МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 512.7

А. С. Тихомиров, М. Е. Сорокина

О конструкции многообразия модулей стабильных пучков ранга два с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на поверхности Хирцебруха F_1 (Часть I)

Настоящая статья является первой частью работы, цель которой – дать точное алгебро-геометрическое описание многообразия Гизекера – Маруямы $M^H_{F_1}(2;0,3)$ модулей стабильных относительно поляризации H когерентных пучков ранга два с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на поверхности Хирцебруха F_1. В статье построено многообразие X, бирационально изоморфное $M^H_{F_1}(2;0,3)$, и семейство $\mathcal{E}$ с базой X, общий пучок которого H-стабилен.

Ключевые слова: многообразие модулей, стабильный пучок ранга два на поверхности, поверхность Хирцебруха.

A. S. Tikhomirov, M. E. Sorokina

About Designing of Variety of Modules of Stable Bunches of the Rank Two with Chzhen's Classes $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ on the Surface of Hirzebruch F_1 (Part I)

The present article is the first part of the work which purpose is to give the exact algebro-geometrical description of variety of Gizeker-Marujama $M^H_{F_1}(2;0,3)$ modules which are stable concerning polarization H of coherent bunches of the rank two with classes Chzhen $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ on the surface of Hirzebruch F_1. In the article the variety is constructed X, biirrational isomorphic $M^H_{F_1}(2;0,3)$, and family $\mathcal{E}$ with the basis X, which general bunch H - is stable.

Keywords: variety of modules, a stable bunch of the rank two on surfaces, the surface of Hirzebruch.

Введение

Пусть S – гладкая проективная поверхность, H – обильный класс дивизоров на ней. Пучок E на S будем называть H-стабильным, если он стабилен по Гизекеру относительно поляризации H. Пусть $M^H_S(r;c_1,c_2)$ – многообразие модулей когерентных H-стабильных пучков E ранга r на S с классами Чженя $c_1(E) = c_1$, $c_2(E) = c_2$. Образующие кольца когомологий многообразия $M^H_S(r;c_1,c_2)$ для $S = P^2$ найдены в работе [4] и для поверхностей $S = F_n$ в работе [6]. Числа Бетти многообразия $M^H_S(2;c_1,c_2)$ получены в случае $S = P^2$ для $c_2 \le 9$ [5], [6]. В случае поверхности F_n в работе [6] получена формула, позволяющая найти числа Бетти b_i для $i < 2c_2$ для нечетного (c_1, f), где f – слой проекции $S \to C$ на кривую C, а в случае $c_1 = 0$ – для $i < 2c_2 - 3$. Для $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ это дает число $b_1 = 0$ и число b_2, равное рангу группы Пикара. Ранги остальных групп Чжоу неизвестны.

Пусть далее $S := P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}(-1))$ – поверхность Хирцебруха F_1, получаемая раздутием $\phi:\ S \to P^2$ проективной плоскости P^2 в точке x_0, $p:\ S \to P^1$ – стандартная проекция. Обозначим

$O_S(1,0) := \phi^* O_{P^2}(1)$, $O_S(0,1) := p^* O_{P^1}(1)$, $c_1(O_S(1,0)) =: \tau$, $c_1(O_S(0,1)) =: h$. Пусть $H = a\tau + bh$, $a, b > 0$. Первое нетривиальное многообразие модулей $M_S^H(2;0,n)$ когерентных H-стабильных пучков ранга 2 на S с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = n$ определено для $n = 2$. Геометрия многообразия $M_S^H(2;0,2)$ описана в [1], где доказано, что $M_S^H(2;0,2)$ изоморфно раздутию проективного пространства P^5 вдоль плоскости P^2. Из этого описания легко находятся ранги групп Чжоу многообразия $M_S^H(2;0,2)$. В настоящей работе изучается многообразие $M_S^H(2;0,3)$ когерентных H-стабильных пучков ранга 2 на S с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 3$. Цель исследования – получить алгебро-геометрическое описание многообразия $M_S^H(2;0,3)$, что в дальнейшем позволит вычислить ранги его групп Чжоу.

Геометрия многообразия $M_S^H(2;0,3)$ зависит от поляризации H. Точное описание бирациональных перестроек многообразий модулей стабильных пучков ранга два на поверхностях, происходящих при изменении поляризации, получено Г. Эллингсрудом и Л. Геттше в работе [3]. Метод Эллингсруда – Геттше в случае, когда S – поверхность Хирцебруха F_1, дает следующее:

- на S существуют в точности два неизоморфных многообразия модулей стабильных пучков ранга два с $c_1 = 0$, $c_2 = 3$;

- пусть $C_+ := \{a\tau + bh \mid a > b\}$, $C_- := \{a\tau + bh \mid a < b\}$; тогда $M_S^H(2;0,3) \cong M_S^{H'}(2;0,3)$, если $H, H' \in C_+$ или $H, H' \in C_-$;

- $M_S^H(2;0,3)$ и $M_S^{H'}(2;0,3)$ бирационально изоморфны, если $H \in C_+$, $H' \in C_-$; при этом многообразие $M_S^H(2;0,3)$ получается из $M_S^{H'}(2;0,3)$ раздутием вдоль гладкой подсхемы, содержащей классы пучков E, включающихся в точные тройки $0 \to O_S(-\tau + 2h) \to E \to O_S(\tau - 2h) \to 0$, а затем стягиванием исключительного дивизора в гладкую подсхему классов пучков, включающихся в точные тройки $0 \to O_S(\tau - 2h) \to E \to O_S(-\tau + 2h) \to 0$.

Обозначим $M_- := M_S^{H_-}(2;0,3)$ (соответственно, $M_+ := M_S^{H_+}(2;0,3)$) многообразие модулей когерентных пучков без кручения ранга 2 на S с классами Чженя $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 3$, стабильных относительно поляризации $H_- := \tau + 2h$ (соответственно, $H_+ := 2\tau + h$). В параграфе 1 мы строим многообразие X_0, которое является проективным спектром локально свободного пучка ранга 4 на схеме Гильберта $Hilb^3 S$, такое, что X_0 бирационально изоморфно многообразию модулей M_-. Данная конструкция опирается на свойства H_--стабильных пучков ранга 2 на S, приведенные в предложении 1. Морфизм $X_0 \to M_-$ не является регулярным вдоль объединения двух семимерных подсхем $\mathbf{Y}$ и Φ_0 в X_0, причем Φ_0 не является гладкой. В предложении 2 параграфа 2 мы доказываем, что раздутие $X \to X_0$ многообразия X_0 вдоль подсхемы $\mathbf{Y}$ разрешает особенности схемы Φ_0, а также дивизора Ψ_0 в X_0, в точках которого морфизм $X_0 \to M_-$ не является изоморфизмом. Основным результатом статьи является построение семейства $\mathcal{E}$ пучков с базой X, общий член которого H_--стабилен (теорема).

§ 1. Построение многообразия, бирационально изоморфного M_-

Предложение 1. *1) Пусть E – пучок на S такой, что $[E] \in M_-$. Тогда E включается в одну из точных троек*

$$0 \to O_S(0,-1) \to E \to I_{Z_3}(0,1) \to 0, \qquad (1)$$

где I_{Z_3} *– пучок идеалов нульмерной схемы* Z_3 *длины 3 на* S*, не содержащейся в одном слое* f *проекции* $p:\ S \to P^1$*, или*

$$0 \to I_{Z_2} \to E \to I_x \to 0, \qquad (2)$$

где Z_2 *содержится в одном слое* f *проекции* p*, или*

$$0 \to I_{Z_3} \to E \to O_S \to 0, \qquad (3)$$

где Z_3 *содержится в одном слое* f *проекции* p.

При этом $h^0(E(0,1)) \le 2$ *и* $h^0(E(0,1)) = 1$ *в общей точке* $[E] \in M_-$.

2) Пусть для пучка E *вида (1) выполняется* $h^0(E(0,1)) = 2$. *Тогда* Z_3 *принадлежит объединению двух различных прямых* f_1 *и* f_2 *– слоев проекции* p.

3) Всякий пучок E *на* S*, заданный нетривиальным расширением (1), такой, что либо* $\mathrm{Sing}E = \varnothing$*, либо для всякого* $x \in \mathrm{Sing}E$ $Z_3 \setminus x$ *не содержится в одном слое* f *проекции* p*,* H_-*-стабилен.*

Доказательство. 1) Рассмотрим точную последовательность $0 \to H^0(E) \to H^0(E(0,1)) \to H^0(E(0,1)\,|\,f) \to H^1(E)$. В силу H_--стабильности E $h^1(E) = -\chi(E) = 1$. Ранг E равен двум, значит, $h^0(E(0,1)\,|\,f) \ge 2$, а следовательно, $h^0(E(0,1)) \ge 1$. В общей точке, очевидно, $h^0(E(0,1)) = 1$. Таким образом, существует вложение $O_S(0,-1) \to E$.

Пусть $G := \mathrm{coker}(O_S(0,-1) \to E)$, $c_t(G) = 1 + ht + 3t^2$. Если G имеет кручение, то по лемме о змее ядро G' морфизма $E \to G/TorsG$ включается в расширение $0 \to O_S(0,-1) \to G' \to TorsG \to 0$. Пусть $C = x\tau + yh$, $x, y \in Z$, – носитель $TorsG$. Тогда $c_1(G') = C - h$. Поскольку E также μ-полустабилен относительно H_-, то $(C-h)\cdot(\tau+2h) = (x\tau + (y-1)h)\cdot(\tau+2h) = 3x + y - 1 \le 0$. Отсюда в силу эффективности C $x = 0$, $y = 1$. Таким образом, либо пучок G не имеет кручения, и тогда $G = I_{Z_3}(0,1)$ для некоторой нульмерной подсхемы Z_3 длины 3 на S, либо $TorsG = O_f(-k)$ для некоторого $k \in N$. Если $k = 1$, то $G' = I_x$, что противоречит стабильности E. Значит, $k = 2$ или 3. Если $TorsG = O_f(-2)$, то $G' = I_{Z_2}$, где Z_2 содержится в одном слое f проекции $S \to P^1$, и E является расширением вида (2), а в случае $TorsG = O_f(-3)$ $G' = I_{Z_3}$, где Z_3 содержится в одном слое f проекции $S \to P^1$, и E является расширением вида (3).

Если E задается тройкой $0 \to O_S(0,-1) \to E \to I_{Z_3}(0,1) \to 0$ и $h^0(E(0,1)) > 2$, то $h^0(I_{Z_3}(0,2)) > 1$. Это означает, что Z_3 содержится в одном слое проекции $p:\ S \to P^1$. Но тогда $h^0(I_{Z_3}(0,1)) = h^0(E) > 0$, что противоречит стабильности E. Если E задается тройкой (2), то $h^0(E(0,1)) \le h^0(I_{Z_2}(0,1)) + h^0(I_x(0,1)) = 2$. Пусть теперь E задается тройкой (3). Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_{Z_3} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I_{Z_3}(0,1) \arrow[r] & E(0,1) \arrow[r] & O(0,1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

и соответствующую диаграмму когомологий:

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ & 0 \arrow[rr] & & H^0(O) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & H^1(I_{Z_3}) \arrow[d, "j"] \\ 0 \arrow[r] & H^0(I_{Z_3}(0,1)) \arrow[r] & H^0(E(0,1)) \arrow[r] & H^0(O(0,1)) \arrow[r, "\beta"] & H^1(I_{Z_3}(0,1)). \end{tikzcd}$$

Здесь i, j и α – вложения и $j \circ i = \beta \circ \alpha \neq 0$, так что $\beta \neq 0$. Поэтому, так как $h^0(I_{Z_3}(0,1)) = 1$ и $h^0(O(0,1)) = 2$, то $h^0(E(0,1)) = 2$.

2) Если $h^0(E(0,1)) = 2$, то $h^0(I_{Z_3}(0,2)) = 1$, то есть Z_3 содержится в объединении двух слоев проекции p.

3) Пусть $I_\Delta(a,b)$, где Δ – нульмерная подсхема на S, – подпучок ранга один пучка E. Если $I_\Delta(a,b) \to O_S(0,-1)$, то для приведенных многочленов Гильберта пучков $I_\Delta(a,b)$ и E выполняется соотношение $p_{I_\Delta(a,b)} < p_E$. Пусть $I_\Delta(a,b) \to I_{Z_3}(0,1)$. Так как существует вложение $I_{Z_3}(0,1) \to O_S(0,1)$, то $I_\Delta(a,b)$ вкладывается в $O_S(0,1)$. Это означает, что $a \leq 0$ и $b \leq a+1$. Рассмотрим поляризацию $H_- = \tau + 2h$. Имеем:

$$p_{I_\Delta(a,b)}(mH_-) = \frac{5m(m+1)}{2} + (3a+b+1)m + \frac{a^2+3a+2ab+2b}{2} + 1 - l(\Delta),$$

$$p_E(mH_-) = \frac{5m(m+1)}{2} + m - \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим систему неравенств $\begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq a+1, \\ 3a+b \geq 0. \end{cases}$ Ее целые решения: $a = b = 0$ и $a = 0,\ b = 1$.

Пусть $a = b = 0$. В этом случае пучок $I_\Delta(a,b)$ является дестабилизирующим подпучком в E тогда и только тогда, когда $1 - l(\Delta) > -\frac{1}{2}$, то есть $l(\Delta) = 0$ или 1. Для $l(\Delta) = 0$ не существует вложения $I_\Delta(a,b) = O_S$ в $I_{Z_3}(0,1)$. Если $l(\Delta) = 1$, то $I_\Delta(a,b) = I_x$. Вложение $I_x \to I_{Z_3}(0,1)$ существует тогда и только тогда, когда $Z_3 \setminus x$ содержится в одном слое f проекции $p: S \to P^1$. Пусть $x \notin \mathrm{Sing}E$. Тогда вложение $I_x \to E$ пропускается через вложение $O_S \to E$, но пучок, являющийся расширением (1), сечений не имеет.

Пусть $a = 0,\ b = 1$. Тогда $I_\Delta(0,1)$ вкладывается в $I_{Z_3}(0,1)$ тогда и только тогда, когда $\Delta \subseteq Z_3$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & I_\Delta(0,1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & I_\Delta(0,1) \arrow[d] \\
O_S(0,-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & I_{Z_3}(0,1) \arrow[d] \\
O_S(0,-1) \arrow[r] & O_S(0,-1) \oplus O_{\Delta\setminus Z_3} \arrow[r] & O_{\Delta\setminus Z_3}.
\end{tikzcd}$$

Из нее следует, что существует сюръекция $E \to O_S(0,-1)$, то есть пучок E равен прямой сумме пучков $O_S(0,-1)$ и $I_{Z_3}(0,1)$, что противоречит условию. □

Пусть $H_0 := Hilb^3 S$ – схема Гильберта нульмерных подсхем длины 3 на поверхности S. Через Γ обозначим универсальный цикл в $S \times H_0$. Рассмотрим относительный пучок $Ext^1_{p_0}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0})$, где $p_0 :\ S \times H_0 \to H_0$ – проекция на второй сомножитель. Имеем:

$$\begin{aligned}
0 \to R^1 p_{0*} Hom_{O_{S\times H_0}}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}) \to \\
\to Ext^1_{p_0}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}) \to \\
\to p_{0*} Ext^1_{O_{S\times H_0}}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}) \to \\
\to R^2 p_{0*} Hom_{O_{S\times H_0}}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R^1 p_{0*} Hom_{O_{S\times H_0}}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}) \cong \\
\cong R^1 p_{0*}(O_S(0,-2) \boxtimes O_{H_0})) \cong \\
\cong H^1(O_S(0,-2)) \otimes O_{H_0} \cong O_{H_0},
\end{aligned}$$

$$R^2 p_{0*} Hom_{O_{S\times H_0}}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
p_{0*} Ext^1_{O_{S\times H_0}}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}) \cong \\
\cong p_{0*} Ext^2_{O_{S\times H_0}}(O_\Gamma \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}) \cong p_{0*}(O_\Gamma \otimes O_S(0,-2) \boxtimes O_{H_0} \otimes N_{\Gamma/S\times H_0})
\end{aligned}$$

– локально свободный пучок ранга 3 на H_0. Следовательно, $Ext^1_{p_0}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0})$ локально свободен ранга 4.

Пусть $X_0 := P(Ext^1_{p_0}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0}))$. Над $S \times X_0$ существует универсальное расширение

$$0 \to O_S(0,-1) \boxtimes O_{X_0} \to \mathcal{E}_0 \to I_{(\mathrm{id}_S \times g)^{-1}\Gamma, S\times X_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes L_0^{-1} \to 0, \qquad (4)$$

в котором $g_0 :\ X_0 \to H_0$ – проекция, L_0 – антитавтологическое линейное подрасслоение в $g_0^* Ext^1_{p_0}(I_{\Gamma,S\times H_0} \otimes O_S(0,1) \boxtimes O_{H_0}, O_S(0,-1) \boxtimes O_{H_0})$.

Через Y обозначим приведенную подсхему в H_0, точки которой соответствуют подсхемам Z_3 на S, содержащимся в одном слое проекции $p:\ S \to P^1$. Схема Y гладкая и имеет коразмерность 2 в H_0.

Рассмотрим в X_0 три приведенные подсхемы:

$\Psi_0 := \{[0 \to O_S(0,-1) \to E \to I_{Z_3}(0,1) \to 0] \mid h^0(E(0,1)) \geq 2\}$,

$\Phi_0 := \{[E] \in \Psi_0 \mid \mathrm{Sing}E \ni x \in Z_3$ и $Z_3 \setminus x \subset f$, где $f -$ слой проекции $p: S \to P^1\}$ и

$\mathbf{Y} := g_0^{-1} Y \subset \Psi_0$.

Схема Φ_0 имеет в X_0 коразмерность 2, коразмерность ее пересечения с $\mathbf{Y}$ в X_0 равна 3, и схема Φ_0 особа вдоль $\Phi_0 \cap \mathbf{Y}$.

Замечание. 1) Согласно предложению 1, пучки $\mathcal{E}_0 | S \times \{y\}$, такие, что $y \in \Phi_0 \cup \mathbf{Y}$, H_--нестабильны.

2) Имеет место изоморфизм

$$X_0 \setminus \Psi_0 \cong M_- \setminus \{[E] \mid h^0(E(0,1)) = 2\}.$$

§ 2. Семейство $\mathcal{E}$ пучков с $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на S с H_--стабильным общим членом

Рассмотрим раздутие $\sigma_Y:\ H \to H_0$ многообразия Гильберта H_0 вдоль Y. Пусть $X := X_0 \times_{H_0} H$, D – исключительный дивизор раздутия $\sigma:\ X \to X_0$ вдоль $\mathbf{Y}$, $g:\ X \to H$ – проекция.

Обозначим $\Psi := \sigma^{-1}(\Psi_0)_{prop}$ и $\Phi := \sigma^{-1}(\Phi_0)_{prop}$. Дадим точное геометрическое описание Ψ и Φ.

Предложение 2. *1) Дивизор Ψ на X изоморфен расслоенному произведению*

$$\Psi = V \times_H X,$$

где V – гладкий дивизор в H, точки которого соответствуют схемам $Z_3 \subset S$, содержащимся в объединении двух слоев проекции $p: S \to P^1$, и, тем самым, Ψ является гладким.

2) Схема Φ изоморфна расслоению со слоем P^2 над V и, следовательно, является гладкой.

Доказательство. 1) Пусть $R := \{Z_2 \in Hilb^2 S \mid Z_2$ содержится как схема в некотором слое проекции, $p: S \to P^1\}$ – приведенная подсхема в $Hilb^2 S$, $\Sigma := \{(Z_2, x) \in R \times S \mid x \in f, Z_2 \subset f$ для некоторого слоя f проекции $p:\ S \to P^1\}$ – приведенная подсхема в $R \times S$ и $T := \{(Z_2, x) \in \Sigma \mid x \in Z_2\}$. Схема Σ по построению изоморфна $R \times_{P^1} S$, а схема T изоморфна $S \times_{P^1} S$. Рассмотрим рациональный морфизм $\delta':\ R \times S \to H_0:\ (Z_2, x) \mapsto Z_2 \cup x$. Пусть $\sigma_T:\ V \to R \times S$ – раздутие $R \times S$ вдоль T как приведенной подсхемы. При вложении $R \times S \to Hilb^2 S \times S$ схема T вкладывается в универсальный цикл Γ' в $Hilb^2 S \times S$, так что $T = \Gamma' \times_{Hilb^2 S \times S} R \times S$. Поэтому имеет место диаграмма с расслоенным квадратом

$$\begin{tikzcd}
R \times S \arrow[d] & V \arrow[l, "\sigma_T"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
Hilb^2 S \times S & \mathrm{Bl}_{\Gamma'}(Hilb^2 S \times S) \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "\chi"] & H_0,
\end{tikzcd}$$

в которой $b:\ \mathrm{Bl}_{\Gamma'}(Hilb^2 S \times S) \to Hilb^2 S \times S$ – раздутие многообразия $Hilb^2 S \times S$ вдоль Γ', $\chi:\ \mathrm{Bl}_{\Gamma'}(Hilb^2 S \times S) \to H_0$ – естественный морфизм, определенный в [2, Теорема 1], а $\delta := \chi \circ i$ – композиция. При этом по построению $\delta = \delta' \circ \sigma_T:\ V \to \delta(V)$ – бирациональный изоморфизм.

Поскольку схемы Σ и T неособы и T – дивизор в Σ, имеет место изоморфизм $\sigma_T^{-1}(\Sigma)_{prop} \cong \Sigma$, так что $\Sigma = V \times_{H_0} V \hookrightarrow V$. Поэтому, так как Σ – дивизор в V, имеем диаграмму раздутий

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "bl_\Sigma"', "\simeq"] & H \arrow[d, "\sigma_Y"] \\ V \arrow[r, "\delta"'] & H_0, \end{tikzcd}$$

так что $\Sigma \cong bl_\Sigma^{-1}(\Sigma)$. По построению $\eta(\Sigma) \subset D_Y$, и нетрудно видеть, что $\eta:\ \Sigma \to \eta(\Sigma)$ – изоморфизм. Далее, прямая проверка показывает, что дифференциал отображения η инъективен в точках дивизора Σ на V. Кроме того, по построению $\eta:\ V \setminus \Sigma \to \eta(V \setminus \Sigma)$ – изоморфизм. Тем самым, в силу гладкости V и Σ, морфизм $\eta:\ V \to H$ – вложение.

Отсюда вытекает описание дивизора Ψ на X как расслоенного произведения

$$\Psi = V \times_H X.$$

В частности, естественная проекция $\Psi \to V$ есть проективное расслоение со слоем P^3. Как следствие, Ψ является гладким дивизором в X.

2) По определению схемы Φ $g(\Phi) = V$. Пусть $[E] \in \Psi$, $y \in Z_3$ и $Z_3 \setminus y$ содержится в одном слое проекции $p:\ S \to P^1$. Рассмотрим следующую диаграмму пучков на S:

$$\begin{tikzcd} & & & I_y \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & O_S(0,-1) \arrow[r] & E \arrow[r] & I_{Z_3}(0,1) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\ & & & O_h(-2) & \end{tikzcd}$$

Из точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(O_h(-2), O_S(0,-1)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1(I_{Z_3}(0,1), O_S(0,-1)) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1(I_y, O_S(0,-1)) \to 0$$

групп Ext, в которой $\mathrm{Ext}^1(O_h(-2), O_S(0,-1)) = k^3$, следует, что для фиксированной схемы $Z_3 \subset S$ $[E] \in \Phi$ тогда и только тогда, когда элемент $\xi \in \mathrm{Ext}^1(I_{Z_3}(0,1), O_S(0,-1))$, задающий класс изоморфизма E, является образом ненулевого элемента $\xi' \in \mathrm{Ext}^1(O_h(-2), O_S(0,-1))$ при вложении α.

Пусть $pr_V:\ S \times V \to V$ – проекция. Пучок $Ext^1_{pr_V}(O_h(-2) \boxtimes O_V, O_S(0,-1) \boxtimes O_V)$ локально свободен на V ранга 3. Из приведенных выше рассуждений следует, что $\Phi \cong P(Ext^1_{pr_V}(O_h(-2) \boxtimes O_V, O_S(0,-1) \boxtimes O_V))$, то есть Φ гладко. □

Рассмотрим на $S \times X$ пучок

$$\mathcal{E} := (\mathrm{id}_S \times \sigma)^* \, \mathcal{E}_0,$$

где $\mathcal{E}_0$ – универсальное расширение (4). Из замечания параграфа 1 и определения пучка $\mathcal{E}$ вытекает следующий результат.

Теорема. *Пучок* $\mathcal{E} \mid S \times \{x\}$ *является* $H\_$*-стабильным для всех* $x \in X \setminus (D \cup \Phi)$.

Библиографический список

1. Сорокина, М. Е. Бирациональные свойства многообразий модулей полустабильных пучков ранга два на проективной плоскости [Текст]: дис. … к. физ.-мат. н. / М. Е. Сорокина. – Ярославль, 2006 – 77 с.

2. Тихомиров, А. С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности [Текст] / А. С. Тихомиров // Изв. РАН. Сер. матем. – 1997. – Т.61, вып. 6. – С. 153–180.

3. Ellingsrud, G., Göttsche, L. Variation of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization. – J. Reine Angew. Math., 1995. – V. 467. P. 1–49.

4. Ellingsrud, G., StrØmme, S.A. Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of P^2, - J. Reine Angew. Math., 1993. V. 441. P. 33–44.

5. Yoshioka, K. The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on P^2. – J. Reine Angew. Math., 1994. V. 453. P. 193–220.

6. Yoshioka, K. The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on a ruled surface. – Math. Ann., 1995. V. 302. P. 519–540.