

Н. И. Перов

### Устойчивые, хаотические и неустойчивые, регулярные траектории в ограниченной задаче 10 тел

Рассматривается небесномеханическая модельная задача 10 тел. 9 основных тел с произвольными массами образуют центральную конфигурацию, а 10 тело с нулевой массой находится в одной из точек либрации данной динамической системы (малое тело вращается с той же угловой скоростью, что и основные тела). Определяются положения основных тел, положения точек либрации – места локализации тел с нулевой массой – условия устойчивости точек либрации, условия устойчивости динамической системы. Указываются возможные астрономические приложения данной (ограниченной) задачи 10 тел.

**Ключевые слова:** небесная механика, задача  $N$  тел, центральные конфигурации, точки либрации, устойчивость движения, хаос, порядок.

N. I. Perov

### Steady, Chaotic and Unstable, Regular Trajectories in the Limited Problem of 10 Bodies

In the article is considered a sky-mechanics modeling problem 10 bodies 9 basic bodies, with any weights, form the central configuration, and the 10-th body, with zero weight, is in one of libration points of the given dynamic system (a small body rotates with the same angular speed, as the basic bodies). Are determined positions of the basic bodies, positions of libration points - places of localization of bodies with zero weight, stability conditions of libration points, conditions of stability of the dynamic system are defined. Possible astronomical appendices of the given (limited) problem of 10 bodies are specified.

**Keywords:** sky mechanics, problem  $N$  of bodies, central configurations, libration points, stability of movement, chaos, an order.

#### Введение

В статье обобщаются результаты, полученные в работах автора [8, 11, 12, 13]. В работе Албуи и Шенсине [2] подчеркивается, что гомографические движения в ньютоновской задаче  $N$  тел, то есть движения, для которых конфигурация тел с течением времени остается подобна самой себе, классически определяются в два этапа. Первый этап, не представляющий сложностей только для плоской задачи, нацелен на исключение скоростей тел. Второй этап, чрезвычайно сложный, если рассматриваются хотя бы четыре тела, состоит в решении полученных уравнений. При этом авторы считают, что результаты, собранные у Уинтнера [10], представляют собой удовлетворительное решение первого этапа.

Л. Е. Райхл [9] выделяет три основных понятия, существенных для понимания динамического поведения консервативных систем. Первое – идея глобальных симметрий – позволяет ограничить динамический поток рассматриваемой системы на поверхности фазового пространства с меньшими размерностями. Если число пространственно-временных симметрий (очевидных и «скрытых») совпадает с числом степеней свободы, то система считается интегрируемой. Второе понятие – нелинейный резонанс. Как было показано А. Н. Колмогоровым, В. И. Арнольдом, Ю. Мозером [1], при добавлении к гамильтониану малого члена, нарушающего симметрию, большая часть фазового пространства продолжает вести себя так, словно симметрия по-прежнему существует. Однако в тех областях, где нарушающий симметрию член приводит к появлению резонанса между степенями свободы, не связанными ранее, характер динамики системы начинает изменяться – появляются чрезвычайно сложные структуры. Третье понятие – хаос, или сильная зависимость системы от начальных условий. Для тех классических систем, где симметрии могут нарушаться путем добавления соответствующих малых членов, хаос, в первую очередь, возникает в окрестности нелинейных резонансов. По мере роста

величины нарушающего симметрию члена и размера областей резонанса все большие области фазового пространства становятся хаотическими.

Задачи небесной механики во многих случаях близки к консервативным. Одна из причин невозможности аналитического построения решений состоит в том, что динамические задачи, описываемые регулярными уравнениями, могут иметь решения нерегулярные (или «почти нерегулярные») во времени. В этом случае говорят о детерминированном хаосе. А. Д. Морозов [7] определяет хаос следующим образом. Отображение  $f$  называют хаотическим, если  $f$  имеет положительный показатель Ляпунова. Автор работы [7] рассматривает сценарии перехода к нерегулярному аттрактору (детерминированному хаосу) и обращает внимание на то, что в численных экспериментах возможные устойчивые режимы в указанной окрестности трудно обнаружить по следующим причинам: области притяжения этих режимов очень тонкие; периоды этих движений очень большие; существуют вычислительные погрешности и погрешности численного метода.

В классической монографии Ю. Мозера [6] на примере задачи трех тел исследуются хаотические орбиты.

В монографии А. Гориэли [3] обсуждаются вопросы интегрируемости и неинтегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение динамических систем. Автор [3] связывает неинтегрируемость динамических систем с существованием нерегулярного поведения, а некоторые аспекты динамики нелинейных систем исследуются в рамках анализа поведения особых точек.

Заметим, что с помощью программ аналитических вычислений, таких как «MAPLE-13», в настоящее время удастся провести огромную вычислительную работу и проанализировать многие ранее трудно решаемые задачи.

Ниже рассматривается небесномеханическая модельная задача  $N+1$  тел ( $N=9$ ). 9 основных тел с произвольными массами образуют центральную конфигурацию, а 10 тело с нулевой массой находится в одной из точек либрации данной динамической системы (малое тело вращается с той же угловой скоростью, что и основные тела). Определим положения основных тел, положения точек либрации – *места локализации тел с нулевой массой* – условия устойчивости точек либрации, условия устойчивости динамической системы. Укажем на возможные астрономические приложения этой (ограниченной) задачи 10 тел.

Для определенности полагаем, что тело с массой  $m_1$  является самым массивным в системе, по крайней мере, масса этого тела не меньше массы остальных тел, а массы остальных тел попарно равны.

$$m_1 > m_j, j=1, \dots, N, (N=10), (1)$$

$$m_2 = m_9, m_3 = m_8, m_4 = m_7, m_5 = m_6. (2)$$

10 тело может находиться как вблизи тела с массой  $m_1$ , так и вблизи отрезка, соединяющего тела с массами  $m_5$  и  $m_6$ .

В дальнейшем, при численных расчетах, за единицы массы и длины примем величины:  $m_1=1, R_2=1$ . Единицу времени выберем из условия:  $G=1$ .

### Определение положений основных тел

При ньютоновском законе взаимодействия (притяжения) основных 9 тел их уравнения движения, в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы, примут вид

$$d^2 \mathbf{R}_i / dt^2 = - \sum_{j=1}^{j=9} \{ G m_j (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) / |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3 \}, (i, j=1, \dots, 9, i \neq j), (3)$$

Здесь  $\mathbf{R}_i$  – радиусы-векторы основных тел в инерциальной системе отсчета, начало которой совпадает с центром масс (С) рассматриваемой динамической системы,  $G$  – гравитационная постоянная.

Причем полагаем,  $R_2=R_9, R_3=R_8, R_4=R_7, R_5=R_6$ .

Из определения центральной конфигурации [10] следует

$$d^2 \mathbf{R}_i / dt^2 = -\omega^2 \mathbf{R}_i, i=1, \dots, 9, (4)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения системы.

Из условия того, что для *центральной конфигурации* проекция ускорения  $i$ -го тела  $d^2 \mathbf{R}_i / dt^2$  на направление  $\mathbf{R}_{i\perp}$ , ортогональное радиусу-вектору  $\mathbf{R}_i$  этого тела, равна 0, имеем

$$d^2 \mathbf{R}_i / dt^2 \cdot \mathbf{R}_{i\perp} = 0, i=1, \dots, 9, (5)$$

Из уравнений (3)–(5), с учетом уравнения, определяющего положение центра масс ( $\mathbf{R}_C$ ) системы,

$$\sum_{i=1}^{i=9} m_i \mathbf{R}_i = \sum_{i=1}^{i=9} m_i \mathbf{R}_C = 0, \quad (6)$$

найдем радиус-векторы положений основных тел для данной центральной конфигурации в выбранной инерциальной системе отсчета и значение угловой скорости  $\omega$ .

Для эффективного выбора начальных приближений за искомые параметры примем углы при точке  $C$  между направлениями на основные (соседние) тела –  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}$ , – углы при основных телах между направлениями на соседнее тело (с большим номером) и направлением на точку  $C$  –  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  – и значение массы 5 тела  $m_5$ , – всего 9 неизвестных, при этом  $m_5 = m_6$

Вследствие симметрии задачи значения соответствующих параметров тел с массами  $m_9, m_8, m_7, m_6$  будут совпадать со значениями параметров, определенными для тел с массами  $m_2, m_3, m_4, m_5$  (см. примеры).

### Определение положений точек либрации

Уравнение движения точки либрации  $L'$  – тела с нулевой массой, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс системы, с угловой скоростью  $\omega$ , – с учетом симметрии задачи, представим в форме.

$$d^2 \mathbf{R}_L / dt^2 = -Gm_1 / (R_L - R_1)^2 \mathbf{R}_L / R_L - 2Gm_2 \cos(\angle CLm_2) / (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_L)^2 \mathbf{R}_L / R_L - 2Gm_3 \cos(\angle CLm_3) / (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_L)^2 \mathbf{R}_L / R_L - 2Gm_4 \cos(\angle CLm_4) / (\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_L)^2 \mathbf{R}_L / R_L - 2Gm_5 \cos(\angle CLm_5) / (\mathbf{R}_5 - \mathbf{R}_L)^2 \mathbf{R}_L / R_L. \quad (7)$$

Очевидно,

$$\cos(\angle CLm_2) = (R_L - R_2 \cos \alpha_{12}) / r_{2L};$$

$$r_{2L}^2 = R_L^2 + R_2^2 - 2R_L R_2 \cos \alpha_{12};$$

$$\cos(\angle CLm_3) = (R_L - R_3 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23})) / r_{3L};$$

$$r_{3L}^2 = R_L^2 + R_3^2 - 2R_L R_3 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23});$$

$$\cos(\angle CLm_4) = (R_L - R_4 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34})) / r_{4L};$$

$$r_{4L}^2 = R_L^2 + R_4^2 - 2R_L R_4 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34});$$

$$\cos(\angle CLm_5) = (R_L - R_5 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{45})) / r_{5L};$$

$$r_{5L}^2 = R_L^2 + R_5^2 - 2R_L R_5 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{45}).$$

Для исследуемой центральной конфигурации, аналогично уравнению (4), имеем соотношение для точки либрации  $L'$

$$d^2 \mathbf{R}_L / dt^2 = -\omega^2 \mathbf{R}_L, \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) дают

$$\omega^2 = Gm_1 / (R_L - R_1)^2 / R_L + 2Gm_2 \cos(\angle CLm_2) / (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_L)^2 / R_L + 2Gm_3 \cos(\angle CLm_3) / (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_L)^2 / R_L + 2Gm_4 \cos(\angle CLm_4) / (\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_L)^2 / R_L + 2Gm_5 \cos(\angle CLm_5) / (\mathbf{R}_5 - \mathbf{R}_L)^2 / R_L. \quad (9)$$

Используя известные величины  $\omega, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_5$ , вычисленные выше, найдем положение точки (точек) либрации  $L'$  ( $\mathbf{R}_L$ ).

Подобным образом вычисляется и положение точки (точек) либрации ( $L''$ ) с учетом смены знаков в соответствующих слагаемых уравнений (8) и (9) (см. пример).

### Исследование устойчивости точек либрации аналитическим методом

Составим уравнение возмущенного движения точки  $L_s$  в неинерциальной системе отсчета, вращающейся равномерно с угловой скоростью  $\omega$ , начало которой связано с начальным (невозмущенным) положением точки либрации  $L$ .

$$d^2 \mathbf{R}_{L_s} / dt^2 = \mathbf{A}_{L_s} + 2[\mathbf{V}_{L_s}, \boldsymbol{\omega}] + [\boldsymbol{\omega}, [\mathbf{R}_{L_s}, \boldsymbol{\omega}]]. \quad (10)$$

Аналогично случаю исследования устойчивости точки либрации  $L$  центральной конфигурации четырех тел [12] имеем в первом приближении для ускорения  $\mathbf{A}_{L_s}$  с учетом возмущений

$$\mathbf{A}_{L_s} \approx \mathbf{A}_L + (\partial \mathbf{A}_L / \partial \mathbf{r}_{L_s}) \cdot \mathbf{r}, \quad (11)$$

Здесь

$$\mathbf{A}_L = -\omega^2 \mathbf{R}_L \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_{L_s} = -G \sum_{n=1}^{n=9} m_n (\mathbf{R}_{L_s} - \mathbf{R}_n) / |\mathbf{R}_{L_s} - \mathbf{R}_n|^3, \quad n=1, \dots, 9. \quad (13)$$

Для определенности выберем вращающиеся с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  две прямоугольные системы координат с параллельными осями. Начало первой системы координат  $CXYZ$  совпадает с центром масс системы, а начало второй  $Lxyz$  – с невозмущенным положением точки либрации  $L$  ( $L'$ ). Разности векторов в уравнении (13) запишем в форме

$$\mathbf{R}_{Ls} - \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_L + r_{Ls} \mathbf{R}_n = -R_L \mathbf{i} + x_{Ls} \mathbf{i} + y_{Ls} \mathbf{j} + z_{Ls} \mathbf{k} - X_n \mathbf{i} - Y_n \mathbf{j}, \quad n=1, \dots, 9, \quad (14)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные векторы, определяющие соответствующие направления в пространстве-времени параллельных осей выбранных двух прямоугольных систем координат. В этом разделе предполагаем, что основные тела движутся с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  в плоскости  $CXY$  (равномерно вращаются вокруг оси  $CZ$ ).

В неинерциальной системе отсчета  $CXY$  невозмущенные значения координат основных тел  $m_1, \dots, m_9$  найдем из соотношений

$$\begin{aligned} X_1 &= R_1, \quad Y_1 = 0; \quad X_2 = R_2 \cos \alpha_{12}, \quad Y_2 = R_2 \sin \alpha_{12}; \\ X_3 &= R_3 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23}), \quad Y_3 = R_3 \sin(\alpha_{12} + \alpha_{23}); \\ X_4 &= R_4 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34}), \quad Y_4 = R_4 \sin(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34}); \\ X_5 &= R_5 \cos(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{45}), \quad Y_5 = R_5 \sin(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{45}). \\ X_6 &= X_5, \quad Y_6 = -Y_5; \quad X_7 = X_4, \quad Y_7 = -Y_4; \quad X_8 = X_3, \quad Y_8 = -Y_3; \quad X_9 = X_2, \quad Y_9 = -Y_2. \end{aligned} \quad (15)$$

С помощью пакета прикладных программ “MAPLE™13” (а также – «вручную») нетрудно показать, что после соответствующих дифференцирований и скалярных умножений векторов при  $x_{Ls}=0, y_{Ls}=0, z_{Ls}=0$  получим

$$\gamma_x = ((\partial \mathbf{A}_{Ls} / \partial x_{Ls}) \cdot \mathbf{i}) = \frac{2Gm_1}{(R_L + X_1)^3} + \sum_{n=2}^{n=5} 2Gm_n \frac{2R_L^2 + 4R_L X_n + 2X_n^2 - Y_n^2}{(R_L^2 + 2R_L X_n + X_n^2 + Y_n^2)^{5/2}}, \quad (16)$$

$$\gamma_y = ((\partial \mathbf{A}_{Ls} / \partial y_{Ls}) \cdot \mathbf{j}) = -\frac{Gm_1}{(R_L + X_1)^3} - \sum_{n=2}^{n=5} 2Gm_n \frac{R_L^2 + 2R_L X_n + X_n^2 - 2Y_n^2}{(R_L^2 + 2R_L X_n + X_n^2 + Y_n^2)^{5/2}}, \quad (17)$$

$$\gamma_z = ((\partial \mathbf{A}_{Ls} / \partial z_{Ls}) \cdot \mathbf{k}) = -\frac{Gm_1}{(R_L + X_1)^3} - \sum_{n=2}^{n=5} 2Gm_n \frac{1}{(R_L^2 + 2R_L X_n + X_n^2 + Y_n^2)^{3/2}}. \quad (18)$$

Очевидно,

$$\gamma_x + \gamma_y + \gamma_z = 0. \quad (19)$$

Замечательное тождество (19) вытекает из общих свойств рассматриваемого силового поля и симметрии задачи (17).

Таким образом, от системы уравнений (10)–(19) приходим к 3 дифференциальным уравнениям 2-го порядка, описывающим движение малого тела в окрестности точки либрации  $L$  ( $L'$ ).

$$\ddot{x} - (\gamma_x + \omega^2)x - 2\omega\dot{y} = 0, \quad (20)$$

$$\ddot{y} - (\gamma_y + \omega^2)y + 2\omega\dot{x} = 0, \quad (21)$$

$$\ddot{z} - \gamma_z z = 0. \quad (22)$$

Обратим внимание, что на основании уравнения (22) и выражения (18) для  $\gamma_z$  ( $\gamma_z < 0$ ) движение тела с нулевой массой вдоль оси  $Lz$  является устойчивым (корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми, и на основании теоремы Ляпунова [4] об устойчивости движения, утверждаем: движение тела вдоль оси  $Lz$  является устойчивым по первому приближению).

Если от уравнений (20) и (21) перейти к характеристическому уравнению для оценки устойчивости (неустойчивости) движения малого тела в плоскости  $Lxu$ , то это уравнение примет вид

$$\Omega^4 + \Omega^2(2\omega^2 - \gamma_x - \gamma_y) + (\gamma_x + \omega^2)(\gamma_y + \omega^2) = 0. \quad (23)$$

Для выполнения необходимого условия устойчивости движения тела (в первом приближении) уравнение (23) не должно иметь комплексных корней ( $\Omega$ ) с положительными вещественными частями и действительных положительных корней.

Примеры, определения устойчивых (неустойчивых) движений в окрестности точек либрации  $L'$  и  $L''$  приведены ниже.

**Исследование устойчивости точек либрации численными методами**

Для проверки проведенных исследований на устойчивость (неустойчивость) движений малых тел в окрестностях точек либрации воспользуемся численными методами интегрирования дифференциальных уравнений. При численном интегрировании *точно* уравнения (10) обратимся к методу Рунге – Кутта 4-го порядка.

Результаты численного интегрирования уравнения (10) с использованием метода Рунге-Кутта 4-го порядка приводятся ниже (в примере).

**Исследование устойчивости *всей* системы методом Ляпунова**

Вся система 9 тел как центральная конфигурация исследовалась также аналитически, с использованием метода Ляпунова, на устойчивость (неустойчивость).

Обозначим через  $r_l$  – возмущения координат основных тел ( $l=1, \dots, 9$ ). Тогда, выражение для возмущенного ускорения  $A_{ls}$ , с которым движется тело  $l$  (с учетом только сил гравитации), примет вид

$$A_{ls} = Gm_1(\mathbf{R}_1+r_1 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_1+r_1 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_2(\mathbf{R}_2+r_2 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_2+r_2 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_3(\mathbf{R}_3+r_3 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_3+r_3 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_4(\mathbf{R}_4+r_4 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_4+r_4 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_5(\mathbf{R}_5+r_5 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_5+r_5 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_6(\mathbf{R}_6+r_6 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_6+r_6 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_7(\mathbf{R}_7+r_7 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_7+r_7 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_8(\mathbf{R}_8+r_8 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_8+r_8 - \mathbf{R}_l-r_l|^3) + Gm_9(\mathbf{R}_9+r_9 - \mathbf{R}_l-r_l)/(|\mathbf{R}_9+r_9 - \mathbf{R}_l-r_l|^3). \quad (24)$$

Здесь  $l=1, \dots, n$ ; при этом отдельное тело не взаимодействует само с собой.

Для каждого тела  $l$  выбираются свои, вращающиеся с угловой скоростью  $\omega$ , прямоугольные системы координат. В системе координат  $CX_lY_l$ , характеризующей невозмущенное положение тела  $l$ , ось  $CX_l$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{R}_l$ , а ось  $CY_l$  дополняет систему координат до правой. В системе координат  $lx_l y_l$  (начало которой совпадает с начальным невозмущенным положением тела  $l$ ), характеризующей возмущенное движение тела  $l$ , ось  $lx_l$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{R}_l$ , а ось  $ly_l$  дополняет систему координат до правой.

Спроектировав силы, действующие на тело  $l$  (и все единичные векторы), на выбранные оси, составим уравнение движения этого тела в неинерциальной системе отсчета

$$d^2R_{ls}/dt^2 = A_{ls} + 2[V_{ls}, \omega] + [\omega, [R_{ls}, \omega]], \quad (25)$$

где

$$[V_{ls}, \omega] = \omega (\dot{y}_l \mathbf{i}_l - \dot{x}_l \mathbf{j}_l), \quad [\omega, [R_{ls}, \omega]] = \omega^2 (R_l + x_l) \mathbf{i}_l + \omega^2 y_l \mathbf{j}_l. \quad l=1, \dots, n, \quad n=9.$$

Оставляя для выражения  $A_{ls}$  только члены первого порядка малости, составим систему 18 дифференциальных уравнений 2-го порядка для описания возмущенного движения 9 тел рассматриваемой небесномеханической системы.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_1} x_1 \bar{i}_1 - x_1 \omega^2 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_1} y_1 \bar{i}_1 - 2\omega \dot{y}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_2} x_2 \bar{i}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_2} y_2 \bar{i}_1 - \dots - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_9} x_9 \bar{i}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_9} y_9 \bar{i}_1 &= 0, \\ 2\omega \dot{x}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_1} x_1 \bar{j}_1 + \ddot{y}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_1} y_1 \bar{j}_1 - y_1 \omega^2 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_2} x_2 \bar{j}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_2} y_2 \bar{j}_1 - \dots - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_9} x_9 \bar{j}_1 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_9} y_9 \bar{j}_1 &= 0, \\ \dots \\ - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_1} x_1 \bar{i}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_1} y_1 \bar{i}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_2} x_2 \bar{i}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_2} y_2 \bar{i}_9 - \dots + \ddot{x}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_9} x_9 \bar{i}_9 - \omega^2 x_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_9} y_9 \bar{i}_9 - 2\omega \dot{y}_9 &= 0, \\ - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_1} x_1 \bar{j}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_1} y_1 \bar{j}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_2} x_2 \bar{j}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_2} y_2 \bar{j}_9 - \dots + 2\omega \dot{x}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_9} x_9 \bar{j}_9 + \ddot{y}_9 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_9} y_9 \bar{j}_9 - y_9 \omega^2 &= 0. \quad (26) \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение представим в виде определителя 18 порядка. В этом случае для плоского движения характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением 36 степени относительно  $\Omega$  (уравнение (27)). Причем значения производных вычислены в точке  $r=0$ .

Ниже приведены примеры решений соответствующих алгебраических уравнений типа (27) 36 степени относительно  $\Omega$  с использованием пакета прикладных программ “MAPLE™13”.

$$D(\Omega) = \begin{vmatrix} \Omega^2 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_1} \bar{i}_1 - \omega^2 & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_1} \bar{i}_1 - 2\omega \Omega & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_2} \bar{i}_1 & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_2} \bar{i}_1 & \dots & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_9} \bar{i}_1 & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_9} \bar{i}_1 \\ 2\omega \Omega - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_1} \bar{j}_1 & \Omega^2 - \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_1} \bar{j}_1 - \omega^2 & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_2} \bar{j}_1 & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_2} \bar{j}_1 & \dots & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_9} \bar{j}_1 & -\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_9} \bar{j}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_1} \bar{i}_9 & -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_1} \bar{i}_9 & -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_2} \bar{i}_9 & -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_2} \bar{i}_9 & \dots & \Omega^2 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_9} \bar{i}_9 - \omega^2 & -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_9} \bar{i}_9 - 2\omega \Omega \\ -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_1} \bar{j}_9 & -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_1} \bar{j}_9 & -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_2} \bar{j}_9 & -\frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_2} \bar{j}_9 & \dots & 2\omega \Omega - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial x_9} \bar{j}_9 & \Omega^2 - \frac{\partial \bar{A}_9}{\partial y_9} \bar{j}_9 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Для получения численных результатов будем задавать значение массы  $m_1=1$ , а также значения масс  $m_2=m_9$ ,  $m_3=m_8$  и  $m_4=m_7$ , а значение массы пятого тела  $m_5$ , равной массе шестого тела  $m_6$ , определим в результате решения системы уравнений (7)–(27). Принимая  $R_2=1$ , с использованием соотношений (7)–(27), найдем в радианах значения углов  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{23}$ ,  $\alpha_{34}$ ,  $\alpha_{45}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_4$ . Во всех уравнениях гравитационная постоянная принимается равной  $G=1$ .

**Пример**

Рассмотрим небесномеханическую систему 9 тел, массы которых  $m_1=1$ ,  $m_2=m_9=0,00022$ ,  $m_3=m_8=0,00007$ ,  $m_4=m_7=0,000013$ . (Как показывают численные эксперименты, эти значения масс являются максимальными, при которых движение малого тела вблизи точки либрации  $L''$  является устойчивым.) Из уравнений (3)–(6) находим положения основных тел ( $R_2=1$ ),  $m_5=m_6$ , расстояния между телами  $r_{ij}$ ,  $|d^2 \mathbf{R}_l / dt^2|$ ,  $l=1, \dots, 5$  (в инерциальной системе отсчета, начало которой совпадает с центром масс системы),  $e_q$ ,  $q=1, \dots, 8$  – характерные погрешности решения уравнений,  $\omega^2$  – квадрат угловой скорости.

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= 1,728752735091, \alpha_{23} = 0,284720205425, \alpha_{34} = 0,134561935355, \\ \alpha_{45} &= 0,513683891078, \beta_{12} = 1,409321024836, \beta_{23} = 1,427152640495, \\ \beta_{34} &= 1,502777336006, \beta_{45} = 1,311197112039, \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{45} = 2,661718766950, \\ R_1 &= 0,003565266355454, R_3 = 0,9996321162502, R_4 = 0,999532697826, \\ R_5 &= 0,998086064634, m_5 = 0,001932514366749, r_{12} = 1,0005670125838, \\ r_{13} &= 1,0011645156904, r_{14} = 1,001482762726, r_{15} = 1,00124999830682, \\ r_{23} &= 0,2837075090679, r_{34} = 0,1344043243081, r_{45} = 0,50745175509186, \\ r_{56} &= 0,92156741713457, |d^2 \mathbf{R}_1 / dt^2| / R_1 = 1,0007557414901, \\ |d^2 \mathbf{R}_2 / dt^2| / R_2 &= 1,0007557414901, |d^2 \mathbf{R}_3 / dt^2| / R_3 = 1,0007557414901, \\ |d^2 \mathbf{R}_4 / dt^2| / R_4 &= 1,0007557414901, |d^2 \mathbf{R}_5 / dt^2| / R_5 = 1,0007557414901, \\ |e_1| &= 1,83 \cdot 10^{-15}, |e_2| = 1,40 \cdot 10^{-15}, |e_3| = 1,29 \cdot 10^{-15}, |e_4| = 1,39 \cdot 10^{-17}, |e_5| = 2,61 \cdot 10^{-16}, \\ |e_6| &= 6,85 \cdot 10^{-16}, |e_7| = 1,697 \cdot 10^{-15}, |e_8| = 1,497 \cdot 10^{-16}, \\ X_1 &= 0,003565266355, Y_1 = 0, X_2 = -0,157300385855, Y_2 = 0,9875508030526, \\ X_3 &= -0,4282020205829, Y_3 = 0,903275925400, X_4 = -0,545456987260, \\ Y_4 &= 0,837581213419, X_5 = -0,885355389849, Y_5 = 0,460783708567, \\ X_6 &= -0,885355389849, Y_6 = -0,460783708567, X_7 = -0,545456987260, \\ Y_7 &= -0,837581213419, X_8 = -0,4282020205829, Y_8 = -0,903275925400, \\ X_9 &= -0,157300385855, Y_9 = -0,9875508030526, \omega^2 = 1,000755741490. \end{aligned}$$

**Положение точки либрации  $L''$**  определим из уравнения, аналогичного уравнению (9). На рисунке 1 кривая характеризует единственность решения уравнения типа (9) в окрестности истинного значения  $R_L$ . На рис. 2 представлены положения 9 тел и точки либрации  $L''$ .

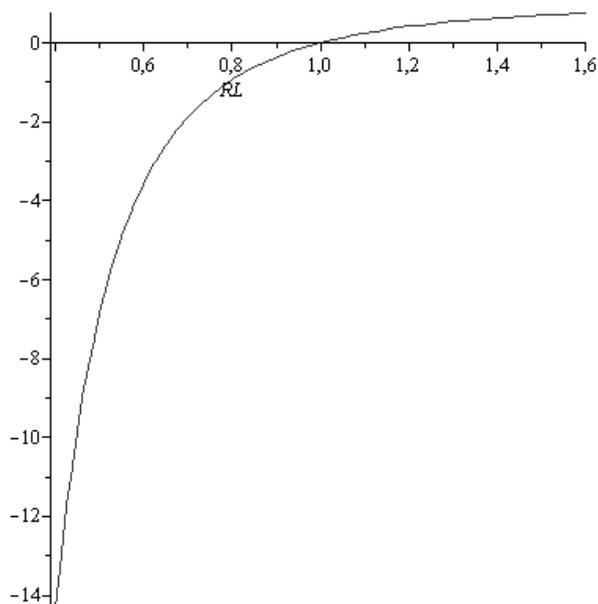


Рис. 1. Расстояние точки либрации  $L''$  от центра масс системы. (Кривая характеризует единственность решения уравнения типа (9) в окрестности истинного значения  $R_L$ )

Координаты точки либрации  $L''$ :  $x_L = -0,998828108624$ ,  $y_L = 0$ .

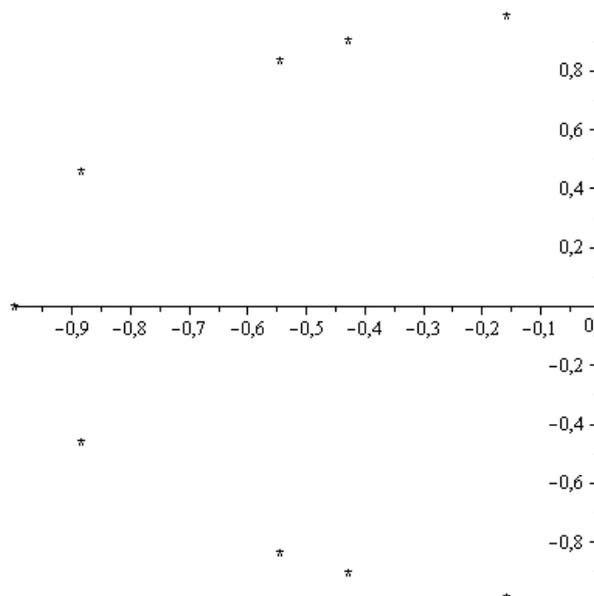


Рис. 2. Положения 9 тел и точки либрации  $L''$  (слева)

При аналитическом исследовании устойчивости точки либрации  $L''$ , с помощью уравнений (10)–(22) находим корни характеристического уравнения (23).

$\Omega_{1,2} = \pm 0,598188985440 \sqrt{-1}$ ;  $\Omega_{3,4} = \pm 0,783782144542 \sqrt{-1}$ . Действительные части этих корней равны 0. По первому приближению [4] однозначно невозможно определить устойчивость (неустойчивость) точки либрации  $L$ . Численные эксперименты подтвердили устойчивость точки либрации  $L$ , по крайней мере, на интервале времени 318,43 оборота основных тел (рис. 3–4). При интегрировании

уравнений движения (10) использовался метод Рунге – Кутта 4 порядка из пакета прикладных программ “MAPLE™13”

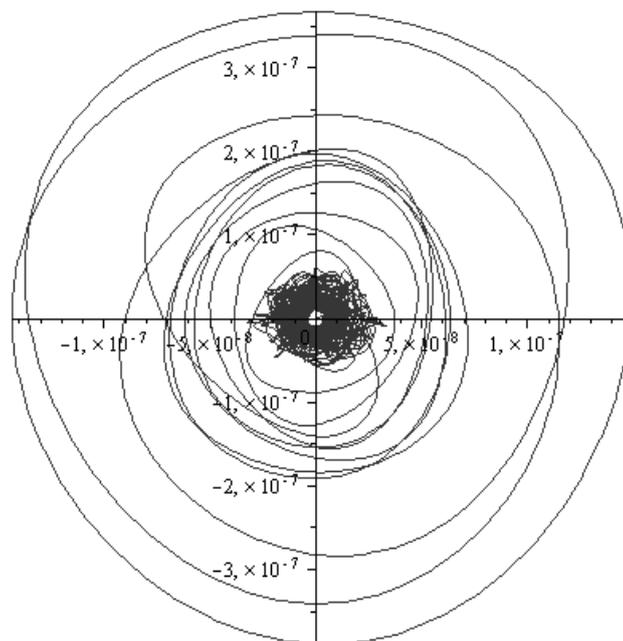


Рис. 3. Устойчивость точки либрации  $L''$  и «динамический» хаос при  $x=y=0, dx/dt=dy/dt=0$

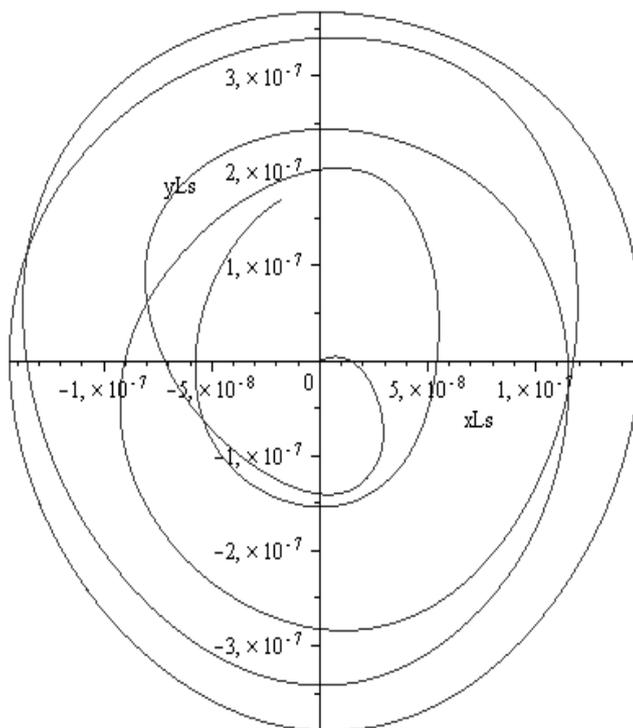


Рис. 4. Устойчивость точки либрации  $L''$  и «динамический» хаос при  $x=y=0, dx/dt=dy/dt=0,00000001$

Для точки либрации  $L'$  имеем  $x_L=+1,002521182707, y_L=0$ .

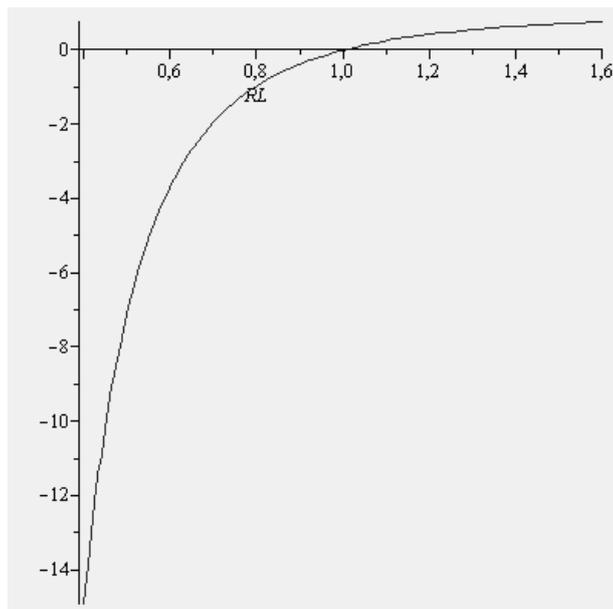


Рис. 5. Расстояние точки либрации  $L'$  от центра масс системы. (Кривая характеризует единственность решения уравнения (9) в окрестности истинного значения  $R_L$ )

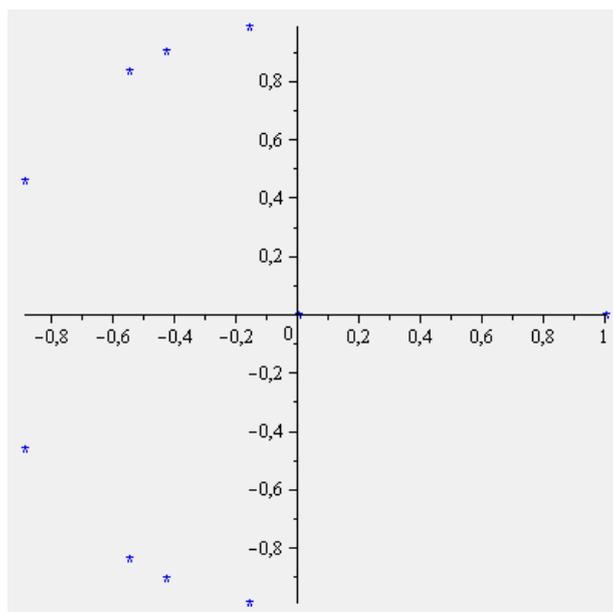


Рис. 6. Положения 9 тел и точки либрации  $L'$  (справа)

При аналитическом исследовании устойчивости точки либрации  $L'$  с помощью уравнений (10)–(22) находим корни характеристического уравнения (23).

$$\Omega_{1,2,3,4} = \pm 0,056379130801 \pm 0,703420724716 \sqrt{-1}.$$

Поскольку существует положительный корень этого уравнения, то по теореме Ляпунова [4], точка либрации  $L'$  является неустойчивой (тело с нулевой массой уйдет от нее на значительное расстояние).

Численные эксперименты подтвердили неустойчивость точки либрации  $L'$ . При этом обнаружались регулярные траектории в движениях тел с нулевой массой, в начальный момент времени расположенных в точке либрации  $L'$  (рис. 8). (При отсутствии возмущений тело с нулевой массой, расположенное в начальный момент времени в точке либрации на интервале времени, соответствующем 159,21 оборота основных тел, остается в окрестности точки либрации (рис. 7).)

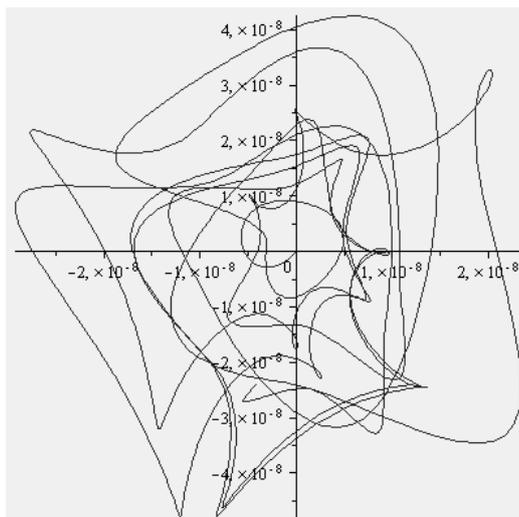


Рис. 7. Движение тела с нулевой массой в окрестности точки либрации  $L'$  («динамический» хаос) при  $x=y=0$ ,  $dx/dt=dy/dt=0$

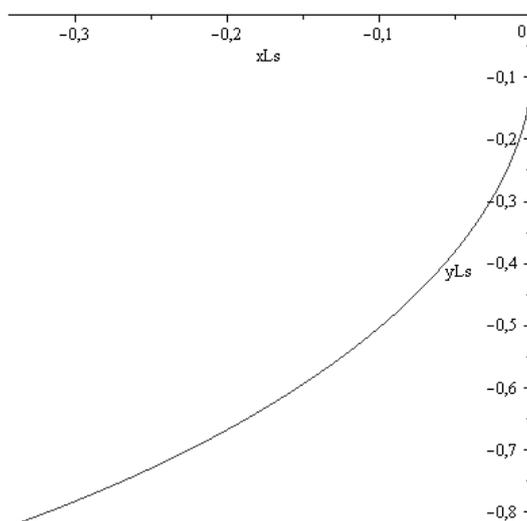


Рис. 8. Неустойчивость точки либрации  $L'$  и «регулярная» траектория при  $x=y=0$ ,  $dx/dt=dy/dt=0,00000001$ . Число оборотов основных тел – 27,066

При исследовании устойчивости *всей* рассматриваемой небесномеханической системы *основных* 9 тел использовалось характеристическое (алгебраическое) уравнение 36 степени (27). В данном случае комплексный корень этого уравнения с максимальной действительной положительной частью равен

$$\Omega=0,205670435026\pm 0,720132417839\sqrt{-1}$$

Действительные положительные части остальных комплексных корней этого же уравнения на несколько порядков меньше. Данное уравнение (в рассматриваемом случае) не имеет действительных корней. Вычисления производились как с 48-значными цифрами, так и 64-значными цифрами. Численные результаты в пределах ошибок вычислений совпали. На рис. 9 представлен график функции  $D=D(\Omega)$  (27) на интервале  $-0,1 < \Omega < +0,1$ .

На основании теоремы Ляпунова [4] данная система, строго говоря, не является устойчивой, но вследствие малости действительных положительных частей комплексных уравнений можно говорить об *условной* устойчивости ее на некотором промежутке времени.

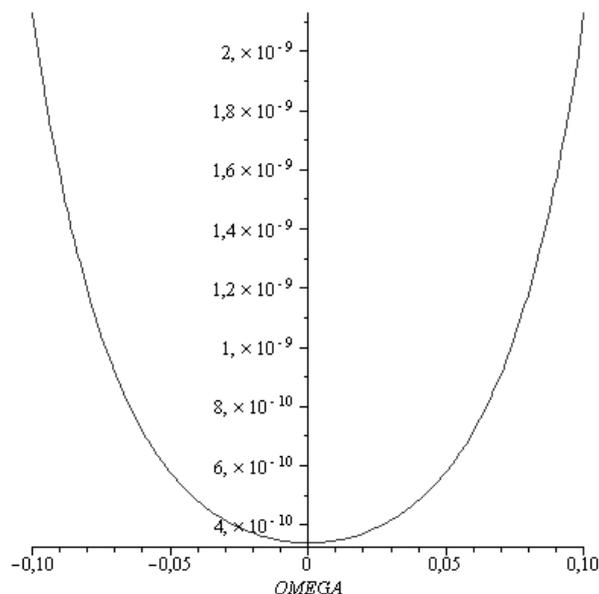


Рис. 9. График функции  $D=D(\Omega)$  (27) на интервале  $-0,1 < \Omega < +0,1$

**Астрономические приложения** рассмотренной задачи 10 тел соответствуют приложениям рассмотренной ранее ограниченной задачи 4 тел [8, 11, 12, 13].

Результаты исследований ограниченной небесномеханической задачи  $9+1$  – тел позволяют сделать следующие выводы.

#### Заключение

1. В рассмотренных примерах *устойчивого* (по Ляпунову) движения малого тела наблюдается динамический хаос.

2. В рассмотренных примерах *неустойчивого* (по Ляпунову) движения малого тела наблюдаются «квазипериодические» и даже *периодические* движения.

3. Прослеживается тенденция сближений малых тел со всеми основными гравитирующими телами данной динамической системы, что позволяет использовать эту модель для объяснения притока комет в околоземное пространство из различных кометных резервуаров.

4. Представляет особый интерес попытка установления устойчивости (неустойчивости) системы  $N$  тел – по исследованию устойчивости (неустойчивости) одной (!) точки либрации.

5. Условие устойчивости системы 9 тел определяется не из алгебраического уравнения 36 степени, а из алгебраического уравнения 4-й степени (на основании исследования устойчивости одной (!) точки либрации  $L_1$ ).

#### Библиографический список

1. Абалакин, В. К. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике [Текст] / В. К. Абалакин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников, В. Г. Демин, Ю. А. Рябов. – М. : Наука. – 1976. – 864 с.
2. Албуи, А., Шенсине, А. Задача Кеплера. Столкновения. Регуляризация [Текст] / М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – С. 413.
3. Горизэли, А. Интегрируемость и сингулярность [Текст] / А. Горизэли. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – С. 316.
4. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения [Текст] А. М. Ляпунов. – М.–Л. : АН СССР, 1956. Собр. Соч. Т.2
5. Медведев, Ю. Д., Перов, Н. И. Ограниченная задача четырех тел. Случай центральной конфигурации: точки либрации, устойчивость [Текст] / Ю. Д. Медведев, Н. И. Перов // Письма в астрономический журнал РАН. – 2008. – Т. 34. – № 5. – С. 392–400
6. Мозер, Ю. Устойчивые и хаотические движения в динамических системах [Текст] / Ю. Мозер. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2010. – С. 184.

7. Морозов, А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах [Текст] / М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2005. – С. 424.
8. Перов, Н. И., Кондратьева, А. В. Небесномеханическая модель образования незамкнутых колец вблизи планет-гигантов [Текст] / Ярославский педагогический вестник. – 2011. – № 2. – Том III (Естественные науки). – С. 12–15.
9. Райхл, Л. Е., Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах [Текст] / Л. Е. Райхл. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. – С. 756.
10. Уинтнер, А. Аналитические основы небесной механики [Текст] / А. Уинтнер. – М. : Наука, 1967. – 524 с.
11. Perov N. I., Kondratieva A. V. Localization of boundaries of life of the Earth's type in the star clusters / Abstr. of the 41-st Lunar- Planetary Science Conference (The Woodlands, Texas, USA, March 1-5, 2010). Abstract #1028.
12. Perov, N.I., Kondratieva A.V. On the Model of Motion of Giant Planets Rings Arcs / 42nd Lunar and Planetary Science Conference, held March 7–11, 2011 at The Woodlands, Texas. LPI. (USA). Contribution No. 1608. - P.1685.
13. Perov, N.I., Kondratieva A.V. Unstable motion and regular orbits of Lunar artificial satellites for monitoring of the Moon / Reports of International astronomical congress "ASTROKAZAN-2011". Kazan. August 22-30, 2011. (Russian Academy of Science. Government of the Republic of Tatarstan. Tatarstan Academy of Science. Kazan Federal University. Russian Foundation for Basic Research). Казань: изд-во Казанского федерального университета, 2011. - С. 255 – 257