УДК 510.6

М. А. Суворова, И. А. Осетров

Случайные величины в биатлоне

Продолжение построения основ теории вероятностей на одной задаче о стрельбе в эстафетной гонке, что может использоваться при изложении курса «Спортивная метрология».

Ключевые слова: граф распределения, биномиальное и геометрическое распределение, числовые характеристики многомерных случайных величин, ковариационный граф, коэффициент корреляции, корреляционный граф, биатлон, эстафетная гонка.

M. A. Suvorova, I. A. Osetrov

Random Quantities in Biathlon

Continuation of constructing the bases of the probability theory on one problem about shooting in go-ahead race that can be used at the course reading «Sports Metrology» is presented in the article.

Key words: a graph of distribution, binomial and geometrical distribution, numerical characteristics of multivariate accidental variables, a covariance graph, a correlation coefficient, a correlation graph, biathlon, go-ahead race.

Случайной называют ***величину***, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Случайная величина, которая принимает конечное или счетное (эквивалентно множеству натуральных чисел) множество значений, называется ***дискретной***. Дискретная случайная величина задается законом распределения – соотношением, устанавливающим связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями или графом распределения [1, с. 84]. Основными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, мода и медиана (характеристики положения), дисперсия и среднее квадратическое отклонение (характеристики рассеивания).

Продолжая предыдущую работу [2], авторы предлагают рассмотрение случайных величин различных моделей стрельбы с дополнительными патронами в эстафетных биатлонных гонках. В современной научной литературе определение термина «моделирование» в широком смысле сводится к тому, что это исследование объектов познания предполагает построение и изучение моделей реально существующих предметов, процессов или явлений с целью получения объяснения этим явлениям, а также для предсказания явлений, интересующих исследователя. В следующих вариациях представлены модели классических распределений: биномиального и геометрического.

Вариация 1 (биномиальное распределение) Построить закон распределения случайной величины X={*число закрытых мишеней при использовании основных патронов*}. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, моду и медиану, если $p = 0.8$.

Решение:

X	0	1	2	3	4	5
P	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = p^5,\ P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = 5p^4 q,\ P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10p^3 q^2,$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10p^2 q^3,\ P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5pq^4,\ P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = q^5.$$

Закон распределения числа $X = m$ наступлений события *A* в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью *p* называется биномиальным законом распределения. Основные характеристики случайной величины, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по формулам:

$M\left[X\right] = np$, $\quad D\left[X\right] = npq$.

M_0 – наивероятнейшее число, оно удовлетворяет условию: $np - q \le M_0 \le np + p$.

Построим закон распределения для $p = 0.8$ и вычислим основные характеристики.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

$$M\left[X\right] = np = 5 \cdot 0.8 = 4$$

$$D\left[X\right] = npq = 5 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8$$

Вычислим моду и медиану случайной величины:

$$5 \cdot 0.8 - 0.2 \le M_0 \le 5 \cdot 0.8 + 0.8$$

$$3.8 \le M_0 \le 4.8$$

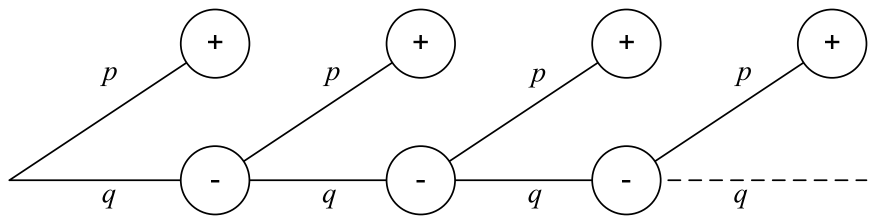
$$M_0 = 4$$

$$M_e = x_4 = 4, \textit{т.к.} \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{4} p_i = 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 \ge \dfrac{1}{2} \\ \sum\limits_{i=4}^{5} p_i = 0,4096 + 0,32768 \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Вариация 2 (геометрическое распределение)

При использовании основных патронов биатлонист допустил один промах. Построить закон распределения случайной величины $X = \{\textit{число использованых дополнительных патронов}\}$ (предположив, что дополнительных патронов может быть неограниченное количество). Вычислить математическое ожидание и дисперсию, если $p = 0.8$.

Решение:



X	1	2	3	…	i	…
P	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{i-1} p$	…

Рассмотрим серию независимых n испытаний, в ходе которых появлялось событие A с вероятностью $P\left(A\right) = p$, одинаковой для всех испытаний. Испытания в каждой серии проводились до появления события A и заканчивались, как только событие A происходило. Обозначим через X число испытаний, которые нужно провести до появления «успеха». Очевидно, что возможными значениями дискретной случайной величины X являются натуральные числа $1, 2, ..., m, ...$. Полученный закон распределения дискретной случайной величины X называют **геометрическим**, поскольку $q^{i-1}p$ –

формула расчета i-го члена геометрической прогрессии, с первым членом p и знаменателем q ($0 < q < 1$).

Основные характеристики случайной величины, распределенной по геометрическому закону, вычисляются по формулам:

$$M[X] = \frac{1}{p} \qquad D[X] = \frac{q}{p^2},$$

$$M_0 = 1,$$

$$-\frac{\ln(2)}{\ln(q)} \le M_e \le 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(q)}.$$

Построим закон распределения для $p = 0.8$ и вычислим основные характеристики.

X	1	2	3	…	i	…
P	0.8	$0.2 \cdot 0.8$	$0.2^2 \cdot 0.8$	…	$0.2^{i-1} 0.8$	…

$$M[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.8} = 1.25 \quad D[X] = \frac{q}{p^2} = \frac{0.2}{0.8^2} \approx 0.312,$$

$$M_0 = 1,$$

$$-\frac{\ln(2)}{\ln(0.2)} \le M_e \le 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(0.2)}$$

$$0.431 \le M_e \le 1.431$$

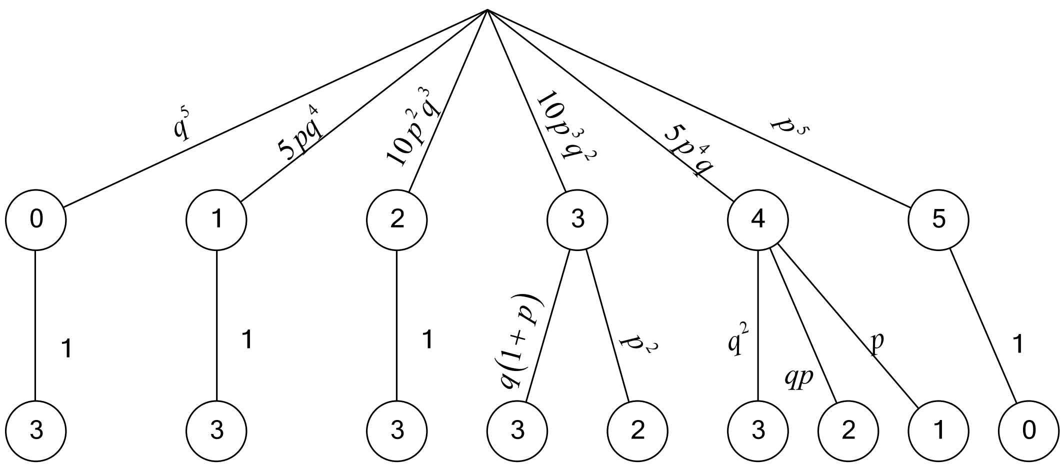
$$M_e = 1.$$

В протоколе эстафетной гонки результаты стрельбы характеризуются двумя значениями: количеством штрафных кругов и количеством использованных дополнительных патронов. Построим эти случайные величины и вычислим их основные характеристики.

Вариация 3

Построить закон распределения случайной величины Y={*общее число используемых дополнительных патронов в зависимости от результатов основной стрельбы*}. Вычислить математическое ожидание и дисперсию для случайной величины Y.

Решение:



$$P(Y = 0) = p^5 \cdot 1 = p^5,$$

$$P(Y = 1) = 5p^4 q \cdot p = 5p^5 q,$$

$P(Y=2)=5p^4q\cdot qp+10p^3q^2\cdot p^2=5p^5q^2+10p^5q^2=15p^5q^2$.

Во всех остальных случаях биатлонист будет использовать 3 дополнительных патрона, по свойству вероятности $P(Y=3)=1-\left(P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)\right)=1-p^5-5p^5q-15p^5q^2$.

Y	0	1	2	3
P	p^5	$5p^5q$	$15p^5q^2$	$1-p^5-15p^5q^2-5p^5q$

$M[Y]=0\cdot p^5+1\cdot 5p^5q+2\cdot 15p^5q^2+3\cdot\left(1-p^5-15p^5q^2-5p^5q\right)=$

$=\underline{5p^5q}+\underline{\underline{30p^5q^2}}+3-3p^5-\underline{\underline{45p^5q^2}}-\underline{15p^5q}=3-3p^5-15p^5q^2-10p^5q$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию при $p=0.8$

Y	0	1	2	3
P	0,328	0,328	0,197	0,148

$M[Y]=0\cdot 0.328+1\cdot 0.328+2\cdot 0.197+3\cdot 0.148=1{,}167\approx 1$.

Y^2	0^2	1^2	2^2	3^2
P	0,328	0,328	0,197	0,148

$M\left[Y^2\right]=0^2\cdot 0.328+1^2\cdot 0.328+2^2\cdot 0.197+3^2\cdot 0.148\approx 2.448$

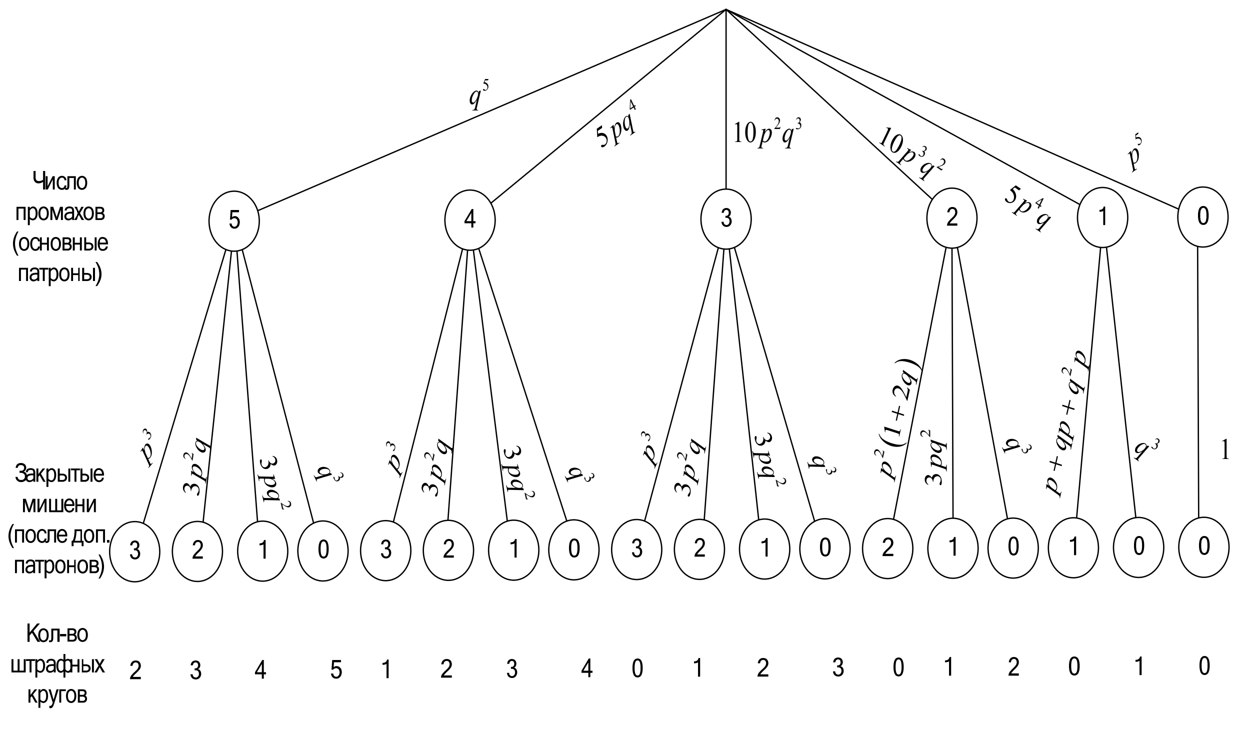
$\mathrm{D}[\mathrm{Y}]=2.448-1.167^2=1.088\approx 1$

Вариация 4

Построить закон распределения случайной величины Z={*количество штрафных кругов*}. Вычислить математическое ожидание и дисперсию для случайной величины Z.

Решение:

Количество штрафных кругов соответствует количеству незакрытых мишеней после использования дополнительных патронов.



Z	P
0	$p^5 \cdot 1 + 5p^4q \cdot \left(p + qp + q^2p\right) + 10p^3q^2 \cdot p^2\left(1+2q\right) + 10p^2q^3 \cdot p^3 =$ $= p^5 + 5p^5q + \underline{\underline{5p^5q^2}} + \underline{5p^5q^3} + \underline{\underline{10p^5q^2}} + \underline{20p^5q^3} + \underline{10p^5q^3} =$ $= p^5 + 5p^5q + 15p^5q^2 + 35p^5q^3 = p^5\left(1+5q+15q^2+35q^3\right)$
1	$5p^4q \cdot q^3 + 10p^3q^2 \cdot 3pq^2 + 10p^2q^3 \cdot 3p^2q + 5pq^4 \cdot p^3 =$ $= 5p^4q^4 + 30p^4q^4 + 30p^4q^4 + 5p^4q^4 = 70p^4q^4$
2	$10p^3q^2 \cdot q^3 + 10p^2q^3 \cdot 3pq^2 + 5pq^4 \cdot 3p^2q + q^5 \cdot p^3 =$ $= 10p^3q^5 + 30p^3q^5 + 15p^3q^5 + p^3q^5 = 56p^3q^5$
3	$10p^2q^3 \cdot q^3 + 5pq^4 \cdot 3pq^2 + q^5 \cdot 3p^2q =$ $= 10p^2q^6 + 15p^2q^6 + 3p^2q^6 = 28p^2q^6$
4	$5pq^4 \cdot q^3 + q^5 \cdot 3pq^2 = 5pq^7 + 3pq^7 = 8pq^7$
5	$q^5 \cdot q^3 = q^8$

Вычислим основные характеристики:

$$M\left[Z\right] = 0 \cdot \left(p^5\left(1+5q+15q^2+35q^3\right)\right) + 1 \cdot 70p^4q^4 + 2 \cdot 56p^3q^5 + 3 \cdot 28p^2q^6 + 4 \cdot 8pq^7 + 5 \cdot q^8 =$$

$$= 1 \cdot 70p^4q^4 + 2 \cdot 56p^3q^5 + 3 \cdot 28p^2q^6 + 4 \cdot 8pq^7 + 5 \cdot q^8$$

Вычислим математическое ожидание $M\left[Z\right]$ и дисперсию при $p = 0.8$

Z	0	1	2	3	4	5
P	0,9437	0,04587	0,009175	0,001147	0,000082	0,000003

$$M\left[Z\right] = 1 \cdot 70p^4q^4 + 2 \cdot 56p^3q^5 + 3 \cdot 28p^2q^6 + 4 \cdot 8pq^7 + 5 \cdot q^8 \approx 0,068,$$

Z^2	0	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
P	0,9437	0,04587	0,009175	0,001147	0,000082	0,000003

$$M\left[Z^2\right] = 1^2 \cdot 70p^4q^4 + 2^2 \cdot 56p^3q^5 + 3^2 \cdot 28p^2q^6 + 4^2 \cdot 8pq^7 + 5^2 \cdot q^8 \approx 0,094$$

$$D\left[Z\right] = M\left[Z^2\right] - \left(M\left[Z\right]\right)^2 = 0,094 - 0,068^2 = 0,089.$$

Вариация 5 (свойство математического ожидания $M\left[nX\right] = nM\left[X\right]$)

В эстафетной гонке принимают участие 4 биатлониста. Пусть каждый из биатлонистов имеет одинаковую вероятность попадания. Определить математическое ожидание для числа промахов, допущенных биатлонистами из положения лежа при использовании основных патронов (вероятность попадания из положения лежа p).

Решение:

Вероятность промаха $q = 1 - p$,

$$M\left[nX\right] = nM\left[X\right] = 4 \cdot 5q = 20q.$$

Вариация 6 (свойство математического ожидания $M\left[X+Y\right] = M\left[X\right] + M\left[Y\right]$)

Определить математическое ожидание для числа промахов, допущенных биатлонистом из положения лежа и из положения стоя при использовании основных патронов (вероятность попадания из положения лежа $p_л$, из положения стоя – p_c).

Решение:

Пусть $X = \{\text{кол} - \text{во промахов из положения лежа}\}$,

$Y = \{\text{кол} - \text{во промахов из положения стоя}\}$,

Тогда $M[X] = 5q_л$; $M[Y] = 5q_с$.

Используя свойство математического ожидания, получаем: $M[X+Y] = 5q_л + 5q_с$.

Вариация 7 (свойство дисперсии $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$)

Определить дисперсию для числа промахов, допущенных биатлонистом из положения лежа и из положения стоя при использовании основных патронов (вероятность попадания из положения лежа $p_л$, из положения стоя – $p_с$).

Решение:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y]$$

$$D[X] = 5p_л q_л$$

$$D[Y] = 5p_с q_с$$

$$D[X+Y] = 5p_л q_л + 5p_с q_с$$

Многомерные случайные величины в биатлоне

Часто приходится решать задачи, в которых рассматриваются события, описываемые не одной, а несколькими случайными величинами (в частности двумя). Так, при стрельбе в эстафетной гонке биатлонист сначала использует основные патроны, а затем при необходимости – дополнительные. Количество штрафных кругов (Z) и количество использованных дополнительных патронов (Y) образуют систему двух случайных величин (Z, Y).

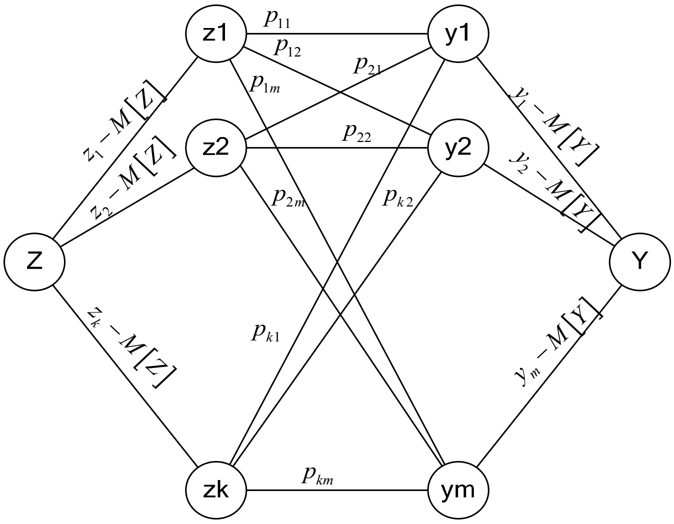
Двумерную случайную величину (X, Y) так же, как и одномерную, можно задавать таблицей. Первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины X, а первый столбец – возможные значения Y. В остальных клетках таблицы указаны соответствующие вероятности, причем их сумма всегда равна единице.

$Z \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_m
z_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1m}
…	…	…	…
z_k	p_{k1}	$\cdots$	p_{km}

Характеристики двумерных случайных величин:

1) **Ковариация** характеризует степень зависимости случайных величин, а также их рассеивание вокруг точки $(M[Z], M[Y])$. $Cov(Z,Y) = M\left[(Z - M[Z]) \cdot (Y - M[Y])\right]$. Ковариация двух независимых случайных величин равна нулю.

Для конечных случайных величин Z,Y ковариацию удобно находить как полный вес всего графа, который называют ковариационным [1, с. 143]:

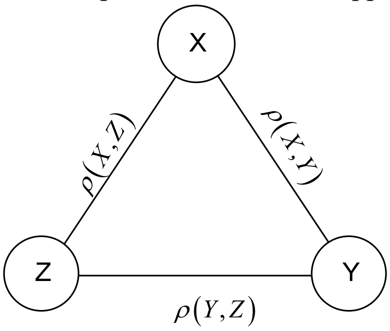


2) Для характеристики линейной зависимости между Z и Y служит **коэффициент корреляции:** $\rho(Z,Y) = \dfrac{Cov(Z,Y)}{\sqrt{D[Z]\cdot D[Y]}}$, причем $|\rho(Z,Y)| \le 1$.

По значению коэффициента определяют направление и тесноту связи. Если $\rho > 0$, то связь прямая, если $\rho < 0$, то связь обратная.

Обычно считают, при $0 < |\rho| \le 0.3$ связь двух случайных величин слабой, при $0.3 < |\rho| \le 0.7$ – средней, а при $0.7 < |\rho| \le 1$ – сильной (или тесной).

Многомерные случайные величины, как правило, задаются корреляционным графом [1, с. 149]:



Вариация 8 (на корреляцию)

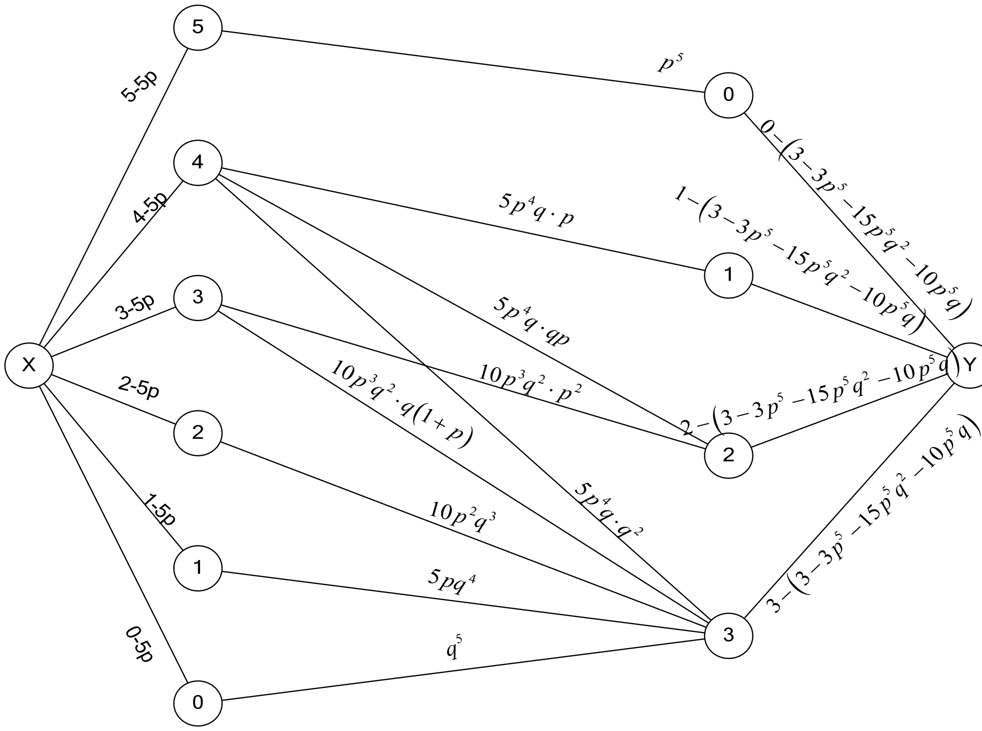
Определить коэффициент корреляции между количеством закрытых мишеней при основной стрельбе и количеством использованных дополнительных патронов.

Решение:

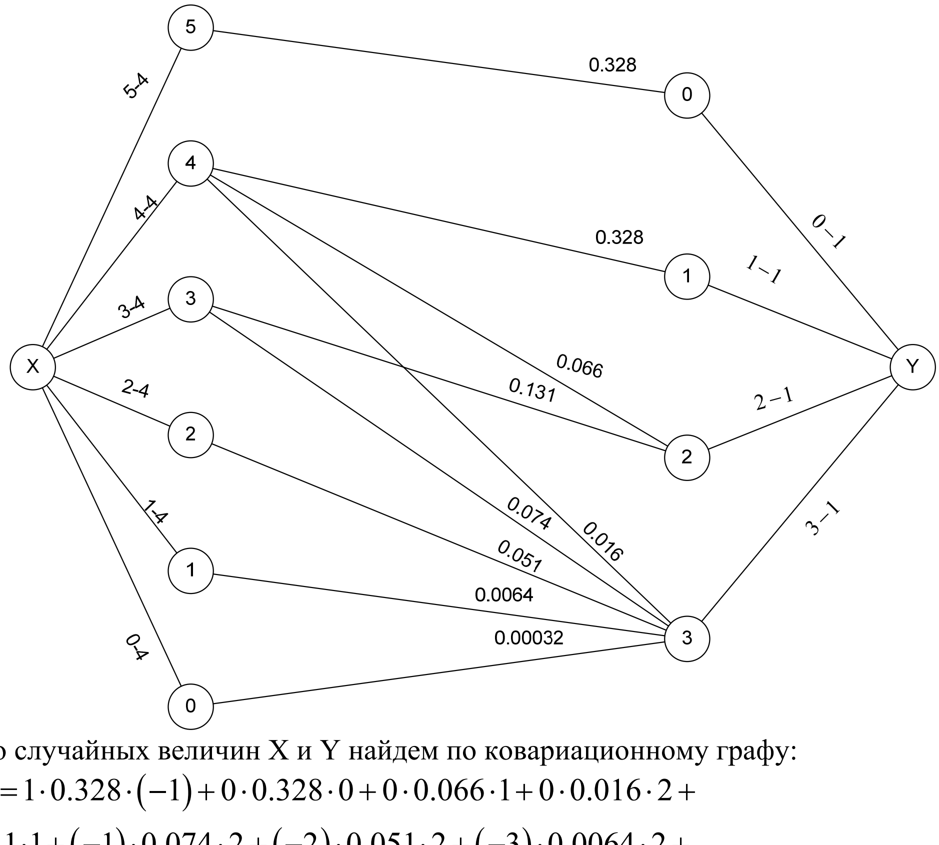
$X = \{\text{количество закрытых мишеней при основной стрельбе}\}$

$Y = \{\text{количество использованных дополнительных патронов}\}$

Построим ковариационный граф, используя значения $M[X] = 5p;\ M[Y] = 3 - 3p^5 - 15p^5q^2 - 10p^5q$, вычисленные в вариациях 1 и 3.



Построим корреляционный граф для $p = 0.8$. $M[X] = 4; M[Y] \approx 1$.



Ковариацию случайных величин X и Y найдем по ковариационному графу:

$$Cov(X,Y) = 1 \cdot 0.328 \cdot (-1) + 0 \cdot 0.328 \cdot 0 + 0 \cdot 0.066 \cdot 1 + 0 \cdot 0.016 \cdot 2 +$$

$$+(-1) \cdot 0.131 \cdot 1 + (-1) \cdot 0.074 \cdot 2 + (-2) \cdot 0.051 \cdot 2 + (-3) \cdot 0.0064 \cdot 2 +$$

$$+(-4) \cdot 0.00032 \cdot 2 \approx -0.852$$

Дисперсии случайных величин вычислены в вариациях 1 и 3.

$D[X] = 0.8$,

$D[Y] \approx 1$.

Следовательно, коэффициент корреляции находится следующим образом:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}} = \frac{-0.852}{\sqrt{0.8\cdot 1}} \approx -0.95.$$

Полученный коэффициент $\rho(X,Y)$ показывает на наличие обратной сильной связи между случайными величинами *X* и *Y*.

Вариация 9 (на многомерные случайные величины)

Построить корреляционный граф для случайных величин *X, Y* и *Z*.

$X = \{\text{количество закрытых мишеней при основной стрельбе}\}$

$Y = \{\text{количество использованных дополнительных патронов}\}$

$Z = \{\text{количество штрафных кругов}\}$.

Решение:

Установим вычисленные параметры для этих случайных величин:

$M[X] = 4; D[X] = 0.8;$

$M[Y] \approx 1; D[Y] \approx 1;$

$M[Z] \approx 0; D[Z] \approx 0.09.$

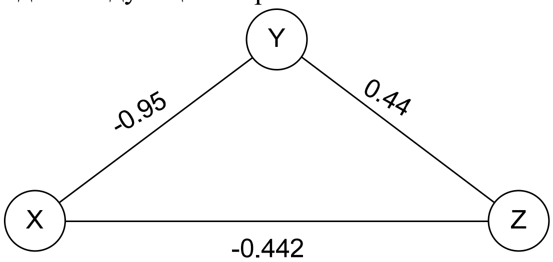
Вычислим ковариацию и коэффициенты корреляции для каждой пары случайных величин:

$Cov(X,Y) \approx -0.852;\ \rho(X,Y) \approx -0.95$ (вариация 8),

$Cov(X,Z) \approx -0.118;\ \rho(X,Z) \approx -0.442;$

$Cov(Y,Z) \approx 0.136;\ \rho(Y,Z) \approx 0.44.$

Корреляционный граф выглядит следующим образом:



Таким образом, в работе предложен авторский вклад в теорию вероятности на примере спортивной тематики, который может найти применение в курсе «Спортивной метрологии» на факультетах физической культуры и физкультурных вузах.

Библиографический список:

1. Афанасьев, В. В. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособ. для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В. В. Афанасьев. – М. : Владос, 2007. – 350 с.

2. Осетров, И. А., Суворова, М. А. Вероятность на вариациях одной задачи в биатлоне [Текст] / И. А. Осетров, М. А. Суворова // Ярославский педагогический вестник. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ. – 2011. – № 2. – Т. II. – С. 139–146.