УДК 517.9

А. В. Синчуков

Исследование устойчивости решений системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами

В статье обобщен метод Ляпунова исследования устойчивости решения системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка на случай системы с периодическими коэффициентами

Ключевые слова: устойчивость, константа Ляпунова, линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами.

A. V. Sinchukov

Research of Stability Solutions of the System of Two Linear Differential Equations of the First Order with Periodic Factors

In the article is generalized Lyapunov's research method of stability of the solution of the system of two linear differential equations of the first order on a case of the system with periodic factors.

Keywords: stability, Lyapunov's constant, linear differential equations with periodic factors.

Цель настоящей заметки – распространение метода Ляпунова на систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2; \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}(t)$ – вещественные, интегрируемые, кусочно-непрерывные, периодические с периодом $T > 0$ функции вещественного переменного t.

Систему (1) запишем в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$.

Известно [2], что система (1), коэффициенты $a_{ij}(t)$ которой ограничены с помощью ортогонального преобразования с периодическими коэффициентами, может быть приведена к виду, в котором элементы побочной диагонали матрицы коэффициентов являются знакопостоянными функциями. Ввиду этого далее предполагаем функции $a_{12}(t), a_{21}(t)$ знакопостоянными. Рассматривая интегралы от элементов на главной диагонали матрицы коэффициентов по отрезку длины периода, введем обозначения:

$$\int_0^T a_{11}(t)dt = \alpha, \int_0^T a_{22}(t)dt = \beta.$$

Не нарушая общности рассуждений, предполагаем что $\alpha \geq \beta$.

Выполняя подстановку

$$x_1 = y_1 \exp\int_0^t a_{11}(z)\,dz,$$
$$x_2 = y_2 \exp\int_0^t \left(a_{22}(z) + \frac{\alpha-\beta}{T}\right)dz, \qquad (3)$$

приведем систему (1) к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a(t)\,y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = b(t)\,y_1 - ry_2, \end{cases} \qquad (4)$$

где $r = \dfrac{\alpha-\beta}{T} \ge 0$, а через $a(t)$, $b(t)$ обозначены знакопостоянные, периодические с периодом T функции

$$a(t) = a_{12}(t)\exp\int_0^t \left(a_{22}(z) - a_{11}(z) + r\right)dz,$$
$$b(t) = a_{21}(t)\exp\int_0^t \left(a_{11}(z) - a_{22}(z) - r\right)dz. \qquad (5)$$

Преобразованную систему (4) запишем в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = B(t)\,\mathbf{y}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ b(t) & -r \end{pmatrix}$.

А. М. Ляпуновым разработан метод исследования ограниченности решения системы (1) по некоторым ее характеристикам, в частности – по константе Ляпунова A^*, равной половине следа (суммы элементов главной диагонали) матрицы монодромии.

Обозначая через $y_1^{(1)}(t), y_2^{(1)}(t)$ решение системы (4), соответствующее нулевым начальным условиям $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$, а через $y_1^{(2)}(t), y_2^{(2)}(t)$ решение системы (4), соответствующее начальным условиям $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$, запишем матрицант системы (6):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t) & y_1^{(2)}(t) \\ y_2^{(1)}(t) & y_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}.$$

В этом случае константа Ляпунова A^* равна:

$$A^* = \frac{1}{2} spY(T) = \frac{1}{2}\left(y_1^{(1)}(T) + y_2^{(2)}(T)\right). \qquad (7)$$

В [1] установлено, что собственные значения систем (1) и (4) связаны равенством

$$\lambda\{x_1, x_2\} = \lambda\{y_1, y_2\} - \frac{\alpha}{T}.$$

При этом характеристическое уравнение системы (4) имеет вид

$$\det\left(Y(T) - \lambda E\right) = 0.$$

Согласно формуле Лиувилля,

$$\det Y(T) = \exp\int_0^T spB(t)\,dt,$$

и, кроме того, $spB(t) = -r = \dfrac{\beta-\alpha}{T}$. Раскрывая определитель с учетом сделанных замечаний, приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - 2A^*\lambda + e^{\beta-\alpha} = 0, \qquad (8)$$

корни которого есть

$$\lambda_{1,2} = A^* \pm \sqrt{A^{*2} - e^{\beta-\alpha}}\ . \qquad (9)$$

При этом если $A^{*2} < e^{\beta-\alpha}$, то собственные числа комплексные и $\left|\lambda_{1,2}\right| = e^{\frac{\beta-\alpha}{2}}$; если $A^{*2} \ge e^{\beta-\alpha}$, то собственные числа вещественные и наибольшее из них по модулю $|\lambda|_{наиб} = \left|A^*\right| + \sqrt{A^{*2} - e^{\beta-\alpha}}$. Собственное число системы (4), согласно [1], есть $\lambda\{y_1, y_2\} = -\dfrac{1}{T}\operatorname{Re}\ln|\lambda|_{наиб}$. Известно, что при $\lambda\{y_1, y_2\} > \dfrac{\alpha}{T}$ решение устойчиво, а при $\lambda\{y_1, y_2\} < \dfrac{\alpha}{T}$ – неустойчиво. Следовательно, решение системы (1) оказывается устойчивым при $\operatorname{Re}\ln|\lambda|_{наиб} > -\alpha$, и неустойчивым при $\operatorname{Re}\ln|\lambda|_{наиб} < -\alpha$.

Обозначим через $X(t)$ матрицант системы (1) и заметим, что если

$$\int_0^T spA(t)\,dt = \alpha + \beta > 0,$$

то, в силу формулы Лиувилля, $\det X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$. Таким образом, при $\alpha+\beta>0$ тривиальное решение (1) неустойчиво.

Предполагаем далее $\alpha+\beta \le 0$. Тогда, в силу предположения о том, что $\alpha \ge \beta$, имеем:

$$\beta \le \alpha \le -\beta, \qquad (10)$$

откуда $\beta \le 0$ (если $\beta = 0$, то и $\alpha = 0$). Таким образом, в плоскости параметров α, β исследованию подлежит область

$$\beta \le \alpha \le -\beta,\ \beta \le 0. \qquad (11)$$

1. Если $A^{*2} < e^{\beta-\alpha}$, то имеем $\ln|\lambda|_{наиб} = \dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)$, то есть при $\alpha+\beta<0$ тривиальное решение системы (1) устойчиво (а при $\alpha+\beta>0$ – неустойчиво). Случай $\alpha+\beta=0$ требует особого рассмотрения.

2. Если $A^{*2} > e^{\beta-\alpha}$, то при условии $\operatorname{Re}\ln\left(\left|A^*\right| + \sqrt{A^{*2}-e^{\beta-\alpha}}\right) < -\alpha$ тривиальное решение (1) устойчиво. При этом последнее неравенство удобнее записать в виде

$$\sqrt{A^{*2}-e^{\beta-\alpha}} < e^{-\alpha} - \left|A^*\right|. \qquad (12)$$

Для осуществления условия (12) необходимо, чтобы $e^{-\alpha} - \left|A^*\right| > 0$, то есть $\left|A^*\right| < e^{-\alpha}$, что возможно только при $\alpha+\beta<0$, то есть в силу (10), $\beta<0$. Возводя при этом (12) в квадрат и разрешая его относительно модуля константы Ляпунова, имеем:

$$\left|A^*\right| < \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha} + e^{\beta}\right).$$

Правая часть полученного неравенства не превосходит $e^{-\alpha}$. Таким образом, при условии

$$\left|A^*\right| < \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha} + e^{\beta}\right), \alpha + \beta < 0 \qquad (13)$$

тривиальное решение (1) устойчиво. Аналогичными рассуждениями получаем, что тривиальное решение (1) неустойчиво при условиях

$$\left|A^*\right| > e^{\frac{\beta-\alpha}{2}}, \alpha + \beta \geq 0 \text{ или } \left|A^*\right| > \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha} + e^{\beta}\right), \alpha + \beta < 0. \qquad (14)$$

Следовательно, вопрос об устойчивости решений системы (1) сводится к оценке границ константы Ляпунова и исследовании полученных условий.

Библиографический список

1. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения [Текст] / А. М. Ляпунов. – М. : Изд-во АН СССР, 1948.
2. Якубович, В. А., Старжинский, В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения [Текст] / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1972.