УДК 517.9

Е. Б. Макарова

Начально-краевая задача для уравнений Кармана колебаний пологих оболочек со смешанным закреплением края

В настоящей статье излагается начально-краевая задача одной из моделей механики сплошных сред – модели Кармана колебаний пологих оболочек, край которых закреплен частично жестко, частично шарнирно, введено в рассмотрение функциональное пространство $\widetilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2)$, сформулированы и доказаны теоремы о дифференциальных свойствах приближений Бубнова – Галеркина.

Ключевые слова: уравнения Кармана, колебания пологой оболочки, краевые условия, начальные условия, приближения Бубнова – Галеркина.

E. B. Makarova

Entry-Boundary Problem for Karman's Equations of Fluctuations of Flat Covers with the Mixed Fastening of Edge

In the present article is represented an entry-boundary problem of one of models of mechanics of continuous environments – models of Karman of fluctuations of the flat covers which edge is fixed partially rigidly, partially jointed, the functional space is entered into consideration $\widetilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2)$, are formulated and proved theorems of differential properties of approximation of Bubnov – Galerkin.

Keywords: Karman's equations, fluctuation of a flat cover, regional conditions, entry conditions, approximation of Bubnov – Galerkin.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область на плоскости с границей $\Gamma \in C^2$, причем $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 являются объединениями связных компонент Γ. Все неограниченные компоненты Γ, если они есть, содержатся в Γ_1. Нелинейные колебания упругой пологой оболочки, проектирующейся на область Ω, при движении в сверхзвуковом потоке газа описываются следующей системой уравнений:

$$u_{tt} - \gamma \Delta u_{tt} + \varepsilon \Delta^2 u_t + \Delta^2 u - [u + f,\ v + \theta] + \rho u_{x_1} = Z\ , \qquad (1)$$

$$\Delta^2 v + [u + 2f,\ u] = 0 \qquad (2)$$

с краевыми условиями жесткого закрепления части края Γ_1

$$u|_{\Gamma_1} = \frac{du}{dn}|_{\Gamma_1} = 0,\ \ v|_{\Gamma_1} = \frac{dv}{dn}|_{\Gamma_1} = 0 \qquad (3)$$

и шарнирным закреплением части края оболочки Γ_2

$$u|_{\Gamma_2} = \left(\frac{d^2 u}{dn^2} - \mu\chi \frac{du}{dn}\right)|_{\Gamma_2} = 0,\ \ v|_{\Gamma_2} = \frac{dv}{dn}|_{\Gamma_2} = 0 \qquad (4)$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x). \tag{5}$$

Здесь: $\gamma,\ \varepsilon,\ \rho,\ \mu$ – заданные постоянные, $f,\ \theta,\ Z,\ u_0,\ u_1$ – заданные функции, n – направление внешней нормали, χ – кривизна контура Γ_2. Скобка $[\xi,\eta]$ представляет собой выражение вида

$$[\xi,\eta]=\xi_{x_1x_1}\eta_{x_2x_2}+\xi_{x_2x_2}\eta_{x_1x_1}-2\xi_{x_1x_2}\eta_{x_1x_2}. \tag{6}$$

Величина $u(x,t)$ – поперечный перегиб оболочки, $v(x,t)$ – функция напряжения, слагаемое $-\gamma\Delta u_{tt}$ моделирует инерцию поворота точки, $\varepsilon\Delta^2 u_t$ отвечает за описание внутреннего трения материала оболочки.

§ 2. Определение пространства $\widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$

Пусть Ω – область на плоскости R^2 с границей $\Gamma\in C^3$, обладающей ограниченными четвертыми производными. Обозначим через $A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ множество всех функций $w\in\tilde{N}^3(\Omega)$, обладающих ограниченными производными четвертого порядка, равных нулю в некоторой окрестности Γ_1 и финитных в случае неограниченности Ω и удовлетворяющих условию (4). На функциях $u,v\in A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ введем билинейную форму $(u,v)_{A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)}=(\Delta^2u,v)_{L_2(\Omega)}+(u,v)_{L_2(\Omega)}$.

Пополнение $A(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ по норме

$$\| w\|_{\tilde{I}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)}=\sqrt{(\Delta^2w,w)_{L_2(\Omega)}+(w,w)_{L_2(\Omega)}} \tag{5}$$

назовем пространством $\widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$ [1].

§ 3. Задача на собственные значения

Рассмотрим задачу на собственные значения для бигармонического оператора

$$\Delta^2\xi=\lambda\xi, \tag{6}$$

$$\xi\big|_{\tilde{A}_1}=\frac{d\xi}{dn}\bigg|_{\Gamma_1}=0,\quad \xi\big|_{\tilde{A}_2}=\left(\frac{d^2\xi}{dn^2}-\mu\chi\frac{d\xi}{dn}\right)\bigg|_{\tilde{A}_2}=0. \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть граница ограниченной области Ω $\Gamma\in\tilde{N}^3$ и имеет ограниченные производные четвертого порядка. Тогда задача (6), (7) имеет обобщенный дискретный спектр $\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le\ldots\le\lambda_m\le\ldots$ из счетного числа стремящихся к бесконечности положительных собственных значений, каждому из которых соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций ξ_l. Собственные функции ξ_l, $l=1,2,\ldots$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$ и полную ортогональную систему в $\widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$.

Доказательство непосредственно получаем из общей теоремы о спектре положительно определенного симметричного оператора [1].

Теорема 2. В условиях теоремы 1

$$\xi_l\in\widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)\cap H_2^4(\Omega),\quad l=1,2,\ldots$$

Доказательство. Пусть ξ_l – собственные функции краевой задачи (6), (7), тогда $\xi_l\in\widetilde{H}_2^2(\Omega,\mu;\Gamma_1,\Gamma_2)$. Положив в (6), (7) $f=\lambda_l\xi_l$, рассмотрим следующую краевую задачу

$$\Delta^2 \xi_l = f\,, \tag{8}$$

$$\xi_l\big|_{\tilde{A}_1} = \left.\frac{d\xi_l}{dn}\right|_{\Gamma_1} = 0,\ \ \xi_l\big|_{\tilde{A}_2} = \left.\left(\frac{d^2\xi_l}{dn^2} - \mu\chi\frac{d\xi_l}{dn}\right)\right|_{\tilde{A}_2} = 0\,. \tag{9}$$

Так как $\xi_l \in \widetilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2)$, то $\xi_l \in L_2(\Omega)$. Тогда и правые части в (8) $f \in L_2(\Omega)$, а значит, согласно [3], обобщенные решения краевой задачи (8), (9) $\xi_l \in H_2^4(\Omega)$. Теорема доказана.

§ 4. Определение приближений Бубнова – Галеркина

Приближения u^m функции u будем искать в виде $u^m(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j^m(t)\xi_j(x)$, где функции времени $a_j^m(t)$ определяются как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(u_{tt}^m - \gamma\Delta u_{tt}^m + \varepsilon\Delta^2 u_t^{\ m} + \Delta^2 u^m - [u^m + f, v^m + \theta] + \rho\frac{\partial u^m}{\partial x_1} - Z, \xi_i\right)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$i = 1, \ldots, m\,, \tag{10}$$

причем v^m находится по u^m как решение краевой задачи

$$\Delta^2 v^m = -[u^m + 2f, u^m],\ \ v^m\big|_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} = \left.\frac{dv^m}{dn}\right|_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} = 0 \tag{11}$$

с начальными данными

$$a_i^m(0) = (u_0, \xi_i)_{L_2(\Omega)},\ \ \dot{a}_i^m(0) = (u_1, \xi_i)_{L_2(\Omega)}. \tag{12}$$

Теорема 3. Пусть $f, \theta \in \tilde{N}([0, t_f], H_2^2(\Omega))$, $Z \in \tilde{N}([0, t_f], L_p(\Omega))$ для некоторого $p > 1$. Тогда найдется $t_0 > 0$ такое, что на отрезке $[0, t_0]$ существуют решения $a_j^m(t) \in \tilde{N}^2([0, t_0])$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (11) с начальными данными (12), а приближения Бубнова – Галеркина имеют следующие дифференциальные свойства:

$$u^m \in \tilde{N}^2\left([0, t_0], \widetilde{H}_2^2(\Omega, \mu; \Gamma_1, \Gamma_2)\right) \cap \tilde{N}^2\left([0, t_0], H_2^4(\Omega)\right),$$

$$v^m \in \tilde{N}\left([0, t_0], \overset{\circ}{H}{}_2^2(\Omega)\right).$$

Если $f_t \in \tilde{N}\left([0, t_f], H_2^2(\Omega)\right)$, то $v_t^m \in \tilde{N}\left([0, t_0], \overset{\circ}{H}{}_2^2(\Omega)\right)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы Коши – Пикара с учетом оценок, следующих из энергетического соотношения.

Выражаю огромную благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В. И. Седенко

Библиографический список

1. Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Высшая школа, 1977. – 431с.

2. Седенко В. И., Клитина, Н. А. Разрешимость в $H_4^2(\Omega)$ краевой задачи для бигармонического оператора с краевыми условиями смешанного края закрепления оболочки [Текст] / В. И. Седенко, Н. А. Клитина // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – №3. – 2008. – С. 22–25.

3. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман . – М. : Мир, 1970. – 720 с.