УДК 517.925.51

Ю. А. Коняев, Д. В. Михайлов, М. Б. Вакджира

Асимптотика собственных частот анизотропного резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ)

В статье изучена структура колебания анизотропного резонатора (ВТГ), описанная с помощью модельной системы однородных ОДУ. С помощью нового варианта метода расщепления (в отличие от известных методов возмущения) предложен алгоритм построения собственных значений, что позволяет сделать вывод о наличии прецессии стоячей волны колебания резонатора.

Ключевые слова: метод расщепления, собственные частоты, анизотропный резонатор, твердотельный гироскоп, прецессия, стоячая волна, теории возмущений, собственные значения, собственные векторы.

Ju. A. Konyaev, D. V. Mikhailov, M. B. Wakjira

Asymptotics of Own Frequencies of the Anisotropic Resonator of a Wave Solid-State Gyroscope (WSSG)

In this paper we study the structure of anisotropic vibration of the resonator (WSSG) described with the help of the model system of ordinary differential equations. With the help of the splitting method (in contrast to the known methods of perturbation) is offered an algorithm to construct eigen values and it suggests the presence of precession of a standing wave oscillation of the resonator.

Keywords: a splitting method, natural frequencies, anisotropic vibration, a solid-state gyroscope, precession, a standing wave, a perturbation theory, an eigen value and an eigen vector.

Колебания анизотропного резонатора ВТГ [1] могут быть описаны двумя системами однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \mathbf{A}(\varepsilon) f = 0, \\ \ddot{g} + \mathbf{B}(\varepsilon) g = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $f,\ g \in R^5$; $\mathbf{A}(\varepsilon) = \sum_0^4 \mathbf{A}_k \varepsilon^k$; $\mathbf{B}(\varepsilon) = \sum_0^4 \mathbf{B}_k \varepsilon^k$; $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}_j$ $\left(j = \overline{0,3}\right)$;

$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{\Lambda}_0 = diag\left\{\omega_{02}^2, \ldots, \omega_{06}^2\right\}$; $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2 =$;

$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & b_4 & 0 \\ b_2 & 0 & b_5 & 0 & b_6 \\ 0 & b_4 & 0 & b_7 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 & 0 & b_9 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_3 = \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & c_4 \\ 0 & c_3 & 0 & c_5 & 0 \\ c_2 & 0 & c_5 & 0 & c_6 \\ 0 & c_4 & 0 & c_6 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 & d_3 \\ 0 & d_4 & 0 & d_5 & 0 \\ d_2 & 0 & d_6 & 0 & d_7 \\ 0 & d_5 & 0 & d_8 & 0 \\ d_3 & 0 & d_7 & 0 & d_9 \end{pmatrix}$;

$$\mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & d_2 & 0 & d_3 \\ 0 & d_4 & 0 & d_5 & 0 \\ d_2 & 0 & d_6 & 0 & d_7 \\ 0 & d_5 & 0 & d_8 & 0 \\ d_3 & 0 & d_7 & 0 & d_9 \end{pmatrix}$$

– известные матрицы, которые отражают наличие суперпозиции двух бегущих в разные направления волн с частотами $\omega_{kf}\left(\varepsilon\right)$ и $\omega_{kg}\left(\varepsilon\right)$, что приводит к появлению стоячих волн.

В отличие от классических методов [2, 3] теории регулярных возмущений, используемых в [1], мы воспользуемся для решения задачи (1) (и определения частот $\omega_{kf}\left(\varepsilon\right)$ и $\omega_{kg}\left(\varepsilon\right)$) более эффективным методом расщепления [4].

Теорема 1.

Собственные значения $\left\{\lambda_j(\varepsilon)\right\}_1^n$ *и собственные векторы* $\left\{\mathbf{S}_j(\varepsilon)\right\}_1^n$ *возмущенной матрицы* $\mathbf{A}\left(\varepsilon\right)=\sum\limits_0^\infty A_k\varepsilon^k$ *(где матричный ряд сходится по некоторой норме при* $\left|\varepsilon\right|<<1$*) определяются с помощью простого итерационного алгоритма [4] при наличии у матрицы* $\mathbf{A}_0$ *простого спектра* $\left\{\lambda_{0j}\right\}_1^n$ $\left(\lambda_{0j}\neq\lambda_{0k},\, k\neq j;\; k,j=\overline{1,n}\right)$.

Доказательство.

Равенство $\mathbf{A}\left(\varepsilon\right)S_j\left(\varepsilon\right)=\lambda_j\left(\varepsilon\right)S_j\left(\varepsilon\right),\quad \left(j=\overline{1,n}\right)$ эквивалентно матричному уравнению $\mathbf{A}\left(\varepsilon\right)\mathbf{S}\left(\varepsilon\right)=\mathbf{S}\left(\varepsilon\right)\mathbf{\Lambda}\left(\varepsilon\right)$, где $\mathbf{S}\left(\varepsilon\right)=\left\{s_1(\varepsilon),...,s_n(\varepsilon)\right\}$, $\mathbf{\Lambda}\left(\varepsilon\right)==diag\left\{\lambda_1(\varepsilon),...,\lambda_n(\varepsilon)\right\}$.

Далее для произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A}\left(\varepsilon\right)=\sum\limits_0^\infty A_k\varepsilon^k$ воспользуемся обозначениями $\overline{\mathbf{A}}=diag\left\{a_{11},...,a_{nn}\right\}$ и $\overline{\overline{\mathbf{A}}}=\mathbf{A}-\overline{\mathbf{A}}$. Замена $\mathbf{S}\left(\varepsilon\right)=\mathbf{S}_0\mathbf{H}\left(\varepsilon\right)$ $\left(S_0^{-1}A_0S_0=\Lambda_0=diag\left\{\lambda_{0j},...,\lambda_{0n}\right\}\right)$ приводит к уравнению

$$\mathbf{B}\left(\varepsilon\right)\mathbf{H}\left(\varepsilon\right)=\mathbf{H}\left(\varepsilon\right)\mathbf{\Lambda}\left(\varepsilon\right), \tag{2}$$

решение которого будем искать в виде $\mathbf{\Lambda}\left(\varepsilon\right)=\sum\limits_0^N\mathbf{\Lambda}_k\varepsilon^k+\underline{\underline{\mathbf{O}}}\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, $\mathbf{H}\left(\varepsilon\right)=\mathbf{E}+\sum\limits_1^N\overline{\overline{\mathbf{H}}}_k\varepsilon^k+\underline{\underline{\mathbf{O}}}\left(\varepsilon^{N+1}\right)$.

Приравнивание в (2) коэффициентов при одинаковых степенях ε приводит к уравнениям вида:

$$\mathbf{\Lambda}_0\overline{\overline{\mathbf{H}}}_k-\overline{\overline{\mathbf{H}}}_k\mathbf{\Lambda}_0=\mathbf{\Lambda}_k-\mathbf{P}_k\,,\ \left(\mathbf{P}_1=\mathbf{B}_1\right),$$

где $\mathbf{P}_k=\mathbf{B}_k+\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(\mathbf{B}_j\overline{\overline{\mathbf{H}}}_{k-j}-\overline{\overline{\mathbf{H}}}_{k-j}\mathbf{\Lambda}_j\right)=\left\{p_{ijk}\right\}_1^n,\quad \left(k=\overline{2,n}\right)$, откуда имеем $\mathbf{\Lambda}_k=\overline{\mathbf{P}}_k$, $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_k=\left\{h_{ijk}\right\}_1^n$, $h_{ijk}=\sigma_{ij}^{-1}p_{ijk}$, $\left(\sigma_{ij}=\lambda_{0i}-\lambda_{0j}\right)$ ■

Использование алгоритма *теоремы 1* для заданных конкретных матриц $\mathbf{A}_j$ и $\mathbf{B}_j$ позволяет решить задачу (1) и найти расщепление частот $\Delta\omega_k\equiv\omega_{kf}-\omega_{kg}=\varepsilon^4\delta=\varepsilon^4(d_1-f_1)$, которое приводит к прецессии стоячей волны колебаний резонатора.

Библиографический список

1. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов [Текст] / Т. Като. – М. : Мир, 1972, 740с.
2. Коняев, Ю. А. Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений [Текст] / Ю. А. Коняев // Математический сборник. – 1993. – Т. 184, №12. – С. 133–144.
3. Ланкастер, П. Теория матриц [Текст] / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
4. Меркурьев, И. В., Подалков, В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов [Текст] / И. В. Меркурьев, В. В. Подалков. – М. : Физматлит, 2009. – 228 с.