УДК 521.328

А. Э. Байдин

Анализ классических методов определения орбит визуально-двойных звезд

В работе представлены классические методы определения орбит. Рассмотрено статистическое обоснование метода дифференциальных поправок. Анализируется основная причина введения весов наблюдений. Исследуются метод Ковальского – Олевича, использующий общее уравнение второй степени, и метод Докобо, в основе которого лежит уравнение Тиля.

Ключевые слова: визуально-двойные звезды, элементы орбиты, методы, анализ.

A. E. Baydin

The Analysis of Classical Methods to Define Orbits of Visually-Double Stars

In this work classical methods to define orbits are represented. The statistical substantiation of the method of differential amendments is considered. The principal cause of introduction of scales supervision is analyzed. The method of Kovalsky-Olevich using the general equation of the second degree, and the method of Dokobo the basis of which is the equation of Till, are investigated.

Keywords: visually-double stars, orbit elements, methods, analysis.

Визуально-двойные звезды являются единственным источником прямых методов определения масс звезд, поэтому исследование их движений имеет большое значение для современной астрофизики. На основе масс звезд, вычисленных с использованием элементов орбит двойных, была получена статистическая зависимость масса-светимость, учтены поправки к этому отношению, связанные с показателем цвета и металличностью.

Методы определения орбит визуально-двойных звезд в настоящее время не имеют однозначной классификации. В данной работе под классическими (или кинематическими) понимаются методы, в которых для определения элементов орбиты не используются значения масс компонент. Классические методы противопоставляются динамическим, в последних массы задаются изначально по зависимости масса-светимость или являются результатом промежуточных вычислений. Орбиты определяются на основе наблюдений: ρ_k, θ_k – полярные координаты проекций на картинную плоскость положений звезды-спутника относительно главной компоненты, T_k – эпохи наблюдений.

В основе наиболее точных классических методов, используемых в настоящее время, лежит метод наименьших квадратов. Пусть ρ_{k0} и θ_{k0} – истинные значения положений звезды спутника, они связаны с наблюдаемыми величинами

$$\rho_{kobs} = \rho_{k0} + \delta_{\rho k} \text{ и } \theta_{kobs} = \theta_{k0} + \delta_{\theta k}, \qquad (1)$$

где $\delta_{\rho k}$ и $\delta_{\theta k}$ – случайные ошибки разделения и позиционного угла, $k = 1, 2, ..., N$, N – количество измерений.

Точные значения измерений неизвестны, но можно предположить, что близкие к истинным значения вычисляются по элементам орбиты и моментам наблюдений (T_k), тогда

$$\rho_{kobs} = \rho(\mathbf{x}, T_k) + \varepsilon_{\rho k} \text{ и } \theta_{kobs} = \theta(\mathbf{x}, T_k) + \varepsilon_{\theta k}, \qquad (2)$$

где векторный аргумент $\mathbf{x}$ определяет элементы орбиты ($x_1 = n$, $x_2 = a$, $x_3 = i$, $x_4 = \Omega$, $x_5 = T_p$, $x_6 = e$, $x_7 = \omega$), $\varepsilon_{\rho k}$ и $\varepsilon_{\theta k}$ – невязки наблюдений. Необходимо отметить, что разделение не зависит от Ω, а позиционный угол – от a.

Известно, что случайные ошибки $\delta_{\rho k}$ и $\delta_{\theta k}$ подчинены распределению Гаусса, что справедливо и для $\varepsilon_{\rho k}$ и $\varepsilon_{\theta k}$, если $\rho_{k0} \approx \rho(\mathbf{x}, T_k)$ и $\theta_{k0} \approx \theta(\mathbf{x}, T_k)$, поэтому плотность вероятности выборки (ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_N$, θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_N$)

$$f = (2\pi)^{-N} \left(\prod_{k=1}^{N} \sigma_{\rho k}^{-1} \right) \left(\prod_{k=1}^{N} \sigma_{\theta k}^{-1} \right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon_{\rho k}^2}{2\sigma_{\rho k}^2} \right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon_{\theta k}^2}{2\sigma_{\theta k}^2} \right). \quad (3)$$

Согласно принципу максимального правдоподобия [1], значения выборки должны обратить в максимум функцию (3), из этого следует

$$\chi^2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon_{\rho k}^2}{\sigma_{\rho k}^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon_{\theta k}^2}{\sigma_{\theta k}^2} = \min, \quad (4)$$

где σ_k – стандартные отклонения, они определяют веса измерений, вместо них можно использовать ошибки, оцененные наблюдателями. Для определения минимума функции (4) можно воспользоваться генетическими алгоритмами [6] или стандартными методами – найти значения аргументов функции, при которых частные производные равны нулю, то есть решить систему уравнений

$$\frac{\partial \chi^2(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial \chi^2(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \chi^2(\mathbf{x})}{\partial x_7} = 0. \quad (5)$$

Методы, в основе которых лежит условие (4), имеют два преимущества: 1) позволяют задавать веса наблюдениям; 2) являются статистически обоснованными, если гистограмма, построенная по значениям ε_k / σ_k, соответствует стандартному нормальному распределению. При вычислении орбит визуально-двойных количество наблюдений, как правило, менее ста, поэтому возможны отклонения в распределении невязок от нормального, особенно в областях $|\varepsilon| > \sigma$, в этих условиях другие методы могут иметь преимущества. Например, метод наименьших модулей [5] не имеет такого статистического обоснования, как наименьшие квадратов (1–4), но он менее подвержен влиянию неточных наблюдений. Один из подходов, позволяющий определять орбиты при отклонении распределения невязок от нормального, рассмотрен в работе [3]: предложено совместно с методом наименьших квадратов использовать функцию, понижающую веса наблюдений, хуже удовлетворяющих рассматриваемой модели движения, ее введение изменяет кривые вероятностного распределения невязок.

Рассмотрим метод дифференциальных поправок [7]. Он требует знания первых приближений, обозначим их x_{01}, x_{02}, …, x_{07}, тогда вычисляемые разделения можно представить

$$\rho(\mathbf{x}, T_k) = \rho(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}, T_k) = \rho(\mathbf{x}_0, T_k) + \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}_0, T_k)}{\partial x_j} \delta x_j. \quad (6)$$

В (6) отброшены слагаемые, содержащие члены $\delta\mathbf{x}$ второго и более высокого порядка. Для позиционных углов получаются выражения, аналогичные (6). В методе дифференциальных поправок неизвестными являются поправки δx_j. Подставляя (6) в (2) и (4) затем определяя минимум, получаем систему семи линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_q} \frac{\rho_{kobs} - \rho_k}{\sigma_{\rho k}^2} + \frac{\partial \theta_k}{\partial x_q} \frac{\theta_{kobs} - \theta_k}{\sigma_{\theta k}^2} \right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{\sigma_{\rho k}^2} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_q} \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{1}{\sigma_{\theta k}^2} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_q} \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_j} \delta x_j \right), \quad (7)$$

где q=1, 2, …, 7 (изменяя, получаем семь уравнений), $\rho_k = \rho(\mathbf{x}_0, T_k)$, $\theta_k = \theta(\mathbf{x}_0, T_k)$.

Стандартные отклонения σ_k отдельно взятых наблюдений, входящие в (7), нельзя определить непосредственно, но они очень важны для обработки астрономических данных. Обратная им величина определяет веса наблюдений

$$W_k = \frac{1}{\sigma_k^2}. \tag{8}$$

Выражение (8) можно считать определением веса наблюдения, оно статистически обосновано, как и сама система уравнений (7). Подходы, позволяющие приближенно оценивать веса, появились относительно недавно в работах Харткопфа и др. [8, 9].

В астрономии известно множество формул, которые связывают элементы орбиты и наблюдаемые относительные положения визуально-двойных. Есть формулы, использование которых снижает точность получаемых результатов или накладывает некоторые ограничения при вычислении орбит.

Общее уравнение второй степени описывает видимую орбиту визуально-двойной

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0, \tag{9}$$

где x и y декартовы координаты звезды-спутника относительно главной компоненты. Коэффициенты уравнения определяют форму и ориентацию в пространстве орбиты двойной.

В геометрическом методе определения орбит используется уравнение (9). Если имеется N наблюдений, то, подставив их в (9), получаем систему N уравнений с пятью неизвестными (A, B, C, D, E), она решается методом наименьших квадратов. Зная коэффициенты уравнения (9) с помощью метода Ковальского [7] или работы [2] можно найти элементы Кэмпбелла (i, Ω, ω) и два динамических элемента (a, e).

Геометрический метод имеет два недостатка: 1) построение видимого конического сечения происходит без использования времени; 2) поставлена задача нахождения минимальных квадратичных отклонений для кривой второго порядка, а не для среднеквадратичных отклонений наблюдаемых величин. Также методика имеет достоинства: 1) не требуются значения первых приближений; 2) работает с эллиптическими и гиперболическими орбитами: 3) сходится независимо от длины рассмотренной дуги.

Ранее возможность использования геометрического метода отвергалась во всех работах. Это связано с тем, что в уравнение (9) не входит время, которое измеряется гораздо точнее. Сегодня точность наблюдений значительно возросла и элементы орбиты, получаемые геометрическим методом для хорошо изученных пар, согласуются с результатами других методов.

В работе [10] рассмотрена одна из модификаций геометрического метода: предложено совместно с реальными наблюдениями применять фиктивные. При использовании (9) не нужно знать время, поэтому задача сводится к нахождению нескольких фиктивных точек (ρ_l', θ_l'). Позиционные углы на участке дуги, не охваченной наблюдениями, можно выбрать достаточно произвольно, для разделений необходимо задать интервалы возможных значений, в данном методе разделения определяются методом подбора (выбираются те, при которых среднеквадратичная ошибка минимальна). Рассмотренный метод назван методом Ковальского – Олевича [9], в дальнейшем [11] его даже использовали для определения орбит по коротким дугам (~30–90°). Геометрический метод на таких дугах часто дает гиперболические орбиты. Введение фиктивных точек накладывает дополнительные ограничения на решения.

Имеется множество методов, построенных на основе фундаментального уравнения Тиля [4, 12]

$$c(t_2 - t_1) - S_{12} = (c/n)[E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)], \tag{10}$$

где c – секторная скорость видимого движения (постоянная площадей), S_{12} – площадь треугольника (рис. 1), в вершинах которого главная звезда и положения звезды-спутника в моменты времени t_1 и t_2.

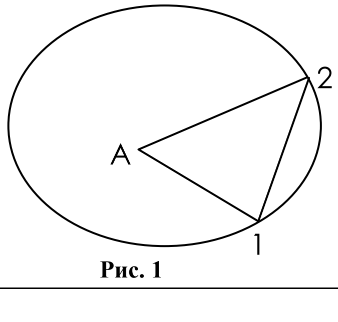

Рис. 1

В уравнении (10) величина $c(t_2 - t_1)$ равна площади сектора, поэтому разность в левой части определяет площадь сегмента (рис. 1). Для работы методов, использующих уравнение Тиля, необходимо, чтобы значения площадей сегментов значительно превосходили погрешность определения площадей треугольников S_{jk}. При уменьшении длины дуги площадь сегментов быстро уменьшается, для малых углов площадь сектора и площадь треугольника примерно равны, и погрешность определения последней может превышать значение площади сегмента, по этой причине методы, использующие (10), нельзя применять для определения орбит по коротким дугам.

Рассмотрим метод Докобо [12]. Для трех наблюдений можно составить три уравнения Тиля (10), из которых, исключив постоянную площадей и среднее движение, получить

$$F(V-U)-F(V)M+F(U)N=0\,, \tag{11}$$

где $F(x)=x-\sin x$, $V=E_3-E_1$, $U=E_3-E_2$, $M=\dfrac{R(T_{12}-ST_{23})}{RT_{13}-ST_{23}}$, $N=\dfrac{S(T_{12}-RT_{13})}{RT_{13}-ST_{23}}$, $T_{jk}=T_k-T_j$, $R=\dfrac{S_{12}}{S_{13}}$, $S=\dfrac{S_{12}}{S_{23}}$.

Если V или U известна, то вторую величину можно определить из уравнения (11). В методе Докобо величина V определяется подбором, она должна быть такой, чтобы полученные невязки не давали систематического хода. После определения V и U из уравнений Тиля можно вычислить среднее движение n и постоянную площадей, а оставшиеся элементы орбиты найти по формулам метода Тиле – Иннеса [4].

Вывод формулы (11) шел в два этапа: 1) из уравнения Тиля (10), для первого и второго наблюдений выражалась постоянная площадей и подставлялась в уравнения Тиля, составленные для первого-третьего и второго-третьего наблюдений; 2) из полученных двух уравнений исключалось среднее движение. Подобные операции необходимо отнести к недостаткам метода Докобо, так как при этом не учитывается, что уравнения Тиля для реальных наблюдений имеют приближенный характер. Например, в результате рассмотренной операции вес уравнения, связывающего первое и второе наблюдения, возрос.

В работе были рассмотрены особенности классических методов определения орбит. Наиболее точные результаты дает метод дифференциальных поправок или его аналоги, построенные на основе выражений (4, 5). К недостаткам данных методов можно отнести необходимость наличия первых приближений и возможные проблемы со сходимостью. У других рассмотренных в работе методов эти трудности отсутствуют, однако они имеют свои особенности, которые также нужно учитывать: геометрические методы, использующие уравнение кривой второго порядка, относятся к самым неточным, методы, построенные на основе уравнения Тиля, быстро теряют свою эффективность при уменьшении длины дуги. При описании метода дифференциальных поправок раскрыта причина введения весов наблюдений: при правильном задании весов величина $\varepsilon\sqrt{W}$ должна подчиняться стандартному нормальному распределению.

Библиографический список

1. Агекян, Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков [Текст] / Т. А. Агекян. – М. : Наука, 1972. – 172 с.
2. Байдин, А. Э. Метод определения элементов орбиты визуально-двойной звезды для эллиптического и гиперболического движения [Текст] / А. Э. Байдин // Электронный журнал «Исследовано в России», 2007. – С. 480–490. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2007/044.pdf
3. Байдин, А. Э. Определение веса позиционных наблюдений визуально-двойных звезд при вычислении орбит [Текст] / А. Э. Байдин // Инновационная деятельность в астрономии, астрономическом образовании и просвещении. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 115–127.
4. Куто, П. Наблюдения визуально-двойных звезд [Текст] / П. Куто. – М. : Мир, 1981. – 238 с.
5. Мудров, В. И., Кушко, В. Л. Метод наименьших модулей [Текст] / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. – М. : Знание, 1971. – 64 с.
6. Панченко, Т. В. Генетические алгоритмы [Текст] : учебно-методическое пособие / Т. В. Панченко. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.
7. Субботин, М. Ф. Введение в теоретическую астрономию [Текст] / М. Ф. Субботин. – М. : Наука, 1968. – 800 с.
8. Hartkopf, W. I., McAlister, H. A., Franz, O. G. Binary star orbits from speckle interferometry. II - Combined visual-speckle orbits of 28 close systems // Astronomical Journal. 1989. – V. 98. – P. 1014–1039.
9. Hartkopf, W. I., Mason, B. D., Worley, C. E. The 2001 US naval observatory double star CD-ROM. II. The fifth catalog of orbits of visual binary stars // Astronomical Journal. 2001. – V. 122. – P. 3472–3479.

10. Olevic, D., Cvetkovic, Z. Orbits of 10 interferometric binary systems calculated by using the improved Koval'skij method // Astronomy & Astrophysics. 2004. V. 415. P. 259–264.
11. Cvetkovic, Z., Novakovic, B. Orbits for sixteen binaries // Serbian Astronomical Journal. 2006. – V. 173. – P. 73–82.
12. Docobo, J. A. On the analytic calculation of visual double star orbits // Celestial Mechanics. 1985. – V. 36. – P. 143–153.