_T(0,0,-1,1) \to \mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1) \to 0 \tag{15}$$

функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_T)$, получаем точную последовательность:

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) \to$$

$$\to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_T(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T), \tag{16}$$

из которой следует, что

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) = \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T), \tag{17}$$

так как $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) = \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_T(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T) = 0.$ Доказательство последних равенств полностью повторяет доказательство для равенств из формулы (8).

Далее, пользуясь формулой Кюннета и соотношением $H^0(S) = 0$, находим:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(0,-1,-1,S),\mathcal{O}_T) = f_*(\mathcal{O}_B(0,1,1)\boxtimes S) = \mathcal{O}_B(0,1,1)\otimes H^0(S) = 0. \tag{18}$$

Аналогичным образом получаем:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(0,-2,-1,0),\mathcal{O}_T) = f_*(\mathcal{O}_T(0,2,1,0)) = \mathcal{O}_B(0,2,1)\otimes H^0(\mathcal{O}_Q) =$$

$$= \mathcal{O}_B(0,2,1)\otimes k = \mathcal{O}_B(0,2,1). \qquad (19)$$

Далее, в силу (14) пучок $\mathcal{I}_{\Sigma_2,T}(0,0,0,1)$ входит с следующую точную тройку:

$$0\to\mathcal{O}_T(0,-2,-1,0)\to\mathcal{O}_T(0,-1,-1,S^\vee(1))\to\mathcal{I}_{\Sigma_2,T}(0,0,0,1)\to 0. \qquad (20)$$

Применяя к ней функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_T)$, получим:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(0,-1,-1,S),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(0,-2,-1,0),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\to$$

$$\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,-1,-1,S),\mathcal{O}_T). \qquad (21)$$

Из последовательности (21) и формул (18), (19) и (10) заключаем, что $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)=\mathcal{O}_B(0,2,1).$ Отсюда и из формулы (17) имеем:

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\cong\mathcal{O}_B(0,2,1). \qquad (22)$$

Вычислим теперь пучок $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)$, входящий в последовательность (13). Пусть *Inc* – замыкание в $\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3$ множества $\{(l_1,l_2)\in(\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3)$, $\Delta\,|\,T=l_1\cap l_2\}$ и $\widetilde{Inc}:=\sigma^{-1}(Inc)$. По двойственности Серра и с учетом изоморфизма $\widetilde{Inc}\xrightarrow{\sim}Y$, сопоставляющего паре пересекающихся прямых на Q их точку пересечения на Q, получаем: $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=(\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T,\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1))\otimes\mathcal{O}_T(0,0,0,-3)))^\vee=((f\,|_Y)_*\mathcal{O}_Y(0,0,-1,-2))^\vee=\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\widetilde{Inc}}(0,0,-1),\mathcal{O}_B)=0$, так как $\mathrm{codim}_B\,\widetilde{Inc}=1$. Итак,

$$\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=0. \qquad (23)$$

Далее, найдем пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)$, также входящий в последовательность (13). Поскольку $\mathrm{codim}_T Y=4$, то все пучки $\mathcal{E}xt^i(O_Y(0,0,-1,1),O_T)=0$ для $i>0$. Поэтому из спектральной последовательности локальных и относительных *Ext*-ов

$$E_2^{p,q}=R^pf_*\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\Rightarrow\mathcal{E}xt^{p+q}_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T), \qquad (24)$$

получаем:

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=0. \qquad (25)$$

Теперь из последовательности (13) и равенств (25), (23), (22) получаем, что

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=\mathcal{O}_B(0,2,1). \qquad (26)$$

Далее, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)$, используемый в (12). Для его нахождения применим функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,O_T)$ к столбцу диаграммы (4):

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\to$$

$$\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T). \qquad (27)$$

Докажем равенство

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=0. \qquad (28)$$

Для этого воспользуемся спектральной последовательностью $E_2^{p,q}=R^pf_*\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\Rightarrow\mathcal{E}xt^{p+q}_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)$, которая дает: $0\to R^1f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T))\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)\to f_*(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T))$. Так как $\mathrm{codim}_T\Lambda=2$, то $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_\Lambda(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=0$, откуда следует равенство (28). Из последовательности (27) с учетом равенств (28) и (25) получаем, что

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Lambda}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_T)=0. \qquad (29)$$

Теперь вычислим пучок $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)$. Воспользуемся морфизмом замены базы для пучков относительных $\mathcal{E}xt$-ов : $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\otimes k_T \to Ext^3(\mathcal{O}_l(1),\mathcal{O}_Q)$, который является изоморфизмом, так как $Ext^4(\mathcal{O}_l(1),\mathcal{O}_Q)=0$. По двойственности Серра имеем: $Ext^3(\mathcal{O}_l(1),\mathcal{O}_Q)=(Ext^0(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_l(1)\otimes\omega_Q))^\vee=(Ext^0(O_Q,O_l(-2)))^\vee=(Hom(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_l(-2)))^\vee=0$, откуда

$$\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)=0. \tag{30}$$

Далее, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)$. Для этого рассмотрим O_T – резольвенту для пучка $\mathcal{O}_\Gamma$ и подкрутим ее на $\mathcal{O}_T(0,0,0,1)$:

$$0\to\mathcal{O}_T(-2,0,0,0)\to\mathcal{O}_T(-1,0,0,S^\vee(1))\to\mathcal{O}_T(0,0,0,1)\to\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1)\to 0. \tag{31}$$

К точной тройке:

$$0\to\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1)\to\mathcal{O}_T(0,0,0,1)\to\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1)\to 0 \tag{32}$$

применим функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_T)$ и рассмотрим кусок длинной точной последовательности:

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\to$$

Из нее следует, что

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)=\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T), \tag{34}$$

так как $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)=\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_T(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)=0$. Два последних равенства следуют из формулы (8).

Далее, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)$. Для этого нам понадобятся следующие пучки: $\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(-1,0,0,S),\mathcal{O}_T)$, $\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(-2,0,0,0),\mathcal{O}_T)$, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(-1,0,0,S),\mathcal{O}_T)$, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)$.

По формуле Кюннета получаем:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(-1,0,0,S),\mathcal{O}_T)=\mathcal{O}_B(1,0,0)\otimes H^0(S)=0. \tag{35}$$

Аналогичным образом имеем:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(-2,0,0,0),\mathcal{O}_T)=f_*(\mathcal{O}_T(2,0,0,0))=\mathcal{O}_B(2,0,0)\otimes k=\mathcal{O}_B(2,0,0). \tag{36}$$

Пучок $\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1)$ входит в следующую точную тройку:

$$0\to\mathcal{O}_T(0,-2,0,0)\to\mathcal{O}_T(-1,0,0,S^\vee(1))\to\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1)\to 0. \tag{37}$$

Применим к ней функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_T)$:

$$0\to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(-1,0,0,S),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_T(-2,0,0,0),\mathcal{O}_T)\to$$
$$\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_T(-1,0,0,S),\mathcal{O}_T). \tag{38}$$

Из точной последовательности (38) с учетом равенств (35), (36) и (11) получаем, что $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)=\mathcal{O}_B(2,0,0)$. Отсюда и из формулы (34) находим:

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1),\mathcal{O}_T)\cong\mathcal{O}_B(2,0,0). \tag{39}$$

В итоге с учетом формул (29), (39), (26) и (30) последовательность (12) приобретает вид:

$$0\to\mathcal{O}_B(2,0,0)\to\mathcal{F}\to\mathcal{O}_B(0,2,1)\to 0. \tag{40}$$

Отсюда следует, что пучок $\mathcal{F}$ на B локально свободен, имеет ранг 2 и, соответственно, $\mathcal{F}\cong\mathcal{F}^{\vee\vee}$. Покажем, что пучок $\mathcal{G}:=\mathcal{E}xt^1_g(\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\mathcal{O}_Z)$ также локально свободен, и имеет ранг 2.

Обозначим через $\Pi:=\rho(\Gamma)$. Нетрудно заметить, что $\Gamma \cong \Pi$, имеем расслоенную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[dr] \arrow[dd] & & \Sigma \arrow[ll] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& H\times Q \arrow[dl, "g"] & & B\times Q \arrow[ll, "\tilde\tau"'] \arrow[dl, "f"] \\
H & & B \arrow[ll, "\tau"] &
\end{tikzcd} \tag{41}$$

В силу того, что морфизмы $g, f, \tau, \tilde\tau$ в этой диаграмме – плоские, замена базы дает равенства.

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma,T}(0,0,0,1),\mathcal{O}_T) = \mathcal{E}xt^1_f(\tilde\tau^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\tilde\tau^*\mathcal{O}_Z) = \tau^*\mathcal{E}xt^1_g(\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\mathcal{O}_Z) = \tau^*\mathcal{G},$$

Отсюда, так как $\mathcal{F}$ локально свободен и τ – конечный плоский морфизм, следует, что $\mathcal{G}$ локально свободен и имеет ранг 2.

Так как $H = \mathrm{Hilb}_2\mathbb{P}^3$ рационально, то $W := \mathbb{P}(\mathcal{G}^\vee)$ – рациональное многообразие размерности 7.

Предложение 1. $W := \mathbb{P}(\mathcal{G}^\vee)$ *рациональное семимерное многообразие, параметризующее универсальное семейство расширений вида:* $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to 0$, *где* (l_1, l_2) *– пара прямых на Q, возможно совпавших, задаваемое (после подкрутки на пучок* $\mathcal{O}_Z(0,1)$ *как расширение пучков на* $\widetilde{W} := W\times Q$

$$0 \longrightarrow \widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1)) \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1) \longrightarrow 0, \tag{42}$$

где $\mathcal{O}_W(1)$ *– пучок Гротендика на W, а* $\widetilde{p} : \widetilde{W} \to Z$ и $\widetilde{g} : \widetilde{W} \to W$ *– естественные проекции.*

Доказательство. Пусть $p : W \to H$ – структурный морфизм. Рассмотрим расслоенное произведение:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "g"] & \widetilde{W} \arrow[l, "\widetilde{p}"'] \arrow[d, "\widetilde{g}"] \\
H & W, \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd} \tag{43}$$

и пусть $ev : p^*\mathcal{G}^\vee \to \mathcal{O}_W(1)$ – отображение вычисления. Тогда $ev \in H^0(\mathcal{H}om(p^*\mathcal{G}^\vee, \mathcal{O}_W(1))) = H^0(p^*\mathcal{G}^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_W(1)) = H^0(p^*\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_W(1))$. Заметим, что $p^*\mathcal{G} = p^*\mathcal{E}xt^1_g(\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\mathcal{O}_Z) = \mathcal{E}xt^1_{\widetilde{g}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{p}^*\mathcal{O}_Z)$.

Отсюда $p^*\mathcal{G}\otimes\mathcal{O}_W(1) = \mathcal{E}xt^1_{\widetilde{g}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{p}^*\mathcal{O}_Z)\otimes\mathcal{O}_W(1) = \mathcal{E}xt^1_{\widetilde{g}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1))$. Спектральная последовательность глобальных и относительных *Ext*-ов: $E_2^{p,q} = H^p(W, \mathcal{E}xt^q_{\widetilde{g}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1), \widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1))) \Rightarrow Ext^{p+q}_{\widetilde{W}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1), \widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1))$ дает точную последовательность:

$$H^1(\widetilde{g}_*\mathcal{H}om(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1))) \to Ext^1_{\widetilde{W}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1)) \to$$

$$\to \mathcal{E}xt^1_{\widetilde{g}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1)) \to H^2(\widetilde{g}_*\mathcal{H}om(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1))). \tag{44}$$

Но $\widetilde{g}_*\mathcal{H}om(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1)) = p^*g_*\mathcal{H}om(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\mathcal{O}_W(1)) = 0$, поскольку $p^*g_*\mathcal{H}om(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{p}^*\mathcal{O}_Z) = 0$. (Последнее равенство следует из того факта, что $g_*\mathcal{H}om(\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\mathcal{O}_Z) = g_*\mathcal{O}_Z(0,-1)$.) По формуле Кюннета $g_*\mathcal{O}_Z(0,-1) = \mathcal{O}_H \otimes H^0(\mathcal{O}_Q(-1)) = 0$, соответственно, $H^1(\widetilde{g}_*\mathcal{H}om(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1)) = H^2(\widetilde{g}_*\mathcal{H}om(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1))) = 0$. В итоге последовательность (44) дает изоморфизм: $\mu : Ext^1_{\widetilde{W}}(\widetilde{p}^*\mathcal{I}_{\Pi,Z}(0,1),\widetilde{g}^*\mathcal{O}_W(1)) \cong H^0(p^*\mathcal{G}\otimes\mathcal{O}_W(1))$. Элемент $\xi = \mu^{-1}(ev)$ задает искомое расширение (42). По построению ограничение этого расширения на слой проекции $\tilde{g}$ над точкой w из W есть подкрученная на $\mathrm{O}_Q(1)$ тройка (1):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Q \longrightarrow \mathbb{E}\,|_{w\times Q} \longrightarrow \mathcal{I}_{l_1\cup l_2,Q}(1) \longrightarrow 0, \tag{45}$$

в которой пара $l_1 \cup l_2$ упорядоченна. Подкрутив эту тройку на $\mathrm{O}_Q(-1)$, мы получаем, что $\mathbb{E}|_{w\times Q}\otimes\mathrm{O}(-1)$ – стабильный пучок ранга 2 с $c_1=-1,\ c_2=2, c_3=0$ на Q такой, что $[\mathbb{E}|_{w\times Q}\otimes\mathrm{O}(-1)]\in\bar{M}$. Предложение 1 доказано.

Замечание. По конструкции, W – база универсального семейства всех классов расширений вида (1). Поскольку $\alpha: W\to Hilb_2(\mathrm{P}^3)$ – проекция со слоем $P(Ext^1(\mathrm{I}_{l_1\cup l_2}(1),\mathrm{O}_Q))\simeq\mathrm{P}^1$, то W – гладкое многообразие.

Предложение 2. Морфизм $\varphi: W\to\bar{M}$: $w\mapsto[\mathbb{E}|_{w\times Q}\otimes\mathrm{O}(-1)]$ является структурным морфизмом проективизации векторного расслоения ранга 2 на $\bar{M}$ со слоем $B^0(\mathrm{E}(1))$ над произвольной точкой $[\mathrm{E}]\in\bar{M}$.

Прежде всего, $\bar{M}$ есть тонкое многообразие модулей, $\bar{M}\subset M' := M_Q(2;-1,2,0)$, а M' является тонким многообразием модулей. Докажем последнее утверждение. Пусть $\delta(B)=НОД(a_0,a_1,...,a_n)$ и $B=B_{\mathrm{E}}(m)=\Sigma_{i=0}^n a_i C_{m+i}^m$ – многочлен Гильберта пучка E ранга 2 на Q с классами Черна $c_1=-1, c_2=2, c_3=0$. Проверим, что $\delta(B)=НОД(a_0,a_1,...,a_n)=1$. Имеем $H(m)=\Sigma_{i=0}^n a_i C_{m+i}^m=(a_0+a_1+a_2+a_3)+\left(a_1+\frac{3a_2}{2}+\frac{11a_3}{6}\right)m+\left(\frac{a_2}{2}+a_3\right)m^2+\frac{a_3m^3}{6}$. С другой стороны, используя известную формулу для $H_{\mathrm{E}}(m)$ [5, с. 194], получим: $H(m)=\chi(\mathrm{E}(m))=(1-c_2)=(\frac{7}{3}-c_2)m+2m^2+\frac{2}{3}m^3.$ Отсюда $a_0=-10, a_1=9, a_2=-4, a_3=4.$ Таким образом, $НОД(a_0,a_1,a_2,a_3)=1$. Так как $c_1(\mathrm{E})=-1$ для $[\mathrm{E}]\in M_{Q_3}(2;-1,2,0)$, то, согласно [4, с. 598], универсальное семейство стабильных пучков на $M'\times Q$ существует, поскольку $\delta(B)=1$.

Тем самым, существует универсальный пучок $\mathbf{E}$ на $Q\times\bar{M}$. Рассмотрим проекцию $pr: Q\times\bar{M}\to\bar{M}$ и определим пучок $\mathrm{N} := pr_*(\mathbf{E}\otimes(\mathrm{O}_Q(1)\boxtimes\mathrm{O}_{\bar{M}}))$. Заметим, что для любой точки $y\in\bar{M}$ имеем $H^0(\mathbf{E}|_{Q\times y}(1)=2, \backslash H^1(\mathbf{E}|_{Q\times y}(1))=0$, а $\bar{M}$ является целой схемой [3, с. 217]. Отсюда следует, что отображение замены базы $\mathrm{N}\otimes\mathbf{k}_y\to H^0(\mathbf{E}|_{Q\times y}(1))=\mathbf{k}^2$ для любого $y\in\bar{M}$ является изоморфизмом [1, с. 368], так что N – локально свободный пучок ранга 2 на $\bar{M}$. Рассмотрим проективизацию этого пучка $\pi: P(\mathrm{N})=\mathrm{Proj}(\mathrm{N}^\vee)\to\bar{M}$. Тогда слой $\pi^{-1}(y)$ равен $P(H^0(\mathbf{E}|_{Q\times y}(1)))$, и отсюда следует, что $P(\mathrm{N}):=\{(y,<s>)\,|\,y\in\bar{M},<s>\in P(\mathbf{E}|_{Q\times y}(1))\}$. В силу того, что W – база универсального семейства всех классов расширений вида (1), существует морфизм $\psi: P(\mathrm{N})\to W$, который паре $(y,<s>)$ ставит в соответствие расширение $\xi: 0\to\mathrm{O}_Q\xrightarrow{s}\mathbf{E}|_{Q\times y}(1)\to\mathrm{I}_{l_1\cup l_2}(1)\to 0$, где $l_1\cup l_2=(s)_0$. По построению ψ – изоморфизм и $\varphi\circ\psi: P(\mathrm{N})\to\bar{M}$ – структурный морфизм проективизации расслоения N над $\bar{M}$. Предложение 2 доказано.

Заметим, что $\bar{M}$ является рациональным многообразием, поскольку M рационально согласно [5, с. 217]. Кроме того, из предложения 2 и гладкости W (см. замечание перед предложением 2) следует гладкость $\bar{M}$. Отсюда непосредственно вытекает теорема 1.

Библиографический список

1. Хартсхорн, Р. Алгебраическая геометрия [Текст] / Р. Хартсхорн. – М. : Мир, 1981.
2. Arrondo E. Sols I. Classification of smooth congruence of low degree // J.Reine Angew. Math.1989. V. 393 P. 199–219.
3. Lange B. Universal Families of Extensions // Journal of Algebra 1983. V. 83. P. 101–112, 1983.
4. Maruyama M. Moduli of stable sheaves. II // J. Math. Kyoto Univ. 1978. V. 18. P. 557–614.
5. Ottaviani G., Szurek M. On Moduli of Stable 2-Bundles with Small Chern Classes on Q_3 // Annali di Matematica pura ed applicata (IV). 1994. V. CLXVII. P. 191–241.