УДК512.7

М. А. Заводчиков

О некотором семействе когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$, $c_3=0$ на трехмерном проективном пространстве. I

В настоящей статье рассматривается схема модулей Гизекера – Маруямы $\mathbf{M}:=M_{P^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$, $c_3=0$ на трехмерном проективном пространстве P^3. Мы построим новое неприводимое семейство M пучков E из $\mathbf{M}$, для которых пучок $Q=E^{\vee\vee}/E$ включается в точную тройку $0\to Q_0\to Q\to O_m(-1)\to 0$ и где Q_0 – артинов пучок длины 2, а m – прямая в P^3.

Ключевые слова: компактификация, схема модулей, когерентный пучок ранга 2 без кручения, трехмерное проективное пространство.

M. A. Zavodchikov

About Some Family of Coherent Bunches of the Rank 2 without Torsion with Classes of Chern $c_1=-1, c_2=2$, $c_3=0$ on 3-Dimensional Projective Space. I

In the present article is regarded the scheme of modules Gizeker-Maruyama $\mathbf{M}:=M_{P^3}(2;-1,2,0)$ of stable coherent bunches without torsion of the rank 2 with classes of Chern $c_1=-1$, $c_2=2$, $c_3=0$, on three-dimensional projective space P^3. We will construct a new not resulted family of M bunches E from $\mathbf{M}$ for which the bunch $Q=E^{\vee\vee}/E$ includes into exact triad $0\to Q_0\to Q\to O_m(-1)\to 0$ and where Q_0 - the artin bunch with the length 2, and m – a straight line in P^3.

Keywords: compactification, the scheme of modules, a coherent bunch of the rank 2 without torsion, a three-dimensional projective space.

Введение

В настоящей статье рассматривается схема модулей Гизекера – Маруямы $\mathbf{M}:=\mathbf{M}_{P^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$, $c_3=0$ на трехмерном проективном пространстве P^3. В статье [4] было показано, что пространство модулей $\mathbf{M}_{P^3}(-1,2)$ стабильных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$ на P^3 является неприводимым неособым рациональным многообразием размерности 11. В статье [6] описано замыкание $\overline{\mathbf{M}_{P^3}(-1,2)}$ схемы $\mathbf{M}_{P^3}(-1,2)$ в схеме $\mathbf{M}$. Кроме того, в [6] были приведены примеры множеств не локально свободных стабильных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1=-1, c_2=2, c_3=0$. До настоящего времени описание всех неприводимых компонент схемы модулей $\mathbf{M}$ не было известно.

Рассмотрим пучок $[E]\in\mathbf{M}\setminus M_{P^3}(-1,2)$. Ввиду локальной несвободы пучка E и условия $c_3(E)=0$ пучок $E^{\vee\vee}$ не изоморфен пучку E [5, Section 1] и точна последовательность:

$$0\to E\xrightarrow{can}E^{\vee\vee}\xrightarrow{\varepsilon}Q\to 0, \tag{1}$$

где $\mathsf{Q}=\mathsf{E}^{\vee\vee}/\mathsf{E}$, а $can:\mathsf{E}\to\mathsf{E}^{\vee\vee}$ – канонический морфизм, инъективный в силу того, что E – пучок без кручения. Поскольку $\mathrm{S}upp\mathsf{Q}\subset\mathrm{S}ing\mathsf{E}$ и, согласно [2], имеем $\dim\mathrm{S}ing\mathsf{E}\le 1$ для пучка E без кручения, то $\dim\mathsf{Q}\le 1$. Нетрудно показать, что, когда $\dim\mathsf{Q}=0$, возможны случаи: 1) Q – артинов пучок длины 1 и 2) Q – артинов пучок длины 2, а когда $\dim\mathsf{Q}=1$, возможны три случая: 3) $\mathsf{Q}=\mathsf{O}_m(1)$; 4) пучок Q включается в точную тройку вида: $0\to\mathbf{k}_x\to\mathsf{Q}\to\mathsf{O}_m\to 0$, где $x\in\mathsf{P}^3$, а m – прямая в P^3; 5) пучок Q включается в точную тройку вида:

$$0\to\mathsf{Q}_0\to\mathsf{Q}\to\mathsf{O}_m(-1)\to 0, \tag{2}$$

где Q_0 – артинов пучок длины 2, а m – прямая в P^3.

В настоящей статье мы рассмотрим множество пучков

$$\mathsf{M}:=\{\mathsf{E}\in\mathbf{M}\mid\mathsf{E}^{\vee\vee}/\mathsf{E};\mathsf{Q},\ \textit{где}\ \mathsf{Q}-\textit{пучок из точной тройки вида}\ (4)\}, \tag{3}$$

$$0\to\mathsf{Q}_0\to\mathsf{Q}\to\mathsf{O}_m(-1)\to 0, \tag{4}$$

где Q_0 – артинов пучок длины 2, а m – некоторая прямая в P^3, в схеме модулей $\mathbf{M}$. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Множество* M *неприводимо.*

Всюду в статье основным полем является алгебраически замкнутое поле $\mathbf{k}$ характеристики 0. Через $[\mathsf{E}]$ будем обозначать класс изоморфизма когерентного пучка E.

Неприводимость множества M

В этом мы построим плоское семейство $\mathbf{E}$ пучков E из M с неприводимой базой, обозначаемой ниже через W, такое, что образ схемы W при модулярном морфизме $f:W\to\mathbf{M}:w\mapsto[\mathbf{E}_{|\mathsf{P}^3\times\{w\}}]$ есть M. Далее, мы докажем, что схема W неприводима. Тем самым, получим основной результат настоящей статьи – теорему 1.

Обозначим через X прямое произведение схем $\mathsf{P}^3\times\mathsf{P}^3\times\mathrm{Q}uot$, где $\mathrm{Q}uot$ есть $\mathrm{Q}uot$-схема $\mathrm{Q}uot(3\mathsf{O}(-1),n+2)$ классов эквивалентности фактор-пучков пучка $3\mathsf{O}(-1)$, имеющих многочлен Гильберта $n+2$. Рассмотрим проекции $p_{12}:X\to\mathsf{P}^3\times\mathsf{P}^3$, $p_{13}:X\to\mathsf{P}^3\times\mathrm{Q}uot$, $\pi:=p_{23}:X\to Y:=\mathsf{P}^3\times\mathrm{Q}uot$. На $\mathsf{P}^3\times\mathrm{Q}uot$ имеется универсальный эпиморфизм $3\mathsf{O}(-1)\otimes\mathsf{O}_{\mathrm{Q}uot}\to Q$. Рассмотрим пучок $\mathsf{H}om_{\mathsf{O}_X}(p_{12}^*\mathsf{O}_\Delta,p_{13}^*Q)$, где Δ – диагональ в $\mathsf{P}^3\times\mathsf{P}^3$. Согласно утверждению Гротендика [3, 7.7.8-9] существует когерентный O_Y – пучок N такой, что для любой подсхемы Z в схеме Y существует изоморфизм пучков $\mathsf{H}om_{\mathsf{O}_X}(p_{12}^*\mathsf{O}_\Delta,p_{13}^*\mathsf{Q}\otimes\pi^*\mathsf{O}_Z)\approx$ $\mathsf{H}om(\mathsf{N},\mathsf{O}_Z)$. В частности, используя в качестве подсхемы Z точку $y\in Y$, получаем, что $\mathrm{H}om(\mathbf{k}_{x\times\{y\}},\mathsf{Q}_{\mathsf{P}^3\times\{y\}})=\mathrm{H}om(\mathsf{N},\mathbf{k}_y)\ne 0$ тогда и только тогда, когда $y\in\mathrm{S}upp\mathsf{N}$. Рассмотрим приведенную подсхему Π в Y, заданную идеалом $\sqrt{\mathrm{A}nn\mathsf{N}}$. Как множество Π совпадает с $\mathrm{S}upp\mathsf{N}=\{(x,y=[3\mathsf{O}(-1)\to\mathsf{Q}_{|\mathsf{P}^3\times\{y\}}\to 0])\in Y\mid$ пучок $\mathsf{Q}_{|\mathsf{P}^3\times\{y\}}$ содержит подпучок $\mathbf{k}_x\}$. Обозначим через O_{Δ_Π} пучок $p_{12}^*\mathsf{O}_\Delta\otimes\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3\times\Pi}$ и через Q_Π пучок $\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}\otimes\mathsf{Q}\otimes\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3\times\Pi}$. Тогда имеется точная тройка:

$$0\to\mathsf{O}_{\Delta_\Pi}\otimes\mathsf{H}om(\mathsf{O}_{\Delta_\Pi},\mathsf{Q}_\Pi)\xrightarrow{can}\mathsf{Q}_\Pi\to\mathsf{Q}'\to 0. \tag{5}$$

Обозначим через π_N проекцию $\mathsf{P}^3\times\Pi\to\Pi$. Пусть в вышеупомянутом утверждении Гротендика подсхема Z в Y есть схема Π. Тогда существует когерентный пучок N' такой, что имеется изоморфизм пучков $\pi_N^*\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\Delta_\Pi},\mathcal{Q}'\otimes\mathcal{O}_\Pi)\approx\mathcal{H}om(\mathcal{N}',\mathcal{O}_\Pi)$. Рассмотрим приведенную собственную подсхему Π' в Π, задаваемую идеалом $\sqrt{\mathcal{A}nn(\mathcal{N}')}$. Пусть $p:Y\to\mathrm{Q}uot$ – проекция. Тогда по построению $p_{\Pi'}:=p_{|\Pi'}:\Pi'\to p(\Pi')$ – накрытие 2:1. Обозначим через $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ образ схемы $p(\Pi')$ при морфизме p. $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ является замкнутым подмножеством в $\mathrm{Q}uot$ в силу проективности морфизма p. Введем на $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ структуру приведенной подсхемы в схеме $\mathrm{Q}uot$. По построению

$$\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}\overset{sets}{=}\{[3\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{Q}\to 0]\in\mathrm{Q}uot\quad|\quad\mathcal{Q}\ \textit{включается в тройку}\ (4)\}.\tag{6}$$

Далее, рассмотрим схему $\Pi:=\widetilde{\Pi}\setminus\Pi'$. Тогда по конструкции морфизм $p_{|\Pi}:\Pi\to p(\Pi)=:\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$ является биекцией. Поэтому на $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$ определена структура приведенной локально замкнутой подсхемы в $\mathrm{Q}uot$. По построению

$$\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}\overset{sets}{=}\{[3\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{Q}\to 0]\in\mathrm{Q}uot\ |$$

$$\mathcal{Q}\ \textit{включается в тройку}\ (8)\},\tag{7}$$

$$0\to\mathbf{k}_x\to\mathcal{Q}\to\mathcal{O}_m\to 0,\tag{8}$$

где x – точка в $\mathcal{P}^3$, а m – прямая в $\mathcal{P}^3$. Далее мы покажем, что схема $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ неприводима (предложение 1).

Рассмотрим в $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$ два подмножества $\mathrm{Q}uot^*:=\{[3\mathcal{O}(-1)\to\mathbf{k}_x\oplus\mathcal{O}_m\to 0]\in\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}\ |\ x\notin m\ \}$

и $\mathrm{Q}uot_{nr}:=\{[3\mathcal{O}(-1)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{m}}]\in\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}\ |\ \widetilde{m}$ – схема с носителем на прямой m, неприведенная в точке $x\in m\}$. Нетрудно показать, что существует целая схема $\mathcal{Y}$ и эпиморфизм пучков $3\mathcal{O}_{\mathcal{P}^3}\otimes\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}\to\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}}$, где $\mathcal{Q}_{\mathcal{Y}}=\{\mathcal{Q}_y\}_{y\in\mathcal{Y}}$ – плоское семейство пучков $\mathcal{Q}_y$ с многочленом Гильберта $P(\mathcal{Q}_y)=n+2$, включающихся в точную тройку $0\to\mathbf{k}_x\to\mathcal{Q}_y\to\mathcal{O}_m\to 0$, в которой x – точка в $\mathcal{P}^3$, а m – прямая в $\mathcal{P}^3$, такое, что $\mathrm{Q}uot^*\cup\mathrm{Q}uot_{nr}=\varphi(\mathcal{Y})$, где $\varphi:\mathcal{Y}\to\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}:y\mapsto[3\mathcal{O}_{\mathcal{P}^3}(-1)\otimes\mathcal{Q}_y]$ – канонический морфизм в $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$.

Рассмотрим схему $Y_A:=\mathcal{P}^3\times\mathcal{P}^3\times\mathcal{Y}$ и проекции $q_{12}:Y_A\to\mathcal{P}^3\times\mathcal{P}^3$, $q_{13}:Y_A\to\mathcal{P}^3\times\mathcal{Y}$ и $q_{23}:Y_A\to\mathcal{P}^3\times\mathcal{Y}$. Пусть $\mathcal{P}^3_\Delta$ - диагональ в $\mathcal{P}^3\times\mathcal{P}^3$, а $\mathcal{Q}$ – универсальный пучок на $\mathcal{P}^3\times\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$. Обозначим через $\mathcal{Q}_A$ пучок $q_{12}^*\mathcal{O}_{\mathcal{P}^3_\Delta}\oplus q_{13}^*(id_{\mathcal{P}^3}\times\varphi)^*\mathcal{Q}$. По построению пучок $q_{23*}\mathcal{Q}_A$ локально свободен ранга 3. Рассмотрим главное $GL(3)$ – расслоение $\mathrm{I}:=\mathrm{I}som(3\mathcal{O}_{Y_A},q_{23}^*q_{23*}\mathcal{Q}_A)\xrightarrow{\mu}Y_A$. Имеется композиция отображений $s:3\mathcal{O}_{\mathcal{P}^3\times\mathrm{I}}\approx\mu^*q_{23}^*q_{23*}\mathcal{Q}_A\to\mu^*\mathcal{Q}_A\to 0$. Тензорно умножая пучки на $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^3}(-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{I}}$, получаем отображение $s:3\mathcal{O}_{\mathcal{P}^3}(-1)\times\mathcal{O}_{\mathrm{I}}\to\mu^*\mathcal{Q}_A(-1)\to 0$. Пучок $\mu^*\mathcal{Q}_A(-1)$ плоский над I, поэтому в силу универсальности схемы $\mathrm{Q}uot$ существует отображение $\vartheta:\mathrm{I}\to\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ такое, что $s=\vartheta^*\alpha_{\mathrm{Q}uot}$, где $\alpha_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}:3\mathcal{O}(-1))\mathcal{O}_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}\to\mathcal{Q}_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}$, а $\mathcal{Q}_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}$ – универсальный пучок на схеме $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$. Обозначим через $\mathrm{Q}uot_A$ образ I при морфизме ϑ. Как множество образ $\mathcal{Q}uot_A$ лежит в схеме $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$. Поэтому в силу приведенности $\mathcal{I}$ и $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$ получаем следующую лемму.

Лемма 1. *Замыкание образа* $\mathcal{Q}uot_A$ *в схеме* $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$ *неприводимо.*

Рассмотрим в $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$ два подмножества

$\mathcal{Q}uot^* := \{[3\mathcal{O}(-1) \to \mathbf{k}_x \oplus \mathcal{O}_m \to 0] \in \mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}_4} \mid x \notin m\}$ и $\mathcal{Q}uot_{ds} := \{[3\mathcal{O}(-1) \to \mathbf{k}_x \oplus \mathcal{O}_m \to 0] \in \mathcal{Q}uot \mid x \in m\}$.

Нетрудно показать, что существует целая схема $\mathcal{Z}$ и эпиморфизм пучков $3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Q}_{\mathcal{Z}}$, где $\mathcal{Q}_{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{Q}_z\}_{z \in \mathcal{Z}}$ – плоское семейство пучков $\mathcal{Q}_z$ с многочленом Гильберта $P(\mathcal{Q}_z) = n + 2$, включающихся в точную тройку $0 \to \mathbf{k}_x \to \mathcal{Q}_z \to \mathcal{O}_m \to 0$, в которой x – точка в $\mathbb{P}^3$, а m – прямая в $\mathbb{P}^3$, такое, что $\mathcal{Q}uot^* \cup \mathcal{Q}uot_{ds} = \psi(\mathcal{Z})$, где $\psi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}_4} : z \mapsto [3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \mathcal{Q}_z \to 0]$ – канонический морфизм в $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$.

Рассмотрим схему $Y_B := \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathcal{Z}$ и проекции $h_{12} : Y_B \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, $h_{13} : Y_B \to \mathbb{P}^3 \times \mathcal{Z}$ и $h_{23} : Y_B \to \mathbb{P}^3 \times \mathcal{Z}$. Пусть $\mathbb{P}^3_\Delta$ – диагональ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, а $\mathcal{Q}$ – универсальный пучок на $\mathbb{P}^3 \times \mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$. Обозначим через $\mathcal{Q}_B$ пучок $h_{12}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_\Delta} \oplus h_{13}^*(id_{\mathbb{P}^3} \times \psi)^* \mathcal{Q}$. Замена базы сразу показывает, что пучок $h_{23*}\mathcal{Q}_B$ – локально свободный пучок ранга 3. Рассмотрим главное $GL(3)$ – расслоение $\mathcal{I}' := \mathcal{I}som(3\mathcal{O}_{Y_B}, h_{23}^* h_{23*} \mathcal{Q}_B) \xrightarrow{\mu'} Y_B$.

Имеется композиция отображений $s_1' : 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \mathcal{I}'} \approx \mu'^* h_{23}^* h_{23*} \mathcal{Q}_B \to \mu'^* \mathcal{Q}_B \to 0$. Тензорно умножая пучки на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{I}'}$, получаем отображение $s_1 : 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \times \mathcal{O}_{\mathcal{I}'} \to \mu'^* \mathcal{Q}_B(-1)$. Пучок $\mu'^* \mathcal{Q}_B(-1)$ – плоский над $\mathcal{I}'$, поэтому существует отображение $\vartheta' : \mathcal{I}' \to \mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$ такое, что $s_1 = \vartheta'^* \alpha_{\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}}$, где $\alpha_{\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}} : 3\mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}} \to \mathcal{Q}_{\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}}$, а $\mathcal{Q}_{\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}}$ – универсальный пучок на схеме $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$. Обозначим через $\mathcal{Q}uot_B$ образ $\mathcal{I}'$ при морфизме ϑ'. Как множество образ $\mathcal{Q}uot_B$ лежит в схеме $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$. Поэтому в силу приведенности $\mathcal{I}'$ и $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$ получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Замыкание образа* $\mathcal{Q}uot_B$ *в схеме* $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}}$ *неприводимо.*

Теперь рассмотрим прямое произведение схем $\mathbb{P}^3 \times Hilb^2 \times G$, где $Hilb^2$ – схема Гильберта нульмерных схем длины 2 в $\mathbb{P}^3$, а G – грассманиан прямых в $\mathbb{P}^3$. Пусть $pr_1 : \mathbb{P}^3 \times Hilb^2 \times G \to \mathbb{P}^3$, $pr_{13} : \mathbb{P}^3 \times Hilb^2 \times G \to \mathbb{P}^3 \times G$, $pr_{23} : \mathbb{P}^3 \times Hilb^2 \times G \to Hilb^2 \times G$, $pr_{12} : \mathbb{P}^3 \times Hilb^2 \times G \to \mathbb{P}^3 \times Hilb^2$ – проекции. Пусть Γ' – график инциденции в $\mathbb{P}^3 \times G$ и Γ'' – график инциденции в $\mathbb{P}^3 \times Hilb^2$. Определим подсхемы $Z_1 := pr_{13}^{-1}(\Gamma')$ и $Z_2 := pr_{12}^{-1}(\Gamma'')$ в $\mathbb{P}^3 \times Hilb^2 \times G$. Имеем точную тройку:

$$0 \to \mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2} \to \mathcal{O}_{Z_1} \oplus \mathcal{O}_{Z_2} \to \mathcal{O}_{Z_1 \cap Z_2} \to 0 \tag{9}$$

на $\mathbb{P}^3 \times Hilb^2 \times G$. Пусть $R = \{(\tau, m) \in Hilb^2 \times G \mid \tau \cap m \neq \varnothing\}$ – график инциденции в схеме $Hilb^2 \times G$. Рассмотрим в R замкнутое подмножество $R_2 := \{(\tau, m) \in R \mid \tau \subset m\}$ и его дополнение – открытое подмножество $R_1 := \{(\tau, m) \in R \mid l(\tau \cup m) = 1\}$. Пусть $\delta' : B' \to Hilb^2 \times G$ – раздутие схемы $Hilb^2 \times G$ вдоль R_2. И пусть $\delta : B \to B'$ – раздутие схемы B' вдоль замыкания $R_1' := \overline{\delta'^{-1}(R_1)}$.

Обозначим через $\tilde{\delta}$ композицию отображений $\delta\circ\delta'$. Применим к (9) функтор $(id\times\tilde{\delta})^*$, где id – тождественное отображение на $\mathbb{P}^3$, получим точную тройку

$$0\to\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}\to\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1}\oplus\mathcal{O}_{\tilde{Z}_2}\to\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cap\tilde{Z}_2}\to 0 \tag{10}$$

на $\mathbb{P}^3\times B$, где $\tilde{Z}_1=(id\times\tilde{\delta})^{-1}(Z_1)$, а $\tilde{Z}_2=(id\times\tilde{\delta})^{-1}(Z_2)$. Докажем, что пучок $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}$ – плоский над схемой B. Для этого воспользуемся [6, §7, Следствие 3]. Пусть $\widetilde{pr}_{23}:\mathbb{P}^3\times B\to B$ и $\widetilde{pr}_1:\mathbb{P}^3\times B\to\mathbb{P}^3$ – проекции. Применим к точной тройке (10), подкрученной на пучок $\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)$, функтор $\widetilde{pr}_{23*}$, получим

$$0\to\widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))\to\widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1}\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)\oplus\mathcal{O}_{\tilde{Z}_2}\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))\to$$

$$\to\widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cap\tilde{Z}_2}\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))\to 0. \tag{11}$$

Докажем, что пучок $\widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cap\tilde{Z}_2}\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$ – пучок на дивизоре и имеет гомологическую размерность 1. Гладкие многообразия $D_1:=\delta^{-1}(R_1')$ и $D_2:=\tilde{\delta}^{-1}(R_2)$ – дивизоры Картье в B. Очевидно, что $\widetilde{pr}_{23}(\tilde{Z}_1\cap\tilde{Z}_2)=D_1\cup D_2$. Обозначим через Z'_{12} расслоенное произведние $\tilde{Z}_1\cap\tilde{Z}_2\times_{D_1\cup D_2}D_2$ над $D_1\cup D_2$ и через Z''_{12} расслоенное произведение ${\tilde{Z}_1\cap\tilde{Z}_2}_{D_1\cup D_2}\times D_1$ над $D_1\cup D_2$. Имеем изоморфизм $\tilde{Z}_1\cap\tilde{Z}_2\approx Z'_{12}\cup Z''_{12}$. Пусть $p'=\widetilde{pr}_{23|Z'_{12}}:Z'_{12}\to D_1$ и $p''=\widetilde{pr}_{23|Z''_{12}}:Z''_{12}\to D_2$ – проекции. По построению p' – изоморфизм, p'' – двулистное накрытие, являющееся плоским морфизмом, поскольку D_2 – гладкое многообразие, а $\Omega:=Z'_{12}\cap Z''_{12}$ – дивизор Картье в $\tilde{Z}_{12}$. Имеем точную тройку

$$0\to\mathcal{O}_{Z'_{12}}(-\Omega)\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)\to\mathcal{O}_{Z'_{12}\cup Z''_{12}}\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)\to\mathcal{O}_{Z''_{12}}\otimes\widetilde{pr}^*_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)\to 0.$$

Применяя к ней функтор $\widetilde{pr}_{23*}$, получаем точную тройку

$$0 \to p'_*(\mathcal{O}_{Z'_{12}}(-\Omega) \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) \to \widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{Z'_{12} \cup Z''_{12}} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) \to$$

$$\to p''_*(\mathcal{O}_{Z''_{12}} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) \to 0. \qquad (12)$$

$\mathcal{O}_B$ – пучок $p'_*(\mathcal{O}_{Z'_{12}}(-\Omega) \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$ имеет гомологическую размерность 1 как локально свободный пучок на дивизоре Картье D_1, поскольку p' – изоморфизм. Аналогично, так как p'' – плоский морфизм степени 2, то $\mathcal{O}_B$ – пучок $p''_*(\mathcal{O}_{Z''_{12}} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$ – локально свободный пучок ранга 2 на дивизоре Картье D_2 и поэтому имеет гомологическую размерность 1 как $\mathcal{O}_B$-пучок. Поэтому из тройки (12) следует, что

$\widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{Z'_{12} \cup Z''_{12}} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) = \widetilde{pr}^*{}_{23*}(\mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cap \widetilde{Z}_2} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$ – $\mathcal{O}_B$ – пучок гомологической размерности 1.

Для любой точки $x \in Hilb^2 \times G$ имеют место изоморфизмы $pr_{23*}(\mathcal{O}_{Z_1} \otimes pr_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \otimes \mathbf{k}_x) \approx \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_m(n))$, где m – прямая в $\mathbb{P}^3$, и $pr_{23*}(\mathcal{O}_{Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \otimes \mathbf{k}_x) \approx \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\tau)$, где τ – двоеточие в $\mathbb{P}^3$. Поэтому пучок $pr_{23*}((\mathcal{O}_{Z_1} \oplus \mathcal{O}_{Z_2}) \otimes pr_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$ – локально свободный ранга $n+3$. Следовательно, пучок

$$\widetilde{\delta} \quad pr_{23*}((\mathcal{O}_{Z_1} \oplus \mathcal{O}_{Z_2}) \otimes pr_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) = \widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{Z}_2} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$$

также локально свободен. Поэтому в силу того, что правый пучок из (11) – $\mathcal{O}_B$-пучок гомологической размерности 1 и средний локально свободен, получаем, что левый пучок $\widetilde{pr}_{23*}(\mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2} \otimes \widetilde{pr}^*{}_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$ из точной тройки (11) локально свободен. Используя [1, §7, Следствие 3], получаем, что пучок $\mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2}$ – плоский над B для любого $n \geq 0$.

Рассмотрим схему $\mathbf{B} := \mathbf{P}roj((\widetilde{pr}_{23*}\mathcal{H}om(3\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_B, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2}))^\vee)$ и естественную проекцию $pr : \mathbf{B} \to B$. Пучок $\widetilde{pr}_{23*}\mathcal{H}om(3\mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}_B, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2}(-1)) \approx \widetilde{pr}_{23*} 3\mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2}$ локально свободен, так как по замене базы его ограничение на произвольную точку $b \in B$ есть $P(\mathcal{H}om(3\mathcal{O}(-1), \mathcal{Q}))$, где пучок $\mathcal{Q}$ включается в точную тройку (4). Следовательно, схема $\mathbf{B}$ неприводима.

Пусть $p:\mathbb{P}^3\times\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ – проекция. Так как пучок $\mathcal{Q}(1)$ порождается своими сечениями, то на $\mathbb{P}^3\times\mathbf{B}$ тавтологическое отображение $\alpha_{\mathbf{B}}:3\mathcal{O}(-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{B}}\to(id\times pr)^*\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(-1)\otimes(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{B}}(1))$ является сюръекцией. Так как пучок $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}$ – плоский над B, то пучок $(id\times pr)^*\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(-1)\otimes(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{B}/B}(1))$ – плоский над $\mathbf{B}$. Поэтому в силу универсальности схемы $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ существует морфизм $\Phi:\mathbf{B}\to\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ такой, что $\alpha_{\mathbf{B}}=\Phi^*\alpha_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}$, где $\alpha_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}:3\mathcal{O}(-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{B}}\to\mathcal{Q}_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}$ и $\mathcal{Q}_{\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}}$ – универсальный пучок на $\mathbb{P}^3\times\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$.

По построению $\mathrm{i}m(\Phi)=\mathrm{Q}uot_C$, где $\mathrm{Q}uot_C=\{[3O(-1)\to\mathcal{Q}\to 0]\in\mathrm{Q}uot(3\mathcal{O}(-1),n+2)\mid\mathcal{Q}$ включается в точную тройку $0\to\mathcal{O}_\tau\to\mathcal{Q}\to\mathcal{O}_m(-1)\to 0$, где $\mathcal{O}_\tau$ – структурный пучок двоеточия, а m – прямая в $\mathbb{P}^3\}$. Следовательно, верна лемма.

Лемма 3. *Замыкание образа $\mathrm{Q}uot_C$ в схеме $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ неприводимо.*

По построению схема $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ есть объединение неприводимых конструктивных множеств $\mathrm{Q}uot_A$, $\mathrm{Q}uot_B$, $\mathrm{Q}uot_C$, пересечение которых есть открытое в $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ множество

$$\mathrm{Q}uot^{**}:=\{[3\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{Q}\to 0]\in\mathrm{Q}uot(3\mathcal{O}(-1),n+2)\mid\mathcal{Q}=k_x\oplus k_y\oplus\mathcal{O}_m(-1),$$

$$\textit{где}\quad x\notin m,\quad y\notin m\quad\textit{и}\quad x\neq y\}. \tag{13}$$

Отсюда в силу лемм 1, 2, и 3 получаем следующее предложение.

Предложение 1. *Схема $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}}$ неприводима.*

Рассмотрим пучок $\mathcal{E}\in\mathcal{M}$. Из определения $\mathcal{M}$ следует, что $\mathcal{E}$ включается в точную тройку (1), где $\mathcal{Q}$ – пучок из точной тройки (4). Нетрудно увидеть, что $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ – стабильный рефлексивный пучок на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee})=-1$, $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee})=1$ и $c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee})=1$, который имеет локально свободную резольвенту

$$0\to\mathcal{O}(-2)\to 3\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{E}^{\vee\vee}\to 0. \tag{14}$$

Поэтому имеем сюръекцию $\alpha:3\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{Q}$, и можно построить коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & \mathcal{E} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 3\mathcal{O}(-1) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & 3\mathcal{O}(-1) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & \mathcal{E} \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd} \tag{15}$$

где $\mathcal{L}$ – ядро отображения α. Так как многочлен Гильберта $P_{\mathcal{Q}}(n) := \chi(\mathcal{Q}(n))$ пучка $\mathcal{Q}$ из (4) равен $n+2$, то из (6) следует, что класс $[3\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{Q}]$ эпиморфизма α по модулю автоморфизмов пучка $\mathcal{Q}$ есть точка схемы $Quot_{\mathcal{M}}$. Пусть $3\mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}_{Quot_{\mathcal{M}}} \to \mathcal{Q}$ – универсальный эпиморфизм на $\mathbb{P}^3 \times Quot_{\mathcal{M}}$, и пусть $\mathbf{L}$ – ядро этого эпиморфизма. На $\mathbb{P}^3 \times Quot_{\mathcal{M}}$ рассмотрим пучок $\mathbf{L}(2) := \mathbf{L} \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \otimes \mathcal{O}_{Quot_{\mathcal{M}}})$. По построению имеем для любой точки $q \in Quot_{\mathcal{M}}$:

$$\mathbf{L}(2) \otimes \mathbf{k}_q = \mathcal{L}(2),$$

где $\mathcal{L}(2)$ – пучок на $\mathbb{P}^3$.

Пусть m – прямая в $\mathbb{P}^3$ и $x_1, x_2 \notin m$ – различные точки в $\mathbb{P}^3$. Для произвольного вложения $i : \mathcal{O}(-1) \to 3\mathcal{O}(-1)$ рассмотрим композицию $s = \alpha' \circ i : \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{E}^{\vee\vee}$ как сечение пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}(1)$. Из диаграммы (15) непосредственно вытекает следующее замечание.

Замечание 1. *Для общего* $s \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^{\vee\vee}(1))$ *композиция* $\varepsilon \circ s : \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{Q}$ *сюръективна.*

Лемма 4. *Пучок* $\mathcal{L}$ *из коммутативной диаграммы (15) порождается своими сечениями, и* $\mathrm{h}^0(\mathcal{L}(2)) = 8$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{L}(2) \to 3\mathcal{O}(1) \to \mathcal{Q}(2) \to 0. \qquad (16)$$

Докажем, что отображение $h : \mathrm{H}^0(3\mathcal{O}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{Q}(2))$ сюръективно. Мономорфизм $0 \to \mathcal{O}_\tau \to \mathcal{Q}$, где $\mathcal{O}_\tau$ – структурный пучок двоеточия τ, и эпиморфизм $3\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{Q} \to 0$ определяют подпучок $2\mathcal{O}(1)$ в пучке $3\mathcal{O}(1)$.

Эти морфизмы (после подкрутки на $\mathcal{O}(2)$) продолжаются до коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d] & 2\mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\tau \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}(2) \arrow[r] \arrow[d] & 3\mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Q}(2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_m(1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_m(1) \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \qquad (17)$$

где пучок $\mathcal{S}$ включается в точную тройку $0 \to \mathcal{I}_x(1) \to \mathcal{S} \to \mathcal{I}_x(1) \to 0$. Переходя в этой диаграмме к когомологиям и учитывая сюръективность отображений групп сечений $\mathrm{H}^0(2\mathcal{O}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\tau)$ и $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_m(1))$, получаем точную последовательность:

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{L}(2)) \to \mathrm{H}^0(3\mathcal{O}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{Q}(2)) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{L}(2)). \qquad (18)$$

Используя точную тройку $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{L}(2) \to \mathcal{E}(2) \to 0$, из диаграммы (15) получаем, что $\mathrm{H}^1(\mathcal{L}(2)) = 0$. Поэтому из (18), следует, что отображение $h : \mathrm{H}^0(3\mathcal{O}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{Q}(2))$ сюръективно. Кроме того, из (16) получаем, что $\mathrm{h}^0(\mathcal{L}(2)) = 8$. Тем самым, лемма доказана.

□

Пусть $pr_2 : \mathsf{P}^3 \times \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}} \to \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}}$ – проекция. Над схемой $\mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}}$ рассмотрим проективный спектр $\mathsf{W} := \mathbf{P}roj((pr_{2*}\mathbf{L}(2))^{\vee}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}}$ симметрической алгебры пучка $(pr_{2*}\mathbf{L}(2))^{\vee}$, и пусть $\mathsf{O}_{\mathsf{W}}(1) := \mathsf{O}_{\mathsf{W}/Quot_{\mathsf{M}}}(1)$ – пучок Гротендика на W. В силу замены базы и леммы 4 следует, что пучок $pr_{2*}\mathbf{L}(2)$ локально свободен. Отсюда ввиду предложения 1 получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Схема* W *неприводима.*

Переходим к доказательству неприводимости множества M. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^3 \times \mathbb{W} \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d, "\widetilde{pr_2}"] & \mathbb{P}^3 \times \mathrm{Quot}_{\mathcal{M}} \arrow[d, "pr_2"] \\ \mathbb{W} \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Quot}_{\mathcal{M}}. \end{tikzcd} \qquad (19)$$

Существует естественный эпиморфизм $\varepsilon : \rho^*(pr_{2*}\mathbf{L}(2))^{\vee}$ ²$\mathsf{O}_{\mathsf{W}}(1)$ и ему двойственный морфизм $\varepsilon^{\vee} : \mathsf{O}_{\mathsf{W}}(-1) \to \rho^*((pr_{2*}\mathbf{L}(2))^{\vee})^{\vee}$. Так как пучок $pr_{2*}\mathbf{L}(2)$ локально свободен, то пучок $((pr_{2*}\mathbf{L}(2))^{\vee})^{\vee}; pr_{2*}\mathbf{L}(2)$. Отсюда и так как диаграмма (19) – декартов квадрат, имеет место изоморфизм пучков $\rho^*((pr_{2*}\mathbf{L}(2))^{\vee})^{\vee} \approx \widetilde{pr}_{2*} \widetilde{\rho}^* \mathbf{L}(2)$. Поэтому, поднимая морфизм $\varepsilon^{\vee}$ на $\mathsf{P}^3 \times \mathsf{W}$, получаем морфизм пучков $\phi : \widetilde{pr}^*{}_2 \mathsf{O}_{\mathsf{W}}(-1) \to \widetilde{pr}^*{}_2 \widetilde{pr}_{2*} \widetilde{\rho}^* \mathbf{L}(2)$. Пучок $\mathsf{L}(2)$ порождается своими сечениями и $\mathrm{H}^0(\mathsf{L}(2)) = \mathbf{k}^8$ (см. лемму 4). Отсюда и в силу замены базы следует, что отображение $ev' : pr_2^* pr_{2*}\mathbf{L}(2) \to \mathbf{L}(2)$ – сюръекция. Так как диаграмма (19) – декартов квадрат, то морфизм $ev : \widetilde{pr}^*{}_2 \widetilde{pr}_{2*} \widetilde{\rho}^* \mathbf{L}(2) \to \widetilde{\rho}^* \mathbf{L}(2)$ – также сюръекция. Определим пучки $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ на $\mathsf{P}^3 \times \mathsf{W}$ как коядра композиций $\lambda := ev \circ \phi : \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-2))\mathsf{O}_{\mathsf{W}}(-1) \xrightarrow{\lambda} \widetilde{\rho}^*\mathbf{L}$ и $\xi : \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-2))\mathsf{O}_{\mathsf{W}}(-1) \xrightarrow{\lambda} \widetilde{\rho}^*\mathbf{L} \to \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1) \otimes \mathsf{O}_{\mathsf{W}}$ соответственно. Теперь мы можем построить следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] & \\ & 0 \arrow[d] & & \mathbf{E} \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{W}}(-1) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\lambda"] & 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{W}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widetilde{\rho}^*\mathbf{L} \arrow[r] \arrow[d] & 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{W}} \arrow[r] & \widetilde{\rho}^*\mathfrak{Q}_{\mathrm{Quot}_{\mathcal{M}}} \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\ & \mathbf{E} \arrow[d] & & 0 & \\ & 0 & & & \end{tikzcd} \qquad (20)$$

Определим в W открытую подсхему $W := \{w \in \mathrm{W} \mid (3\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3\times\mathrm{W}}(-1)/\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3\times\mathrm{W}}(-2))_{|\mathrm{P}^3\times\{w\}}$ – рефлексивный пучок на P^3 $\}$. По построению ограничение диаграммы (20) на $\mathrm{P}^3\times w$, где w – точка в W, есть диаграмма (15). Выберем произвольный пучок $[\mathrm{E}]$ из множества M. Используя точную тройку $0\to\mathrm{E}\to\mathrm{E}^{\vee\vee}\to\mathrm{Q}\to 0$ и локально свободную резольвенту $0\to\mathrm{O}(-2)\to 3\mathrm{O}(-1)\to\mathrm{E}^{\vee\vee}\to 0$ пучка $\mathrm{E}^{\vee\vee}$, мы можем построить коммутативную диаграмму (15). Тем самым, мы определим точку $w=([\alpha],[s])\in W$, где $[\alpha]\in \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}}$, а $[s]$ – класс пропорциональности сечения пучка $\mathrm{L}(2)$. Поэтому всякий пучок $[\mathrm{E}]$ из множества M представлен точкой $w\in W$ такой, что $[\mathrm{E}]=[\mathbf{E}_{|\mathrm{P}^3\times w}]$. Итак, M совпадает с образом модулярного морфизма $f: W\to\mathbf{M}: w\mapsto[\mathbf{E}_{|\mathrm{P}^3\times w}]$. Тем самым, доказана теорема 1 – основной результат настоящей статьи.

Библиографический список

1. Мамфорд, Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности [Текст] / Д. Мамфорд. – Москва : Мир, 1968.
2. Оконек, К., Шнейдер, М., Шпиндлер, Х. Векторные расслоения на комлексных проективных пространствах [Текст] / К. Оконек, М. Шнейдер, Х. Шпиндлер. – М. : Мир, 1984.
3. Grothendieck EGA [Текст] / A. Grothendieck // Publ. Math I.H.E.S. – Ch.III, vol 17, 1963.
4. Hartshorne R. Sols I. Stable rank 2 vector bundles on P^3 with $c_1=-1, c_2=2$ / Hartshorne R. Sols I. // J. Reine Angew. Math. – 325, 1981. – p. 145–152 .
5. Hartshorne R.Stable reflexive sheaves / R. Hartshorne // Math. Ann. - 254, 1980. – p. 121–176.
6. Meseguer J., I. Sols, S. A. StrØmme Compactification of a family of vector bundles on P^3 [Текст] / J. Meseguer, I. Sols, S. A. StrØmme // Prog. Math. -11, 1981. – p. 474–494.