УДК 512.7

М. А. Заводчиков

О некотором семействе когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве. (Часть II)

В настоящей статье рассматривается схема модулей Гизекера – Маруямы $\mathbf{M} := \mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве P^3. Мы изучаем неприводимое семейство M пучков E из $\mathbf{M}$, для которых пучок $\mathrm{Q} = \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E}$ включается в точную тройку $0 \to \mathrm{Q}_0 \to \mathrm{Q} \to \mathrm{O}_m(-1) \to 0$, где Q_0 – артинов пучок длины 2, а m – прямая в P^3. Доказывается, что замыкание M в схеме модулей $\mathbf{M}$ лежит в замыкании множества N пучков из $\mathbf{M}$ таких, что $\mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} = \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y$, где x и y – различные точки в P^3.

Ключевые слова: компактификация, схема модулей, когерентный пучок ранга 2 без кручения, трехмерное проективное пространство.

M. A. Zavodchikov

About Some Family of Coherent Bunches of the Rank 2 without Torsion with Chern's Classes $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ on the Three-Dimensional Projective Space. (Part II)

In the present article is considered the scheme of modules of Gizeker – Marujama $\mathbf{M} := \mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(2;-1,2,0)$ stable coherent bunches without torsion of the rank 2 with Chern's classes $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ on the three-dimensional projective space P^3. We study the irreducible family M of bunches E from $\mathbf{M}$, for which the bunch $\mathrm{Q} = \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E}$ includes into the exact triplet $0 \to \mathrm{Q}_0 \to \mathrm{Q} \to \mathrm{O}_m(-1) \to 0$, where Q_0 – a bunch of length 2, and m – a straight line in P^3. It is proved that abridgement M in the scheme of modules $\mathbf{M}$ lies in abridgement of variety N bunches from $\mathbf{M}$ such as that $\mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} = \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y$, where x and y – different points in P^3.

Keywords: compactification, the scheme of modules, a coherent bunch of the rank 2 without torsion, three-dimensional projective space.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается схема модулей Гизекера – Маруямы $\mathbf{M} := \mathbf{M}_{\mathrm{P}^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве P^3. В статье [1] доказано, что множество

$$\mathrm{M} := \{\mathrm{E} \in \mathbf{M} \mid \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} \approx \mathrm{Q}\}, \tag{1}$$

$$0 \to \mathrm{Q}_0 \to \mathrm{Q} \to \mathrm{O}_m(-1) \to 0, \tag{2}$$

где Q_0 – артинов пучок длины 2, а m – некоторая прямая в P^3, неприводимо. Рассмотрим в $\mathbf{M}$ множество

$$\mathsf{N} := \{\mathsf{E} \in \mathsf{M} \mid \mathsf{E}^{\vee\vee}/\mathsf{E} \approx \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y, \text{где x и y – различные точки в } P^3\}. \qquad (3)$$

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. $\mathsf{M} \subset \overline{\mathsf{N}}$.

2. Включение множества M в $\overline{\mathsf{N}}$

В настоящем параграфе мы показываем, что $\mathsf{M} \subset \overline{\mathsf{N}}$. В силу неприводимости M нам достаточно убедиться в том, что общая точка $[\mathsf{E}] \in \mathsf{M}$ лежит в неприводимом множестве $\overline{\mathsf{N}}$. В схеме $\mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}}$, определенной в [1, формула 6] имеется открытое плотное множество $\mathrm{Q}uot^{**}$, определенное в [1, формула 13]. В схеме W (см. определение в [1] после диаграммы (20)) рассмотрим открытое плотное множество $W^{**} = W \times_{Quot_{\mathsf{M}}} \mathrm{Q}uot^{**}$. Обозначим через M^* образ множества W^{**} в схеме модулей M при модулярном морфизме f. По определению множество

$$\mathsf{M}^* \overset{sets}{=} \{\mathsf{E} \in \mathbf{M} \mid \mathsf{E}^{\vee\vee}/\mathsf{E} = \mathsf{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y, \text{где } x \notin m,\ y \notin m \text{ и } x \neq y\}. \qquad (4)$$

Рассмотрим схему $T := G \times G \times \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$, где G – грассманиан прямых в P^3. В этой схеме определим открытое множество $T' := \{(l, m, x_1, x_2) \in T \mid m$ и l скрещивающиеся прямые, $x_1, x_2 \notin m$, $x_1, x_2 \notin l$ и $x_1 \neq x_2\}$. Пусть $\xi_1 : \mathsf{P}^3 \times T' \to \mathsf{P}^3$, $\xi_2 : \mathsf{P}^3 \times T' \to T'$, $\xi_{12} : \mathsf{P}^3 \times T' \to \mathsf{P}^3 \times G$ и $\xi_{1345} : \mathsf{P}^3 \times T' \to \mathsf{P}^3 \times G \times \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$ – проекции. Обозначим через Γ график инциденции в $\mathsf{P}^3 \times G$. Рассмотрим пучок $\xi_{12}^* \mathsf{I}_\Gamma$ на $\mathsf{P}^3 \times T'$. Пусть $\varsigma_{12} : \mathsf{P}^3 \times G \times \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3 \to \mathsf{P}^3 \times G$, $\varsigma_{13} : \mathsf{P}^3 \times G \times \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3 \to \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$ и $\varsigma_{14} : \mathsf{P}^3 \times G \times \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3 \to \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$ – проекции. Пусть Δ – диагональ в $\mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$. Положим $\Gamma_1 := \xi_{12}^{-1}(\Gamma)$, $\Delta_1 := \xi_{13}^{-1}(\Delta)$ и $\Delta_2 := \xi_{14}^{-1}(\Delta)$ – прообразы этих множеств. На T' имеется пучок $\mathsf{A} := \mathsf{E}xt^1_{\xi_2}(\xi_{12}^* \mathsf{I}_\Gamma, \xi_{1345}^* \mathsf{I}_{\Gamma_1 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2}) \xi_1^* \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1))$. Прямые вычисления показывают, что $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) = \mathbf{k}^4$ и $\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) = 0$ для любой точки $t = (l, m, x_1, x_2) \in T'$. Тем самым, для произвольной точки $t \in T'$ замена базы дает, что $\mathsf{A} \otimes \mathbf{k}_t = \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1))$. Поэтому, согласно [2, Следствие 12.9], пучок A локально свободен ранга 4. Рассмотрим схему $\Omega := \mathbf{P}roj(\mathsf{A}) \xrightarrow{\gamma} T'$. Так как T' очевидно неприводимо, то в силу локальной свободы пучка A получаем, что Ω неприводимо.

Рассмотрим в Ω открытое плотное подмножество $\Omega^* := \{\omega = (l, m, x_1, x_2, <\xi>) \in \Omega \mid \xi \in \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) \setminus \delta(\mathrm{H}om(\mathsf{I}_l, \mathsf{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}))\}$, где δ – связывающий гомоморфизм в точной последовательности $\mathsf{E}xt$-групп: $0 \to \mathrm{H}om(\mathsf{I}_l, \mathsf{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) \xrightarrow{\upsilon} \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{O}(-1)) \to 0$. Из универсальных свойств пучка $\mathsf{E}xt^1_{\xi_2}(\xi_{12}^* \mathsf{I}_\Gamma, \xi_{1345}^* \mathsf{I}_{\Gamma_1 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2} \otimes \xi_1^* \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1))$ (см. [5]) следует, что на $\mathsf{P}^3 \times \Omega^*$ определен пучок E такой, что его ограничение $\mathsf{E}_\omega = \mathsf{E}_{|\mathsf{P}^3 \times \omega}$ на произвольную точку $\omega = (l, m, x_1, x_2, <\xi>) \in \Omega^*$ есть средний член расширения

$$0 \to \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1) \to \mathsf{E}_\omega \to \mathsf{I}_l \to 0. \qquad (5)$$

задаваемого элементом $\xi \in \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) \setminus \delta(\mathrm{H}om(\mathsf{I}_l, \mathsf{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}))$.

Рассмотрим модулярный морфизм $f:\Omega^* \to \mathbf{M}:\omega \mapsto [\mathrm{E}_\omega]$.

Предложение 1. *Образ* Ω^* *при модулярном морфизме* f *лежит в* M^*.

Доказательство. Выберем произвольную точку $\omega=(l,m,x_1,x_2,<\xi>)\in\Omega^*$. Покажем, что $\mathrm{E}_\omega\in\mathrm{M}^*$. Имеем каноническое вложение $\mathrm{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)\to\mathrm{O}(-1)$, коядром которого является пучок $\mathrm{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}$. Далее, точные тройки $0\to\mathrm{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)\to\mathrm{O}(-1)\to\mathrm{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}\to 0$ и (5) достраиваем до коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \mathcal{J}_l \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{J}_l \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_\omega \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[u] \arrow[r, "\epsilon"] & \mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[u, "s"] \arrow[r] & \mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0. \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Расширение $0\to\mathrm{O}(-1)\to\mathrm{F}\to\mathrm{I}_l\to 0$ задается элементом $\upsilon(\xi)\neq 0$, согласно определению Ω^*. Поэтому F – рефлексивный пучок (см. [4, Example 4.2.3]). Поэтому $\mathrm{F}=\mathrm{E}_\omega^{\vee\vee}$. Таким образом, пучок E включается в точную тройку $0\to\mathrm{E}_\omega\to\mathrm{E}_\omega^{\vee\vee}\to\mathrm{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}\to 0$. Тем самым, по определению $\mathrm{E}_\omega\in\mathrm{M}^*$. Поэтому $f(\Omega^*)\subset\mathrm{M}^*$. W

Предложение 2. *Морфизм* $f:\Omega^*\to\mathrm{M}^*$ *сюръективен.*

Доказательство. Покажем, что для любого наперед заданного класса изоморфизма пучка $[\mathrm{E}]\in\mathrm{M}^*$ существует точка $\omega=(l,m,x_1,x_2,<\xi>)\in\Omega^*$ такая, что $f(\omega)=[\mathrm{E}]$. Фиксируем пучок $\mathrm{E}\in\mathrm{M}^*$. Для любого $0\neq s\in\mathrm{H}^0(\mathrm{E}^{\vee\vee}(1))$ имеем $coker(s:\mathrm{O}\to\mathrm{E}^{\vee\vee}(1))=\mathrm{I}_l$, где l – прямая нулей сечения s [4, Example 4.2.3]. Тогда для общего сечения s пучок $\mathrm{E}\in\mathrm{M}^*$ включается в диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \mathcal{J}_l \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{J}_l \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[u] \arrow[r, "\epsilon"] & \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[u, "s"] \arrow[r] & \mathcal{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0. \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{7}
$$

По построению расширение $0 \to \mathrm{O}(-1) \to \mathrm{E}^{\vee\vee} \to \mathrm{I}_l \to 0$ нетривиально. Поэтому левая вертикальная тройка в (7) как расширение задается элементом $\xi \in \mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_l, \mathrm{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) \setminus \delta(\mathrm{H}om(\mathrm{I}_l, \mathrm{O}_m(-1) \oplus \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}))$ (см. определение Ω^*). Тем самым, левая вертикальная тройка в (7) совпадает с тройкой (5), где $\mathrm{E} = \mathrm{E}_\omega$ для $\omega = (l, m, x_1, x_2, <\xi>) \in \Omega^*$, то есть $[\mathrm{E}] = f(\omega)$.

Пусть m и l – скрещивающиеся прямые в P^3, x_1 и x_2 – точки в P^3, не лежащие ни на m, ни на l, и P^2 – произвольная плоскость, проходящая через l и не содержащая точек x_1 и x_2. Рассмотрим $\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3}$ – пучок

$$\mathrm{G} = \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \oplus \mathrm{O}_{\mathrm{P}^2}(-1) \tag{8}$$

и произвольное нетривиальное расширение

$$0 \to \mathrm{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \to \mathrm{X} \to \mathrm{G} \to 0. \tag{9}$$

Можно проверить, что для произвольного нетривиального расширения (9) пучок X является пучком без кручения ранга 1 с $c_1(\mathrm{X}) = 0$. Поэтому X – пучок идеалов I_Z некоторой подсхемы Z в P^3. Тогда тройка (9) включается в коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & k_{x_1} \oplus k_{x_2} \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[u] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_{m'} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_Z \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_m(-1) \oplus k_{x_1} \oplus k_{x_2} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & k_{x_1} \oplus k_{x_2} \arrow[u] & \\
 & & & & 0, \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{10}
$$

где λ – композиция проекции на прямое слагаемое $\mathcal{G} \xrightarrow{pr} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ и инъективного морфизма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$, рассматриваемого как сечение пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, нулями которого является некоторая прямая $m' \subset \mathbb{P}^2$. Из правой вертикальной последовательности этой диаграммы следует, что $Z = m \cup m'$ – распавшаяся коника, где прямые m и m' пересекаются в точке $m \cap \mathbb{P}^2$. Итак, имеем расширение

$$\vartheta : 0 \to \mathcal{I}_{m\cup x_1 \cup x_2}(-1) \to \mathcal{I}_{m\cup m'} \to \mathcal{G} \to 0. \tag{11}$$

Так как $l \subset \mathbb{P}^2$ и $x_1, x_2 \notin \mathbb{P}^2$, то однозначно с точностью до пропорциональности определена сюръекция $\eta : \mathcal{I}_l \to \mathcal{G}$, ядро которой есть пучок $\mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1)$. Тем самым, с учетом (8) получаем точную тройку:

$$0 \to \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{I}_l \xrightarrow{\eta} \mathcal{G} \to 0 \tag{12}$$

Точные тройки (11) и (12) достраиваются до коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{I}_l \arrow[r, "\eta"] \arrow[u] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}_{m\cup m'} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1) \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0, \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

в которой $\mathcal{E}$ – некоторый пучок ранга 2.

Рассмотрим пучок $\mathcal{F}$ из $\mathcal{N}$. Вычислив классы Черна пучка $\mathcal{F}^{\vee\vee}$, из [4] легко получить, что $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ включается в точную тройку:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{F}^{\vee\vee} \to \mathcal{I}_C \to 0,$$

где C – некоторая коника в $\mathbb{P}^3$. Нетрудно видеть, что существует плотное открытое подмножество $\mathcal{N}^*$ в $\mathcal{N}$ такое, что для $\mathcal{F}$ из $\mathcal{N}^*$ вышеуказанная тройка продолжается до коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \mathcal{I}_C \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathcal{I}_C \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^{\vee\vee} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[u] & \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, всякий пучок $\mathcal{F}$ из $\mathcal{N}^*$ включается в точную тройку

$$0 \to \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_C \to 0. \tag{14}$$

Поэтому, рассматривая в качестве такой тройки центральную горизонтальную тройку

$$0 \to \mathcal{I}_{x_1\cup x_2}(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{m\cup m'} \to 0. \tag{15}$$

из диаграммы (13) (действительно, в этой тройке $m \cup m'$ – коника), получаем следующее утверждение.

Предложение 3. *Всякий пучок* E *в диаграмме (13) содержится в* N^*.

Построим многообразие, параметризующее диаграммы (13). Для этого рассмотрим многообразие $X := \{(t = (l, m, x_1, x_2), \mathsf{P}^2) \in T' \times \breve{\mathsf{P}}^3 \mid l \subset \mathsf{P}^2\}$. Так как $T' = \{(l, m, x_1, x_2) \in T \mid m$ и l – скрещивающиеся прямые, $x_1, x_2 \notin m$, $x_1, x_2 \notin l$ и $x_1 \neq x_2\}$, то определены проекции $j_1 : \mathsf{P}^3 \times X \to \mathsf{P}^3$, $j_2 : \mathsf{P}^3 \times X \to X$, $j_{12} : \mathsf{P}^3 \times X \to \mathsf{P}^3 \times G$, $j_{13} : \mathsf{P}^3 \times X \to \mathsf{P}^3 \times G$, $j_{14} : \mathsf{P}^3 \times X \to \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$, $j_{15} : \mathsf{P}^3 \times X \to \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$, $j_{16} : \mathsf{P}^3 \times X \to \mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$ – проекции. Обозначим через Γ график инциденции в $\mathsf{P}^3 \times G$, через Δ – диагональ в $\mathsf{P}^3 \times \mathsf{P}^3$, а через $\Sigma = \{(x, \mathsf{P}^2) \in \mathsf{P}^3 \times \breve{\mathsf{P}}^3 \mid x \in \mathsf{P}^2\}$ – график инциденции в $\mathsf{P}^3 \times \breve{\mathsf{P}}^3$. Положим $\Gamma_{12} := j_{12}^{-1}(\Gamma)$, $\Gamma_{13} := j_{13}^{-1}(\Gamma)$, $\Delta_{14} := j_{14}^{-1}(\Delta)$, $\Delta_{15} := j_{15}^{-1}(\Delta)$, $\Sigma_{16} := j^{-1}(\Sigma)$. Пусть $\mathsf{K} := \mathsf{O}_{\Delta_{14}} \oplus \mathsf{O}_{\Delta_{15}} \oplus \mathsf{O}_{\Sigma_{16}})j_1^*\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1)$, $\mathsf{I}_{\Gamma_{13} \cup \Delta_{14} \cup \Delta_{15}})j_1^*\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1)$ и $\mathsf{B} := \mathsf{E}xt^1_{j_1}(\mathsf{K}, \mathsf{I}_{\Gamma_{13} \cup \Delta_{14} \cup \Delta_{15}})j_1^*\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1))$ – пучки на $\mathsf{P}^3 \times X$. Нетрудно видеть, что для дизъюнктных m, l, x_1 и x_2 верно равенство $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{G}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) = \mathbf{k}^8$. Тем самым, для произвольной точки $t \in T'$ замена базы дает, что $\mathsf{B} \otimes \mathbf{k}_t = \mathrm{E}xt^1(\mathsf{G}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1))$. Поэтому, согласно [3, Satz 1], пучок B локально свободен ранга 8 и $\Upsilon := \mathbf{P}roj(\mathsf{B})$ – многообразие (то есть целая схема), точками которой являются наборы $(l, m, x_1, x_2, \mathsf{P}^2, \tau)$, где $\tau \in \mathrm{E}xt^1(\mathsf{G}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1))$. Для произвольной точки $y = (l, m, x_1, x_2, \mathsf{P}^2, \tau) \in \Upsilon$ элемент τ определяет правую вертикальную тройку в (13), а сюръекция η в (13) определяется парой l, P^2, согласно сказанному выше. Таким образом, Υ есть искомое многообразие, параметризующее диаграммы (13). Тем самым, получаем отображение

$$\nu : \Upsilon \to \Omega : (l, m, x_1, x_2, \mathsf{P}^2, \tau) \mapsto (l, m, x_1, x_2, <\xi>), \qquad (16)$$

где ξ – элемент группы $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1))$, задающий центральную вертикальную тройку в диаграмме (13) как расширение. В силу того, что Υ и Ω – многообразия, отображение ν является морфизмом.

Предложение 4. *Отображение* $\tilde{\eta} : \mathrm{E}xt^1(\mathsf{G}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) \to \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1))$, *индуцированное морфизмом* η *в диаграмме (13), сюръективно. Тем самым, морфизм многообразий* ν, *определенный в (16), доминантен.*

Доказательство. Применим функтор $\mathrm{H}om(*, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1))$ к точной тройке (12), получим точную последовательность:

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{G}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) \xrightarrow{\tilde{\eta}} \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) \to \mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{x_1 \cup x_2}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}) \to$$

$$\to \mathrm{E}xt^2(\mathsf{G}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)) \to \mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_l, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}(-1)). \qquad (17)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{x_1 \cup x_2}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2})$. Применим к точной тройке $0 \to \mathsf{I}_{x_1 \cup x_2} \to \mathsf{O} \to \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2})$, получим:

$$\mathrm{H}om(\mathsf{I}_{x_1 \cup x_2}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}) \to \mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}) \to \mathrm{E}xt^1(\mathsf{O}, \mathsf{I}_{m \cup x_1 \cup x_2}) \to$$

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{x_1\cup x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})\to \mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})\to \mathrm{E}xt^2(\mathsf{O},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2}). \qquad (18)$$

$$\mathrm{E}xt^2(\mathsf{O},\mathsf{I}_{m\cup y_1\cup x_2})=\mathrm{H}^2(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})=0. \qquad (19)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})$.

$$\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2});\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})^\vee. \qquad (20)$$

Применим к точной тройке $0\to\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2}\to\mathsf{I}_m\to\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}\to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$, получим:

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to$$
$$\to\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,k_{y_1}\oplus k_{x_2}). \qquad (21)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$. Применим к точной тройке $0\to\mathsf{O}(-2)\to 2\mathsf{O}(-1)\to\mathsf{I}_m\to 0$, получим:

$$0\to\mathrm{H}om(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{H}om(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{H}om(\mathsf{O}(-2),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to$$
$$\to\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^1(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}). \qquad (22)$$

Так как $x_1\notin m$ и $x_2\notin m$, то $\mathrm{H}om(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=k^2$. $\mathrm{H}om(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=2\mathrm{H}^0(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=k^4$. $\mathrm{H}om(\mathsf{O}(-2),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathrm{H}^0(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=k^2$, $\mathrm{E}xt^1(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=2\mathrm{H}^1(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0.$ Отсюда и из (22) следует, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0. \qquad (23)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$. Применим к точной тройке $0\to\mathsf{O}(-2)\to 2\mathsf{O}(-1)\to\mathsf{I}_m\to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{O}(-2),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^2(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}). \qquad (24)$$

$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{O}(-2),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathrm{H}^1(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0$, $\mathrm{E}xt^2(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=2\mathrm{H}^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0$. Поэтому

$$\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0. \qquad (25)$$

По двойственности Серра имеем:

$$\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})^\vee=\mathbf{k}^6. \qquad (26)$$

Используя (23), (25), (26) и (21), получаем, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathbf{k}^6. \qquad (27)$$

Из (20) следует, что

$$\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})=\mathbf{k}^6. \qquad (28)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{O},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})$ из (18).

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{O},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})=\mathrm{H}^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})=\mathbf{k}^2. \qquad (29)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})$ из (18).

$$\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})=\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})^\vee. \qquad (30)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$. Для этого применим к точной тройке $0\to\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2}\to\mathsf{I}_m\to\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}\to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to$$
$$\to\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^3(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}). \tag{31}$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$. Применим к точной тройке $0\to\mathsf{O}(-2)\to 2\mathsf{O}(-1)\to\mathsf{I}_m\to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{O}(-2),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to$$
$$\to\mathrm{E}xt^2(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2}). \tag{32}$$

$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{O}(-2),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathrm{H}^1(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0$, $\mathrm{E}xt^2(2\mathsf{O}(-1),\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathrm{H}^2(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0$. Следовательно,

$$\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=0. \tag{33}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{E}xt^3(\mathsf{I}_m,\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2});\mathrm{H}om(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_m)=0. \tag{34}$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})$. По двойственности Серра имеем:

$$\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathrm{H}om(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})^{\vee}=\mathbf{k}^2. \tag{35}$$

Используя (33), (34), (35) и точную последовательность (31), заключаем, что $\mathrm{E}xt^2(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})=\mathbf{k}^2$. Из (30) следует, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})=\mathbf{k}^2. \tag{36}$$

Используя то, что $\mathrm{H}om(\mathsf{I}_{x_1\cup x_2},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2})=0$, равенства (19), (28), (29), (36) и точную последовательность (18), заключаем, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{x_1\cup x_2}(-1),\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))=\mathbf{k}^6. \tag{37}$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathsf{G},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))$ из (17). По двойственности Серра, имеется равенство:

$$\mathrm{E}xt^2(\mathsf{G},\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))=\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{G}(-3))^{\vee}. \tag{38}$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{G}(-3))$. Применим к точной тройке (8) функтор $\mathrm{H}om(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},*)$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{H}om(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{O}_{\mathsf{P}^2}(-4))\to\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathbf{k}_{x_1}\oplus\mathbf{k}_{x_2})\to$$
$$\to\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{G}(-3))\to\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{O}_{\mathsf{P}^2}(-4)). \tag{39}$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{O}_{\mathsf{P}^2}(-4))$. Применим к точной тройке $0\to\mathsf{O}(-5)\to\mathsf{O}(-4)\to\mathsf{O}_{\mathsf{P}^2}(-4)\to 0$ функтор $\mathrm{H}om(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},*)$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{O}(-4))\to\mathrm{E}xt^1(\mathsf{I}_{m\cup x_1\cup x_2},\mathsf{O}_{\mathsf{P}^2}(-4))\to$$

$$\to \mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}(-5)). \qquad (40)$$

По двойственности Серра $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}(-4)) = \mathrm{E}xt^2(\mathcal{O}, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2})^{\vee} = \mathrm{H}^2(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}) = 0.$ Аналогично, $\mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}(-5)) = \mathrm{E}xt^1(\mathcal{O}, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(1))^{\vee} = \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(1)) = 0.$ Следовательно, из (40) получаем, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)) = 0. \qquad (41)$$

Вычислим $\mathrm{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4))$. Для этого применим к точной тройке $0 \to \mathcal{O}(-5) \to \mathcal{O}(-4) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4) \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, *)$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}(-4)) \to \mathrm{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)) \to$$
$$\to \mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}(-5)). \qquad (42)$$

По двойственности Серра имеем $\mathrm{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}(-4)) = \mathrm{E}xt^3(\mathcal{O}, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2})^{\vee} = = \mathrm{H}^3(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2})^{\vee} = 0$. Аналогично, $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}(-5)) = \mathrm{E}xt^2(\mathcal{O}, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, (1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}) = 0$. Из (42) заключаем, что

$$\mathrm{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)) = 0. \qquad (43)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2} \to \mathcal{I}_m \to \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2} \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2})$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_m, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \to \mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \to$$
$$\to \mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) \to \mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_m, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}). \qquad (44)$$

$\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_m, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = 0$ (см. (23)) и $\mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_m, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = 0$ (см. (25)). Так как $\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathbf{k}^6$, то, используя (44), получаем, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathbf{k}_{x_1} \oplus \mathbf{k}_{x_2}) = \mathbf{k}^6. \qquad (45)$$

Используя (41), (43), (45) и точную последовательность (39), получаем, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}, \mathcal{G}(-3)) = \mathbf{k}^6. \qquad (46)$$

Из (38) следует, что

$$\mathrm{E}xt^2(\mathcal{G}, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) = \mathbf{k}^6. \qquad (47)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))$ из (17). Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{O}(-2) \to 2\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{I}_l \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))$, получим точную последовательность

$$\mathrm{E}xt^1(\mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) \to \mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) \to$$
$$\to \mathrm{E}xt^2(2\mathcal{O}(-1), \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)). \qquad (48)$$

$\mathrm{E}xt^1(\mathcal{O}(-2), \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(1)) = 0$ и $\mathrm{E}xt^2(2\mathcal{O}(-1), \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) = 2\mathrm{H}^2(\mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}) = 0$. Из (48) следует, что

$$\mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1)) = 0. \qquad (49)$$

Таким образом, используя (37), (47), (49), точную последовательность (17) можно записать в виде $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{G},\mathrm{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))\xrightarrow{\tilde{\eta}}\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_l,\mathrm{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))\to\mathbf{k}^6\to\mathbf{k}^6\to 0$. Отсюда немедленно следует, что отображение $\tilde{\eta}$ – сюръекция. Поэтому морфизм ν доминантен.

Обозначим через Υ^* прообраз при морфизме ν плотного открытого множества Ω^* в Ω. В силу предложения 4 Υ^* является открытым плотным подмножеством в Υ и морфизм $\nu:\Upsilon^*\to\Omega^*$ доминантен. Отсюда ввиду предложения 2 и того, что множество M неприводимо и M^* открыто и плотно в M, следует, что $f\circ\nu(\Upsilon^*)$ плотно в M:

$$\overline{f\circ\nu(\Upsilon^*)}=\mathrm{M}. \qquad (50)$$

Заметим, что по построению $f\circ\nu:\Upsilon\to\mathrm{M}^*$ есть отображение $\nu\mapsto[\mathrm{E}]$, где E – пучок в диаграмме (13), определенный данными $\upsilon\in\Upsilon^*$. Поэтому, в силу предложения 3, получаем $f\circ\nu(\Upsilon^*)\subset\mathrm{M}^*$. Так как M^* плотное и открытое в M, то из (50) следует $\mathrm{M}\subset\overline{\mathrm{N}}$. Тем самым, получаем теорему 1 – основной результат настоящей статьи.

Библиографический список

1. Заводчиков, М. А. О некотором семействе когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$, $c_3=0$ на трехмерном проективном пространстве. I [Текст] / М. А. Заводчиков // Ярославский педагогический вестник. Серия «Естественные науки». – № 3. – 2011.
2. Хартсхорн, Р. Алгебраическая геометрия [Текст] / Р. Хартсхорн. – М. : Мир, 1981.
3. Banica C., Putinar M., Schumacher G. Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Rӓume. / C. Banica, M. Putinar, G. Schumacher // Math. Ann. 250, 1980, 135–155.
4. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves / R. Hartshorne // Math. Ann. 254, 1980, 121–176.
5. Lange H. Universal families of extentions / H. Lange // Journal of algebra 83, 1983, 101–112.