УДК 519.857

Ю. П. Поварёнков, А. С. Тихомиров, Т. Л. Трошина

Использование методов динамического программирования при составлении учебного плана

В статье рассматривается применение одного из разделов математики, посвящённого теории и методам решения многошаговых задач оптимального управления, а именно, метода динамического программирования при планировании учебных занятий в школе и вузе.

Ключевые слова: динамическое программирование, учебный процесс, учебный план, оптимальное управление.

Ju. P. Povarionkov, A. S. Tikhomirov, T. L. Troshina

Use of Methods of Dynamic Programming at Curriculum Compilation

In this article use of one of Mathematics sections devoted to the theory and methods on solving multistage problems of the optimum control, in particular, the method of dynamic programming at planning of studies at school and higher school is considered.

Keywords: dynamic programming, an educational process, a curriculum, optimum control.

Сложность управления учебным процессом заключается в том, что оценка качества управления и корректировка учебных планов распределения нагрузки и расписания занятий возможны только после завершения определенного цикла обучения (четверти, полугодия, учебного года и т. д.). Будем рассматривать учебный процесс как систему взаимодействия трех объектов: учителя, класса и школьного кабинета, а их взаимодействие в ходе учебных занятий – как некоторый технологический процесс, определяемый учебным планом. Поскольку во взаимодействие вступает большое количество указанных объектов, то поиск оптимального варианта управления их взаимодействием достаточно трудоемок. Для автоматизации составления учебного плана в работе предлагается применить метод динамического программирования. Постановка задачи заключается в следующем: распределить D учебных часов между m темами таким образом, чтобы учащиеся усвоили все m тем на максимально высокий балл. При изучении i-ой темы в течение x часов учащиеся усваивают тему на балл $F_i(x)$, где $i = 1,\dots,m$. Требуется выбрать оптимальное распределение часов между темами, при котором максимизируется балл W, на который учащиеся усвоили все m тем.

Построение математической модели разобьем на следующие этапы:

1) определение числа шагов: число шагов m равно числу тем, между которыми осуществляется распределение;

2) определение состояния системы: состояние системы на каждом шаге характеризуется количеством часов s, имеющимся в наличии перед данным шагом;

3) выбор шаговых управлений: управлением на i-м шаге x_i, $i = 1,\dots,m$ является количество часов, выделяемых на i-ю тему;

4) функция выигрыша на i-м шаге $F_i(x_i)$ – это балл, на который учащиеся усваивают i-ю тему в течение x_i часов;

5) определение функции перехода в новое состояние

$$\varphi_i(s,x) = s - x. \qquad (1)$$

Таким образом, если на i-м шаге система находилась в состоянии s, а выбрано управление x, то на i+1-ом шаге система будет находиться в состоянии $s-x$. Другими словами, если в наличии имеются s часов и на i-ю тему выделяется x часов, то остается распределить $s-x$ часов.

6) составление функционального уравнения для $i = m$:

$$W_m(s) = F_m(s), \qquad (2)$$

$$x_m(s) = s. \qquad (3)$$

На последнем шаге перед распределением часов на последнюю тему условное оптимальное управление соответствует количеству часов, оставшихся от предшествующих тем. Условный оптимальный выигрыш равен баллу, на который учащиеся усваивают данную тему при отведении на нее s часов.

7) основное функциональное уравнение имеет вид:

$$W_i(s) = \max_{x \le s} \{F_i(x) + W_{i+1}(s - x)\}. \qquad (4)$$

Это означает, что если перед i-м шагом осталось s часов, то x часов можно отвести на i-ю тему (при этом балл усвоения этой темы будет $F_i(x)$), а оставшиеся s часов – на оставшиеся темы с i-й до m-й. Оптимальным будет то условное управление x, при котором сумма $F_i(x)$ и $W_{i+1}(s–x)$ максимальна.

Проведем численный расчет модели для $D = 14$ и $m = 3$. Значения $F_i(x)$ для $i = 1, 2, 3$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

x	F_1	F_2	F_3
2	15	20	33
4	20	32	44
6	37	40	55
8	40	50	60
10	50	60	70
12	70	78	86
14	94	96	97

Для $x_1 > x_2$ имеем $F_i(x_1) \le F_i(x_2)$.

Количеству распределяемых часов х для удобства будем придавать значения, кратные двум. Используем 100-балльную систему оценок.

Проведем условную оптимизацию. По ее результатам заполним табл. 2.

Таблица 2

S	i=3		i=2		i=1	
	$x_3(s)$	$W_3(s)$	$x_2(s)$	$W_2(s)$	$x_1(s)$	$W_1(s)$
2	2	33	0	33		
4	**4**	44	2	53		
6	6	55	4	65		
8	8	60	**4**	76		
10	10	70	4	87		

12	12	86	6	95		
14	14	97	12	111	**6**	113

В первой колонке таблицы записываются возможные состояния системы $s = 2, 4,\ldots,14$, в верхней строке – номера шагов $i = 1, 2, 3$. На каждом шаге определяются условные оптимальные управления $x_i(s)$ и условные оптимальные выигрыши $W_i(s)$.

1. Проведение условной оптимизации для последнего шага $i = 3$. Функциональное уравнение на последнем шаге имеет вид

$W_3(s) = F_3(s), \quad x_3(s) = s,$

поэтому два столбца таблицы 2, соответствующие $i = 3$, заполняются автоматически по таблице исходных данных.

2. Условная оптимизация для $i = 2$. Функциональное уравнение на втором шаге имеет вид

$$W_2(s) = \max_{x \le s}\{F_2(x) + W_3(s-x)\}.$$

Для проведения условной оптимизации заполним ряд вспомогательных таблиц (табл. 3–10), соответствующих различным значениям s, то есть различным исходам окончания предыдущего шага.

$s = 2$.

Таблица 3

X	$2–x$	$F_2(x)$	$W_3(2–x)$	$F_2(x)+ W_3(2–x)$
0	2	0	33	33
2	0	20	0	20

$\max\limits_{x \le 2}\{33;20\} = 33,$ следовательно, $W_2(2) = 33$, $x_2(2) = 0$.

$s = 4$.

Таблица 4

X	$4–x$	$F_2(x)$	$W_3(4–x)$	$F_2(x)+ W_3(4–x)$
0	4	0	44	44
2	2	20	33	53
4	1	32	0	32

$\max\limits_{x \le 4}\{44;53;32\} = 53,$ следовательно, $W_2(4) = 53$, $x_2(4) = 2$.

1) $s = 6$.

Таблица 5

x	$6–x$	$F_2(x)$	$W_3(6–x)$	$F_2(x)+ W_3(6–x)$

0	6	0	55	55
2	4	20	44	64
4	2	32	33	65
6	0	40	0	40

$\max\limits_{x\le 6}\{55;64;65;40\} = 65,$ следовательно, $W_2(6) = 65$, $x_2(6) = 4$.

2) $s = 8$.

Таблица 6

x	$8–x$	$F_2(x)$	$W_3(8–x)$	$F_2(x)+ W_3(8–x)$
0	8	0	60	60
2	6	20	55	75
4	4	32	44	76
6	2	40	33	73
8	0	50	0	50

$\max\limits_{x\le 8}\{60;75;76;73;50\} = 76,$ следовательно, $W_2(8) = 76$, $x_2(8) = 4$.

3) $s = 10$.

Таблица 7

x	$10–x$	$F_2(x)$	$W_3(10–x)$	$F_2(x)+ W_3(10–x)$
0	10	0	70	70
2	8	20	60	80
4	6	32	55	87
6	4	40	44	84
8	2	50	33	83
10	0	60	0	60

$\max\limits_{x\le 10}\{70;80;87;84;83;60\} = 87,$ следовательно, $W_2(10) = 87$, $x_2(10) = 4$.

4) $s= 12$.

Таблица 8

x	$12–x$	$F_2(x)$	$W_3(12–x)$	$F_2(x)+ W_3(12–x)$
0	12	0	86	86
2	10	20	70	90
4	8	32	60	92
6	6	40	55	95
8	4	50	44	94
10	2	60	33	93
12	0	78	0	78

$\max\limits_{x\le 12}\{86;90;92;95;94;93;78\} = 95,$ следовательно, $W_2(12) = 95$, $x_2(12) = 6$.

5) $s = 14$.

Таблица 9

x	$14–x$	$F_2(x)$	$W_3(14–x)$	$F_2(x)+ W_3(14–x)$
0	14	0	97	97
2	12	20	86	106
4	10	32	70	102
6	8	40	60	100
8	6	50	55	105
10	4	60	44	104
12	2	78	33	111
14	0	96	0	96

3. Условная оптимизация для $i = 1$.

Перед первым шагом состояние системы известно. $s = D = 14$ часов, и условную оптимизацию следует проводить только для этого значения.
$s = 14$

Таблица 10

x	$14–x$	$F_1(x)$	$W_2(14–x)$	$F_1(x)+ W_2(14–x)$
0	14	0	111	111

2	12	15	95	110
4	10	20	87	107
6	8	37	76	113
8	6	40	65	105
10	4	50	53	103
12	2	70	33	103
14	0	94	0	94

$\max\limits_{x \le 14}\{111;110;107;113;105;103;103;94\} = 113,$ следовательно, $W_1(14) = 113$, $x_1(14) = 6$.

Оптимально высокий балл, который можно набрать за три темы по стобалльной системе оценок при распределении 14 часов, равен 113 баллам:

$W^* = W_1(14) = 113$.

Проведем безусловную оптимизацию. Ее результаты отмечены в таблице 2 жирным шрифтом.

Для $i = 1$ $s_1 = 14$, $W_1(14) = 113$, $x^*_1 = x_1(14) = 6$.

Для $i = 2$ по формуле (1) $s_2 = s_1 - x_1 = 14–6 = 8$, $W_2(8)=76$, $x^*_2 = x_2(8) = 4$.

Для $i = 3$ $s_3 = s_2 - x_2 = 8–4 = 4$, $W_3(4) = 44$, $x^*_3 = x_3(4) = 4$.

$x^* = (6;4;4)$.

Таким образом, для получения оптимально высокого балла за три темы в размере 113 баллов следует отвести на первую тему 6 часов, на вторую – 4 часа, на третью – 4 часа [3, с.130].

Понятно, что подобным образом метод динамического программирования можно использовать и при планировании учебных занятий не только в школе, но и в других учебных заведениях. Так, например, в нашем университете по новому учебному плану для направления подготовки специальностей «Педагогическое образование», профили «Географическое образование», «Биологическое образование», «Химическое образование», «Образование в области безопасности жизнедеятельности» на лекционный курс предмета «Основы математической обработки информации ЭАКА» отведено 14 часов лекционных занятий, причем сам лекционный курс разбит на три раздела: «Элементы высшей математики», «Теория вероятностей», «Математическая статистика». Из проведенных выше вычислений, основанных на методе динамического программирования, следует, что для достижения наилучшего результата на тему «Элементы высшей математики» надо отвести 6 часов, на тему «Теория вероятностей» – 4 часа и на тему «Математическая статистика» также 4 часа лекционных занятий.

Библиографический список

1. Исследование операций в экономике [Текст] / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Изд-во ЮНИТИ, 1999.
2. Таха, Х. Введение в исследование операций [Текст] : в 2 кн. Кн. 1 / Х. Таха. – М. : Мир, 1985.
3. Хазанова, Л. Э. Математическое моделирование в экономике [Текст] : учеб. пособие / Л. Э. Хазанова. – М. : Изд-во БЕК, 1998.