УДК 512.7

**С. А. Тихомиров**

## Серия потенциальных компонент в некоторых пространствах модулей стабильных расслоений ранга 2 на $P^3$ с нулевым первым классом Черна

В данной статье мы строим новую серию потенциальных компонент в некоторых пространствах модулей стабильных расслоений ранга 2 на $P^3$.

**Ключевые слова:** векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна, многообразие модулей.

**S. A. Tikhomirov**

## Series of Potential Components in Some Varieties of Moduli of Stable Rank-2 Bundles on $P^3$ with Zero First Chern Class

In this article we construct the new series of potential components in some varieties of moduli of stable rank-2 bundles on $P^3$.

**Keywords:** vector bundle, stable bundle, Chern's classes, variety of moduli.

В работе предъявляется новая серия потенциальных компонент в пространствах модулей $M_{P^3}(2;0,n)$ стабильных векторных расслоений ранга 2 на трехмерном проективном пространстве с $c_1 = 0$ и $c_2 = n = 1+5h$, $h \geq 1$, а также выводится формула для вычисления размерности каждого такого множества.

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики.

Компоненты пространств модулей $M_{P^3}(2;0,n)$ для $1 \leq n \leq 4$ известны: в случаях n = 1,2 имеется единственная инстантонная компонента (см. [9]), в случаях n=3,4 к ней добавляется по одной компоненте (см. [9], [7] для n=3 и [6], [9] для n = 4. Кроме того, М. Ч. Чанг в работе [5] показала, что в случае $c_2$ = 4 семейство классов расслоений, являющихся когомологическими пучками монады типа $0 \to O_{P^3}(-2) \oplus O_{P^3}(-1) \to O_{P^3}(-1) \oplus 4O_{P^3} \oplus O_{P^3}(1) \to O_{P^3}(1) \oplus$

$\oplus\, O_{P^3}(2) \to 0$, лежит в замыкании семейства классов расслоений, являющихся когомологическими пучками монады типа $0 \to O_{P^3}(-2) \to 4O_{P^3} \to O_{P^3}(2) \to 0$. Таким образом, нетривиальные случаи начинаются с $n = 5$.

Векторное расслоение $E = E_{2r}$ ранга 2r на $P^3$ называется *симплектическим*, если существует изоморфизм $\Theta : E \xrightarrow{\cong} E^\vee$ такой, что $\Theta^t = -\Theta$, где $\Theta^t = \Theta^\vee \circ can$, а $can : E \xrightarrow{\approx} E^{\vee\vee}$ – канонический изоморфизм. Нетрудно видеть, что если *E*-симплектическое расслоение, то $c_1(E) = c_3(E) = 0$. Симплектическое векторное расслоение *E* называется *симплектическим инстантонным расслоением* (или кратко *симплектическим инстантоном*), если $h^0(E(-1)) = 0$ и $h^1(E(-i)) = 0$ для $i \geq 2$. Для фиксированного $n \geq 0$ через $I^s(2r;n)$ обозначим пространство модулей (то есть классов изоморфизма) симплектических инстантонов ранга 2r на $P^3$ с $c_2(E)$ = n. Через $I^s_{2k}(2r;n)$ обозначим локально замкнутое подмножество в $I^s(2r;n)$ классов расслоений *E*, удовлетворяющих условиям: $h^0(E) = 2k$, отображение вычисления $H^0(E) \otimes O_{P^3} \xrightarrow{ev} E$ – мономорфизм, и индуцированное симплектической структурой $\Theta : E \xrightarrow{\cong} E^\vee$ отображение $\widetilde{\Theta} : H^0 E \to (H^0 E)^\vee$ является симплектическим изоморфизмом.

Через $I_0^s$(2r;n) обозначим подмножество в $I^s$(2r;n) классов расслоений $E$, удовлетворяющих условию $h^0(E)=0$.

Рассмотрим множества

$$M_k^{h,n-4h} := \{[E_2]\in M_{P^3}(2;0,n) \mid h^1(E_2(-2))=h, \rho_{E_2}(-1)=n-4h\}, \quad (1)$$

где $\rho_{E_2}(-1)$ – один из основных инвариантов расслоения $E_2$ (см., например, [4]) и $\Sigma_k^{h,n-4h:} := \{([E_2],[E_{2+2h}]\in M_k^{h,n-4h}\times I_{2k}^s(2+2h,n-4h) \mid c_2(E_{2+2h})=1+h\}$, где $E_{2+2h}$ – симплектическое расслоение, получаемое из $E_2$ методом двойных расширений, представленным автором в статье [2]. Также в теореме 2.1 работы [2] доказано, что $c_2(E_{2+2h})=n-4h$, следовательно, с учетом определения (1) имеем:

$$n=1+5h, \quad (2)$$

а значит, при $h\ge 1$ наши множества $\Sigma_k^{h,n-4h}$ лежат в почти неизученных пространствах модулей.

Далее, у множеств $\Sigma_k^{h,n-4h:}$ есть две естественные проекции: $p_1:\Sigma_k^{h,n-4h:}\to M_k^{h,n-4h}$ и $p_2:\Sigma_k^{h,n-4h}\to I_{2k}^s(2+2h,n-4h)$, слои которых $p_1^{-1}([E_2])=P^{h^2-1}$ и $p_2^{-1}([E_{2+2h}])=P^{16(n-4h)h-1}$ соответственно. В работе [3] автором был доказан изоморфизм

$$I_0^s(2r-2k;n)\xrightarrow{\cong} I_{2k}^s(2r;n). \quad (3)$$

Кроме того, из основных результатов работы [10] следует, что $\dim I_{2k}^s(2+2h,n-4h)=4(n-4h)(h-k+2)-(h-k+1)(2h-2k+3)$, в частности, в силу (3) при $k=0$ имеем $\dim I_0^s(2+2h,n-4h)=4(n-4h)(h+2)-(h+1)(2h+3)$.

В итоге, с учетом (2) получаем:

$$\dim M_k^{h,n-4h}=16(n-4h)h-1-(h^2-1)+4(n-4h)(h+2)-(h+1)(2h+3)=16h^2+16h-h^2+$$
$$+4h^2+12h+8-2h^2-5h-3=17h^2+23h+5. \quad (4)$$

**Теорема.** Множества (1) дают новую серию потенциальных компонент в пространствах модулей $M_{P^3}(2;0,1+5h),\ h\ge 1$.

**Доказательство**. Построенные множества (1) по конструкции и своим размерностям (4) отличны от известных серий компонент (или потенциальных компонент) стабильных 2-расслоений с $c_1=0$ на $P^3$, представленных в статьях [1], [6] и [8]. Сопоставим размерности (4) с «правильными» размерностями. Ввиду (2) имеем: $8n-3=40h+5$, тем самым, $17h^2+23h+5-40h-5=17h^2-17h=$ $=17h(h-1)$. Таким образом, при $h=1$ размерность совпадает с «правильной», а при $h>1$ она будет выше «правильной».

### Библиографический список


1. Ведерников, В. К. Модули стабильных расслоений ранга 2 на $P^3$ с фиксированным спектром [Текст] / В. К. Ведерников // Известия АН СССР. Серия математическая. – Т. 48, №5. – 1984. – С. 986–998.
2. Тихомиров, С. А. Метод двойных расширений в исследовании стабильных расслоений на $P^3$ [Текст] / С. А. Тихомиров // Труды Шестых Колмогоровских чтений. – Ярославль : ЯГПУ, 2008. – С. 174–183.
3. Тихомиров, С. А. Симплектические инстантонные расслоения на пространстве $P^3$: некоторые новые результаты [Текст] / С. А. Тихомиров // Материалы международной конференции «Чтения Ушинского» : Математика и физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания. – Ярославль : ЯГПУ, 2009. – С. 13–15.
4. Barth W. Some experimental data//Les equations de Yang-Mills/A.Douady, J.-L.Verdier, eds/Seminaire E.N.S. 1977–1978, Asterisque, 71–72 (1980), 205–218.
5. Chang M.C. Stable rank 2 bundles on $P^3$ with $c_1$=0, $c_2$=4 and $\alpha=1$//Math. Z., 184 (1983), 407–415.
6. Ein L. Generalized null correlation bundles//Nagoya Math. J., 111 (1988), 13–24.

7. Ellingsrud G., StrÖmme S.-A. Stable rank-2 bundles on $P^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$ //Math. Ann. 255 (1981), 453–463.

8. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Mathematische Annalen, 254 (1980), 121–176.

9. Hartshorne R., Rao A.P. Spectra and monads of stable bundles//J. Math. Kyoto Univ., 31, № 3 (1991), 789-806.

10. Tikhomirov A.S. Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd $c_2$ on projective space//Preprint MPIM, № 50 (2009).