ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского».
150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108.

УДК 53

А. Г. Штерн, П. Г. Штерн

Построение математической модели физического явления без введения ненаблюдаемых непосредственно величин

На основе законов Кеплера и наблюдения за падением тел вблизи поверхности Земли предложено уравнение центрально-симметричного взаимодействия двух тел. С помощью этого уравнения получены некоторые основные уравнения аналитической механики, не содержащие ненаблюдаемых величин силы и массы.

Ключевые слова: Центральное взаимодействие тел, уравнение взаимодействия, сила, масса, уравнение Лагранжа второго рода, уравнение Гамильтона.

A. G. Shtern, P. G. Shtern

Making Up of the Mathematical Model of a Physical Phenomenon without Introduction of Non-Observable Directly Sizes

On the basis of Kepler's laws and supervision over falling of bodies near the Earth's surface, the equation of central-symmetric interaction of two bodies is o ered. By means of this equation are received some main equations of analytical mechanics which do not contain non-observable sizes of force and weight.

Keywords: central interaction of bodies, interaction equation, force, weight, Lagrange's equation of the second degree, Hamilton's equation.

Движение есть изменение геометрических соотношений между взаимными положениями тел. Время – повторяющееся соотношение между положениями тел. Повторение – дискретная последовательность, иначе цепь, одинаковых соотношений. Пренебрежение ничтожными в свете решаемой задачи проявлениями всеобщей взаимозависимости, означающей не повторяемость состояний, влечёт «рабочую» искусственность такого представления как время. Дискретность последовательности проявляется в принципе неопределённости. Границы тел не определённы а переход от одного тела к другому характеризуется соотношением скоростей убывания проявления свойств рассматриваемого и других окружающих его тел. Показателен, в этом отношении, пример волн де-Бройля.

Прежде всего, вместо введения, напомним здесь точки зрения, исходя из которых, в соответствии с Г.Герцем [1], можно судить о ценности физических теорий и о ценности их изложения.

«Ближайшая и в определенном смысле важнейшая задача нашего сознательного познания природы заключается в том, чтобы найти возможность предвидеть будущий опыт и в соответствии с этим регулировать наши действия в настоящем. Основой для решения этой задачи познания при всех обстоятельствах служит предшествующий опыт, полученный или из случайных наблюдений или из специальных экспериментов.

Метод, которым мы всегда пользуемся при выводе будущего из прошедшего, чтобы достигнуть этого предвидения, состоит в следующем: мы создаем себе внутренние образы или символы внешних предметов, причем мы создаем их такими, чтобы логически необходимые следствия этих представлений в свою очередь были образами естественно необходимых следствий отображенных предметов. Чтобы это требование вообще было выполнимым, должно существовать некоторое соответствие между природой и нашим умом. Опыт учит нас, что это требование выполнимо и что такое соответствие существует в действительности. Если нам удалось создать из накопленного до сих пор опыта представление требуемого характера, то мы можем в короткое время вывести из них, как из моделей, следствия, которые сами по себе проявились бы во внешнем мире только через продолжительное время или же были результатом нашего вмешательства; следовательно, мы имеем возможность предвидеть факты и координировать принятые нами решения со сложившимися представлениями. Образы, о которых мы говорим, являются нашими представлениями о вещах; они находятся с вещами лишь в одном существенном соответствии, которое состоит в выполнении упомянутого выше требования. Однако отнюдь не необходимо, чтобы они, кроме того, были в каком-либо другом соответствии с вещами. Фактически мы не знаем и не имеем способа узнать, совпадают ли наши представления о вещах с этими вещами в чем-либо другом, кроме упомянутого выше одного основного соотношения. Образы предметов, создаваемые нами, еще не определены однозначно требованием, чтобы следствия образов были в свою очередь образами следствий. Возможны различные образы одних и тех же предметов и эти образы могут отличаться в различных отношениях. Недопустимыми образами мы должны были бы признать заранее такие, которые уже в себе содержат противоречие законам нашего мышления и, следовательно, прежде всего мы требуем, чтобы все наши образы были логически допустимы, или просто допустимы. Мы называем допустимые образы неправильными в том случае, если их существенные соотношения противоречат отношениям внешних вещей, т. е. они не удовлетворяют нашему первому основному требованию. Поэтому мы требуем, во-вторых, чтобы наши образы были правильными. Но два допустимых и правильных образа одних и тех же внешних предметов могут еще отличаться один от другого с точки зрения целесообразности. Из двух образов одного и того же предмета тот образ будет более целесообразным, который в большей степени отображает существенные отношения предмета, чем тот, который, как нам хочется особо подчеркнуть, является более ясным. Из двух образов более целесообразным при одинаковой ясности будет тот образ, который, наряду с существенными чертами, содержит меньше излишних или пустых отношений, который, следовательно, является более простым. Пустых отношений нельзя избежать полностью, ибо они привносятся в образы уже потому, что это только образы, и к тому же образы нашего ума и, следовательно, должны определяться также свойствами его способа отображения. До сих пор мы перечисляли требования, которые мы ставим перед самими образами. Совсем другие, однако, те требования, которые мы ставим перед научным описанием таких образов. Мы требуем от последнего, чтобы оно ясно показало, какие свойства приписываются образам ради их допустимости, какие ради их правильности и какие ради их целесообразности. Только так мы получаем возможность изменять наши образы и улучшать их. То, что приписывалось образам ради их целесообразности, содержится в обозначениях, определениях, сокращениях, одним словом, во всем том, что мы можем произвольно добавлять и отбрасывать. То, что приписывается образам ради их правильности, содержится в данных опыта, на основе которых построены образы. То, что приписывается образам ради их допустимости, дано свойствами нашего ума. Является ли образ допустимым или нет, можно решить однозначно в положительном или отрицательном смысле, и при этом наше решение сохраняет силу навсегда. Является ли картина правильной или нет, можно тоже решить однозначно в положительном или отрицательном смысле, но только по состоянию нашего теперешнего опыта и при допущении оговорки, касающейся более позднего и более зрелого опыта. Является ли образ целесообразным или нет, по этому вопросу не существует однозначного решения; здесь могут существовать различные мнения. Один образ может иметь преимущества в одном, другой — в другом отношении, и только в результате постепенной проверки многих образов с течением времени выясняются, наконец, наиболее целесообразные»

Предлагаемая ниже работа представляет интерес, хотя бы гносеологический. Ведь, если окажется, что принятая модель согласуется с экспериментом, но содержит ненаблюдаемые непосредственно величины, всегда есть соблазн предположить, что согласованность с экспериментом служит подтверждением реального существования объекта, отвечающего обозначающей его в модели величине. Поэтому, резонно полагать, что поиск наиболее лаконичных математических моделей сохранит актуальность, так же как несомненна актуальность построения математических моделей продолжающихся наблюдений вновь обнаруживаемых свойств физических объектов.

Одним из построений математической модели физического явления направленным на уменьшение количества вводимых ненаблюдаемых непосредственно величин является исключение силы Кельвином и Герцем, о котором пишется, например, в работах [1],[5]. Изложенное ниже построение исходит из наблюдений за падением тел на Землю и за строением солнечной системы, которые показывают, что в пустоте:

- различные тела падают одинаково, начав падать одновременно, они движутся с одинаковой скоростью;
- падение представляет собой ускоренное движение и происходит с постоянным ускорением, на расстояниях близких к поверхности Земли;
- ускорение падения величина обратно пропорциональная квадрату расстояния между телами, если расстояние много больше размеров каждого из них.

Перечисленное описывает содержание взаимодействия тел без включения в описание ненаблюдаемых представлений и не измеряемых непосредственно величин массы и силы.

Проиллюстрируем это на примере взаимодействия планет солнечной системы [3], считая известными три закона Кеплера:

1) планеты обращаются вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце;
2) площади, описываемые радиус-векторами планеты, пропорциональны времени;
3) квадраты времен обращения относятся как кубы средних расстояний планет до Солнца, или как кубы больших полуосей.

По первому закону Кеплера уравнение траектории планеты имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ – параметр, $e = \frac{C}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ – эксцентриситет, a и b – большая и малая полуоси эллипса.

Как легко видеть из рис. 1, приращение площади S, описываемой радиусом-вектором OM, можно определить по формуле

$$\Delta S = \frac{1}{2}\rho\left(\rho+\Delta\rho\right)\cdot\Delta\varphi \approx \frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi$$

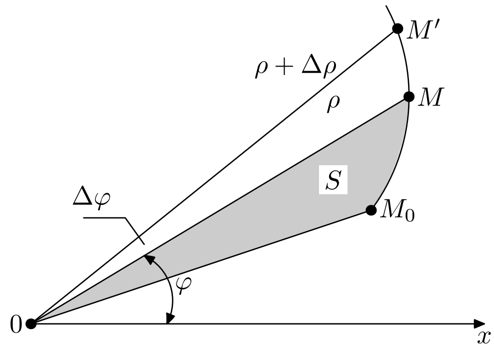

Рис. 1

Отсюда получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Эта величина, характеризующая быстроту изменения площади, описываемой радиусом-вектором точки, называется *секториальной скоростью*

По второму закону Кеплера секториальная скорость постоянна:

$$\rho^2\dot{\varphi} = C, \tag{1}$$

где $C = const$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{a^3}{\tau^2} = k$$

где a – большая полуось, τ – время обращения планеты вокруг Солнца и k – постоянная, одинаковая для всех планет.

Пользуясь этими соотношениями, определим проекции ускорения планеты на оси полярных координат.

Прежде всего по второму закону Кеплера (1) и по формуле для трансверсального ускорения

$$w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})$$

получим $w_\varphi = 0$; следовательно, остается найти лишь проекцию ускорения планеты

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2.$$

По этой формуле с учетом первого и второго законов Кеплера будем иметь

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{pe\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\cdot\frac{C}{\rho^2} = \frac{Ce\sin\varphi}{p} \quad \text{и, следовательно,} \quad \ddot{\rho} = \frac{Ce\cos\varphi}{p}\cdot\dot{\varphi} = \frac{C^2e\cos\varphi}{p\rho^2}.$$

После подстановки полученных значений в выражение для w_ρ получим

$$w_\rho = -\frac{C^2}{p}\cdot\frac{1}{\rho^2}. \tag{2}$$

Если планета сделает полный оборот, то по определению секториальной скорости $\frac{1}{2}C\tau = \pi ab$, откуда $\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2a^2b^2}{\tau^2(b^2/a)} = \frac{4\pi^2a^3}{\tau^2}$, а следовательно по третьему закону Кеплера $\frac{C^2}{p} = 4\pi^2k$ и, окончательно, из (2) будем иметь

$$w_\rho = -\frac{4\pi^2k}{\rho^2}. \tag{3}$$

Таким образом, ускорение планет обратно пропорционально квадрату их расстояния от Солнца и направлено от планеты к Солнцу – закон, открытый впервые Ньютоном. Умножив левую и правую часть формулы (3) на массу планеты m, получим

$$F_\rho = \frac{4\pi^2a^3}{\tau^2}\cdot\frac{m}{\rho^2} \tag{4}$$

Согласно третьему закону Кеплера отношение a^3/τ^2 одинаково для всех планет Солнечной системы. Предположив, что масса Солнца M аналогично массе планеты m входит в формулу для силы притяжения в виде множителя, примем, что

$$\frac{4\pi^2a^3}{\tau^2} = fM$$

где f – коэффициент пропорциональности, который не должен зависеть ни от массы Солнца, ни от массы притягиваемой к Солнцу планеты, т. е. быть универсальной константой. Тогда формула (4) запишется в виде

$$F_\rho = f\frac{Mm}{\rho^2}.$$

Таков общий вид формулы закона всемирного тяготения, справедливого для любых двух тяготеющих масс.

Универсальная постоянная тяготения f, выражающая силу взаимного притяжения двух масс в 1 г каждая, находящихся друг от друга на расстоянии 1 м, была определена путем непосредственного измерения (с помощью точных крутильных весов) силы притяжения двух шаров впервые Кавендишем в 1798 г., позднее более точно Этвешем в 1912 г.; по современным данным:

$$f = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2).$$

Становится ли рассмотренный образ после введения в формулу (3) силы взаимодействия тел и их массы m более целесообразным или нет, можно определить, по Г. Герцу, только с течением времени.

Расстояние между телами и другие протяжённости, входящие в определения пути, скорости и ускорения заменяются временем необходимым для проявления изменения происшедшего с одним телом на ином находящемся во взаимодействии с ним теле.

Рис. 2 поясняет описание взаимодействия тел. T – «Расстояние» между телами 1 и 2 характеризуется величиной продолжительности времени необходимой для того, чтобы изменение происшедшее с телом 1 проявилось на теле 2 и наоборот, q_1^0 – модуль величины ускорения свободного падения на поверхность тела 1, одинаковой для любых падающих тел, умноженной на квадрат радиуса тела 1. Аналогично, q_2^0 – модуль величины ускорения свободного падения на поверхность тела 2, одинаковой для любых падающих на него тел, умноженной на квадрат радиуса тела 2. Радиус тела определятся по среднему радиусу слоя, в котором модуль ускорения свободного падения не меняется. Для описания взаимодействия тел толщина этого слоя пренебрежима. График убывания ускорения свободного падения с «удалением» от тела 2, подобный приведённому для тела 1, на рис. 2. не показан.Поскольку все падающие на какое-либо тело тела падают на него одинаково, ускорение свободного падения на это тело является его единственной характеристикой отличающей его в данном взаимодействии от других тел. Наблюдения строения солнечной системы приводят к заключению, что по мере удаления от тела, на которое происходит свободное падение, ускорение свободного падения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от тела, на которое происходит падение. Поэтому названной выше характеристикой тела может служить значение ускорения свободного падения на его поверхности или в близости к ней, по отношению к «расстоянию» между телами, иначе к времени необходимом для того, чтобы изменение происшедшее с одним взаимодействующим телом проявилось на другом взаимодействующем теле, и наоборот.

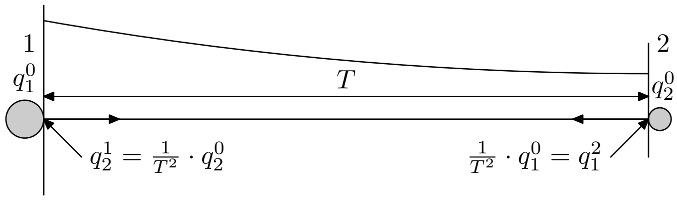

Рис.2

Описание взаимодействия тел, отвечающее рис. 2 и вышеизложенными замечаниями к нему, приводит к следующей формулировке закона взаимодействия

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{T^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right). \tag{5}$$

Если полагать, что телом является любая совокупность чувственно или инструментально выделяемых неоднородностей обладающих свойством взаимодействия, в частности попарного и ведущего к увеличению времени необходимого для того, чтобы изменение происшедшее с одним взаимодействующим телом проявилось на другом взаимодействующем теле, то в правой части закона взаимодействия вместо минуса будет стоять плюс.

Положим, что ускорением свободного падения на тело 2 можно пренебречь по сравнению с таковым для падения на тело 1. Формула 5 примет вид

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{T^2}q_1^0. \tag{6}$$

При вычислении второй производной стоящей в левой части выражения (6) следует учесть кинематические соотношения, связанные с начальными условиями для тела 2, обладающего скоростью V_2 , см. рис. 3, по отношению к телу 1, принимаемому за полюс в полярной системе координат, где T будет рассматриваться как модуль вектора направленного от тела 1 к телу 2. Тогда в левой части выражения (6) произойдёт учёт радиального и трансверсального ускорения. Уравнение (6) примет вид

$$\ddot{T} - T\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{T^2}q_1^0 \tag{7}$$

где θ – отсчитываемый против часовой стрелки угол а точка над буквой означает производную по времени. Трансверсальное же ускорение будет

$$\ddot{\theta}T^2 + 2\dot{\theta}\dot{T} = 0 \tag{8}$$

Откуда следует

$$T^2\dot{\theta} = const. \tag{9}$$

т.е., что радиус-вектор, модуль которого T, проведённый из начала координат к падающему телу, описывает в равные времена равные площади.

Рассмотренный пример использования описания формулой (5) взаимодействия тел представляет собой математическую модель проблемы Кеплера (рассмотренной выше). Обратим внимание на то, что формула (5) описывает свободное падение тел друг на друга, а при замене минуса на плюс в правой части формулы, свободное разбегание их, в то время как проблема Кеплера касается несвободного падения тел, что повлекло использование кинематических соображений при раскрытии состава второй производной $\frac{d^2T}{dt^2}$. В природе нет свободных падений или разбеганий. Приближённо они реализуются в экспериментах. Несвободные парные падения и разбегания являются сочетаниями парных взаимодействий с непренебрежимыми последствиями пренебрежимых взаимодействий с третьими телами. Характерно, что квазистационарность нашего мира основывается на приблизительной цикличности падений в двух взаимно перпендикулярных направлениях, т.е. падениях с непрерывным промахом относительно центра падения, например, движение по круговой или эллиптической орбите.

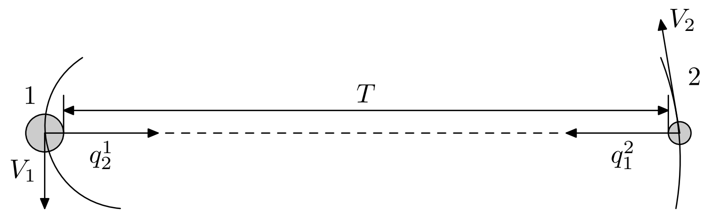

Рис.3

Теперь положим, что ускорением свободного падения на тело 2 нельзя пренебречь по сравнению с таковым для падения на тело 1. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\ddot{T} - T\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{T^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right). \tag{10}$$

Вид соотношений (8) и (9) сохранится. На рис. 4 приведены шесть уравнений, по два для каждой из сторон треугольника с вершинами в центрах взаимодействующих тел, пренебрежимых размеров.

Система $1-2$

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{T}_{12} - T_{12}\cdot\dot{\theta}_{12}^2 &= -\tfrac{1}{T_{12}^2}\cdot\left(q_2^0 + q_1^0\right); \\ T_{12}^2\cdot\dot{\theta}_{12} &= const. \end{aligned}\right.$$

Система $2-3$

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{T}_{23} - T_{23}\cdot\dot{\theta}_{23}^2 &= -\tfrac{1}{T_{23}^2}\cdot\left(q_3^0 + q_2^0\right); \\ T_{23}^2\cdot\dot{\theta}_{23} &= const. \end{aligned}\right.$$

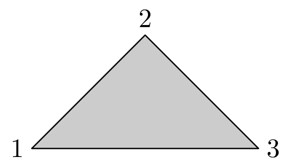

Рис. 4

Система $3-1$

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{T}_{31} - T_{31}\cdot\dot{\theta}_{31}^2 &= -\tfrac{1}{T_{31}^2}\cdot\left(q_1^0 + q_3^0\right); \\ T_{31}^2\cdot\dot{\theta}_{31} &= const. \end{aligned}\right.$$

Для «n» взаимодействующих тел, учитывая, что тела сами с собой не взаимодействуют и взаимодействие каждой пары тел симметрично, получим, обращаясь к рис. 4, как упрощающему рассуждения примеру, систему

$$\sum_{i=j+1}^{n}\ddot{T}_{ji}\frac{\vec{T}_{ji}}{T_{ji}} = \sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{C_{ji}}{T_{ji}^3} - \frac{q_i^0}{T_{ji}^2} - \frac{q_j^0}{T_{ji}^2}\right)\frac{\vec{T}_{ji}}{T_{ji}}; \tag{11}$$

где $j = [1\ldots(n-1)]$ и $i = j+1$ являются номерами взаимодействующих тел пронумированнных в любой выбранной последовательности; T_{ji} – для тел j и i то же, что и T на рис. 2 для тел 1 и 2;$\ddot{T}_{ji}$ – вторая производная величины расстояния T_{ji} между телами j и i; q_i^0 и q_j^0 – ускорения свободного падения на поверхности тел i и j; C_{ji} – константа, появляющаяся вследствие замены в первом члене правой части системы уравнений (11) выражения $T_{ji}\cdot\dot{\theta}_{ji}^2$ тождественным $\frac{\dot{\theta}_{ji}^2T_{ji}^4}{T_{ji}^3}$, в котором произведение $\dot{\theta}_{ji}^2T_{ji}^4$ равняется $(T_{ji}^2\cdot\dot{\theta}_{ji})^2$ то есть является $(const._{ji})^2$ [см. уравнение (9)] и может быть обозначена как C_{ji}. При суммировании в системе уравнений (11) каждое фиксированное j, означает номер тела, рассматриваемого как центр направлений падения остальных, указываемых по возрастанию, начиная с $j+1$, номеров i, взаимодействующих с телом j тел, так, что соответствующие им слагаемые, помечены индексами i меняющимися от величины $i = j+1$ до величины $i = n$, включительно. Такой порядок учитывает что $\ddot{T}_{ji} = \ddot{T}_{ij}$, и исключает двойное вхождение в систему величин $\ddot{T}_{ji}$.

Умножим проекцию на прямую взаимодействия каждого уравнения системы (11) на бесконечно малое смещение δr_{ji}:

$$\delta r_{ji}\ddot{T}_{ji} = \left(\delta r_{ji}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^3} - \delta r_{ji}\frac{q_i^0}{T_{ji}^2} - \delta r_{ji}\frac{q_j^0}{T_{ji}^2}\right).$$

Левые части полученных в результате умножения уравнений, используя, что $\delta r_{ji} = \delta T_{ji}$, преобразуем к виду

$$\sum_{i=j+1}^{n}\delta r_{ji}\ddot{T}_{ji} = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}(\dot{T}_{ji}\delta r_{ji}) - \dot{T}_{ji}\frac{d}{d\tau}\delta r_{ji}\right] = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \dot{T}_{ji}\frac{d}{d\tau}\delta T_{ji}\right] =$$
$$= \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \dot{T}_{ji}\delta\dot{T}_{ji}\right] = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\dot{T}_{ji}\right)^2\right].$$

Правые части полученных в результате умножения уравнений преобразуем как

$$\sum_{i=j+1}^{n}\left(\delta r_{ji}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^3} - \delta r_{ji}\frac{q_i^0}{T_{ji}^2} - \delta r_{ji}\frac{q_j^0}{T_{ji}^2}\right) = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta r_{ji}}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2}\delta r_{ji}\right) + \delta\left(\frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=j+1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\delta\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \delta\left(\frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right)\right] = \delta\sum_{i=j+1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right).$$

Теперь соединим преобразованные левую и правую части знаком равенства и проинтегрируем полученные уравнения на интервале времени от τ_1 до τ_2, принимая во внимание, что на концах интервала вариации, иначе бесконечно малые смещения δr_{ji}, равны нулю по определению. Соответственно получаем:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\dot{T}_{ji}\right)^2\right]d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\delta\sum_{i=j+1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right)d\tau;$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{d}{d\tau}\sum_{i=j+1}^{n}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right)d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\delta\sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{T}_{ji}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right]d\tau;$$

в последнем варианте записи уравнений:

$$\sum_{i=j+1}^{n}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right)\Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0,$$

так как $\delta T_{ji}\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0$ по указанной выше причине, имеем

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=j+1}^{n} \left[\frac{1}{2} \left(\dot{T}_{ji} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}} \right] d\tau = 0.$$

Введём обозначения

$$L_j = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{1}{2} \dot{T}_{ji}^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}} \right), \qquad L = \sum_{j=1}^{n-1} L_j$$

$$T_j = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2} \dot{T}_{ji}^2 \quad \text{и} \quad U_j = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{1}{2} \frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} - \frac{q_i^0}{T_{ji}} - \frac{q_j^0}{T_{ji}} \right), \qquad T = \sum_{j=1}^{n-1} T_j, \qquad U = \sum_{j=1}^{n-1} U_j.$$

Тогда в привычных обозначениях будем иметь $L = T - U$. При том, если за L, на наш взгляд, может быть сохранено прежнее название – функция Лагранжа или кинетический потенциал, то T и U в рамках данной модели должны получить новые наименования, например: – обобщённый потенциал скоростей, U – обобщённый потенциал положений. Далее отметим, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left(\dot{T}_{ji}, T_{ji} \right) d\tau = S \quad - \quad \text{действие механической системы}$$

в L входят скаляры $\dot{T}_{ji}^2$, T_{ji}, а так же $\frac{q_i^0}{T_{ji}}$ и $\frac{q_j^0}{T_{ji}}$. Следовательно, $L = L\left(\dot{T}_{ji}, T_{ji}\right)$ – скалярная функция скалярных аргументов. Варьирование действия механической системы будет выглядеть так

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left(\dot{T}_{ji}, T_{ji} \right) d\tau = 0 \qquad \text{или} \qquad \delta S = 0,$$

а соответствующие выкладки по выводу уравнений Лагранжа ничем не будут отличаться от таковых, которые приводятся в курсах теоретической и аналитической механики [2],[3]. По этой причине воспроизведём их ниже без каких-либо пояснений

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial L}{\partial T_{ji}} \delta T_{ji} + \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta \dot{T}_{ji} \right) d\tau = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta \dot{T}_{ji} = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta \frac{dT_{ji}}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \frac{d}{d\tau} \delta T_{ji} =$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta T_{ji} \right) - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \right) \delta T_{ji}, \qquad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta T_{ji} \right) d\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta T_{ji} \Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0,$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial L}{\partial T_{ji}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \right) \delta T_{ji} d\tau = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} - \frac{\partial L}{\partial T_{ji}} = 0. \tag{12}$$

Результат выкладок (12) имеет вид уравнений Лагранжа второго рода.

Обозначим как p_j величину $\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{T}_{ji}}$ поскольку U от $\dot{T}_{ji}$ не зависит, так что будем иметь выражение $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}}$. При этом p_j не может называться обобщённым импульсом, тем более, что производная по $\dot{T}_{ji}$ для фиксированного в выражении $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}}$ индекса j, определяется как

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{T}_{ji}} = \frac{\partial T_j}{\partial \dot{T}_{ji}} = \frac{\partial}{\partial \dot{T}_{ji}} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2} \dot{T}_{ji}^2 = \sum_{i=j+1}^{n} \dot{T}_{ji}.$$

Возможное новое наименование – обобщённая скорость изменения взаимодействия.

Известно, что (см., например, [4], последний снизу абзац на стр. 129) переход от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона есть процесс чисто математический, не имеющий никакого отношения к исходной динамической системе и, что для любой описываемой уравнениями Лагранжа системы будут иметь место уравнения Гамильтона. Поэтому, так же как и выше для уравнений Лагранжа, приведём относящиеся к этому процессу выкладки без пояснений. Введём функцию Гамильтона

$$H\left(T_{ji},p_j\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}p_j\dot{T}_{ji}-\sum_{j=1}^{n-1}L_j\left(\dot{T}_{ji},T_{ji}\right),$$

$$dH=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j+\frac{\partial H}{\partial T_{ji}}dT_{ji}\right)=\sum_{j=1}^{n-1}p_jd\dot{T}_{ji}+\sum_{j=1}^{n-1}\dot{T}_{ji}dp_j\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}}d\dot{T}_{ji}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}dT_{ji},$$

$$p_j=\frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}},\qquad dH=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}}d\dot{T}_{ji}+\sum_{j=1}^{n-1}\dot{T}_{ji}dp_j\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}}d\dot{T}_{ji}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}dT_{ji}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\dot{T}_{ji}dp_j-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}dT_{ji}=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j+\frac{\partial H}{\partial T_{ji}}dT_{ji}\right),$$

а это значит, что $\dot{T}_{ji}=\frac{\partial H}{\partial p_j}$ и $\frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}=-\frac{\partial H}{\partial T_{ji}}$, откуда, используя $p_j=\frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}}$ и уравнения Лагранжа $\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}}=\frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}$, $\frac{dp_j}{d\tau}=\frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}$, получаем уравнения движения в форме Гамильтона:

$$\dot{T}_{ji}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \dot{p}_j=\frac{\partial H}{\partial T_{ji}}\quad (j=1,\ldots n). \tag{13}$$

Особенные затруднени описание содержания взаимодействия тел, без включения в рассмотрение как не измеряемых непосредственно величин массы и силы, способно вызвать при изучении технических устройств. Причиной чему привычность и наглядность наработанных решений и моделей.

Показательным может служить пример с рычажными весами. Взвешивание фундаментальная процедура, лежащая в основе всех экспериментов и теорий, связанных с понятием силы.

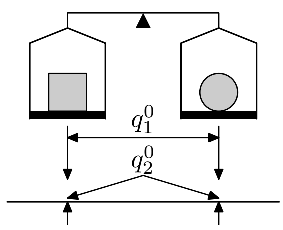

Рис. 5

На рис. 5 показано, что весы находятся в равновесии. Условию равновесия отвечает равенство ускорений свободного падения земли на тела, лежащие на левой и правой чашках весов. Для случая равновесия, эти ускорения и обозначены одинаково, как q_2^0 Верхний индекс 0, так как влияние расстояния между телами и земной поверхностью пренебрежимо. Ускорения свободного падения тел, лежащих на левой и правой чашках весов, как ускорения свободного падения на землю всегда одинаковы, независимо от положения рычага весов и параметров тел, лежащих на чашках. Примером способа приведения одного тела в состояние покоя относительно другого взаимодействующего с ним тела, является известный опыт А.Ф. Иоффе, усовершенствованный вариант опыта Р. Милликена. Ускорение свободного падения компенсировалось притяжением электрически заряженной частицы к пластине заряженного конденсатора.

Несмотря на то, что представляется очевидной возможность описания кулоновского взаимодействия в виде соответствующем выражению (10), нелишне, из-за наличия некоторых особенностей, проделать эту работу. Для краткости, не будем вдаваться в разбор опытов и их истолкований, которые способны привести нас к необходимым соотношениям. Будем исходить из слегка переиначенной формы закона Кулона.

$K\frac{q_1\cdot q_2}{R^2}=m_1\cdot a_1=m_2\cdot a_2$; иначе $K\frac{q_1\cdot q_2}{m_1\cdot R^2}=a_1$ и $K\frac{q_1\cdot q_2}{m_2\cdot R^2}=a_2$. Здесь K – константа имеющая знак «+» или «−» в зависимости от того падают друг на друга или разбегаются друг от друга заряженные тела:

R – расстояние между телами; q_1 и q_2 – заряды тел, m_1 и m_2 – массы заряженных тел, а ускорения, вызванные зарядами: a_1 и a_2. Теперь выпишем, преобразуя закон Ньютона, ускорения свободного падения для наших заряженных тел: $G\frac{m_2}{R^2} = g_1$ и $G\frac{m_1}{R^2} = g_2$, где G константа. Откуда $m_1 = \frac{g_2 \cdot R^2}{G}$ и $m_2 = \frac{g_1 \cdot R^2}{G}$, выражения, которые подставим в формулы для a_1 и a_2, в результате чего получим, что $a_1 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_2 \cdot R^4}$ и $a_2 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_1 \cdot R^4}$, а вспоминая, что $g_1 = \frac{g_1^0}{R^2}$ и $g_2 = \frac{g_2^0}{R^2}$, где g_1^0 и g_2^0 имеют тот же смысл модуля величины ускорения свободного падения на поверхность тела какой в уравнении (5) имеют $\left|q_1^0\right|$ и $\left|q_2^0\right|$, затем подставляя g_1 и g_2 в выражения для a_1 и a_2 будем иметь $a_1 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_2^0 \cdot R^2}$ и $a_2 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_1^0 \cdot R^2}$.

С учётом проделанных выкладок и изменений в обозначениях, уравнение (10) примет вид:

$$\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = -\frac{K \cdot G \cdot q_1 \cdot q_2}{R^2} \cdot \left(\frac{1}{g_2^0} + \frac{1}{g_1^0}\right). \tag{14}$$

Аналогично, (7) будет выглядеть как:

$$\sum_{i=j+1}^{n} \ddot{R}_{ji} \frac{\vec{R}_{ji}}{R_{ji}} = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{C_{ji}}{R_{ji}^3} - \frac{K \cdot G \cdot q_j \cdot q_i}{R_{ji}^2} \cdot \left(\frac{1}{g_i^0} + \frac{1}{g_j^0}\right)\right) \frac{\vec{R}_{ji}}{R_{ji}}. \tag{15}$$

Повторяя приведённый выше вывод уравнения Лагранжа и, вводя обозначения

$$L_j(\dot{R}_j, R_j) = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\dot{R}_{ji}^2 - \frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{R_{ji}^2} + \frac{K \cdot G \cdot q_j \cdot q_i}{R_{ji}} \cdot \left(\frac{1}{g_i^0} + \frac{1}{g_j^0}\right)\right), \qquad L = \sum_{j=1}^{n-1} L_j$$

$$T_j = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2}\dot{R}_{ji}^2 \quad \text{и} \quad U_j = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{R_{ji}^2} + \frac{K \cdot G \cdot q_j \cdot q_i}{R_{ji}} \cdot \left(\frac{1}{g_i^0} + \frac{1}{g_j^0}\right)\right), \qquad T = \sum_{j=1}^{n-1} T_j, \qquad U = \sum_{j=1}^{n-1} U_j,$$

будем иметь $L = T - U$, так, что, в конце концов, получим:

$$\frac{d}{d\tau} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_{ji}} - \frac{\partial L}{\partial R_{ji}} = 0. \tag{16}$$

Функция Гамильтона в том же виде, что и выше, но с изменёнными обозначениями, выглядит как

$$H(p_j, R_{ji}) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} p_j \dot{R}_{ji} - \sum_{j=1}^{n-1} L_j\left(\dot{R}_{ji}, R_{ji}\right)$$

Где, так же как и выше

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{R}_{ji}} = \frac{\partial T_j}{\partial \dot{R}_{ji}} = \frac{\partial}{\partial \dot{R}_{ji}} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2}\dot{R}_{ji}^2 = \sum_{i=j+1}^{n} \dot{R}_{ji}$$

а уравнения движения в форме Гамильтона:

$$\dot{R}_{ji} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial R_{ji}} \quad (j = 1, \ldots n). \tag{17}$$

Очевидна возможность обобщения применённого способа описания взаимодействия тел, на случай любого количества совместных радиальных взаимодействий. Общее уравнение такого взаимодействия получим на примере объединения двух рассмотренных выше взаимодействий интересном тем, что данному объединенному взаимодействию соответствует модель системы тел, обладающей способностью, как к сжатию, так и расширению, наличием столкновений длины свободного пробега тел, а так же способностью удержания в системе тел, оказавшихся на её границе.

Вначале, рассмотрим упомянутый пример, для чего представим правую часть уравнения (15) для $j = 1$ и $i = 2$, включив в неё выражение для ускорений свободного падения тел и опустив двойные индексы при величинах, не меняющихся от их перестановки.

$$\ddot{R} = \frac{C}{R^3} - \frac{1}{R^2} \cdot \left(g_2^0 + g_1^0\right) - \frac{K \cdot G \cdot q_1 \cdot q_2}{R^2} \cdot \left(\frac{1}{g_2^0} + \frac{1}{g_1^0}\right)$$

Для совокупности постоянных введём общее обозначение

$$D = -\left(g_2^0 + g_1^0\right) - K \cdot G \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \left(\frac{1}{g_2^0} + \frac{1}{g_1^0}\right)$$

Получим

$$R^3 \ddot{R} - DR = C. \tag{18}$$

Уравнение (18) может быть названо уравнением радиального взаимодействия двух тел. Из физического смысла, очевидно, что R не может принимать нулевого значения. Из $D = 0$ следует, что может существовать взаимное положение взаимодействующих тел, при наличии которого их взаимодействие либо не проявляется, либо проявляется как внутреннее или внешнее отражение, как преодоление некоего барьера, выражающегося в том, что ускорение меняет направление, в том числе при колебаниях около этого положения. Величина C является константой, в случае движения в отсутствие трансверсального ускорения, то есть в отсутствие соответствующего влияния на движение третьих тел. Возможность опустить двойные индексы проистекает из симметрии, смысл которой, образно говоря, в том, что всё равно «Земля вращается вокруг звёзд, или звёзды вокруг Земли», Коперник и Птолемей оба правы, дело лишь в удобстве описания, с той или иной позиции наблюдателя, которое исчезает при переходе к более глубокому рассмотрению вопросов взаимодействия тел.

Обратимся к некоторым элементарным, но полезным, соотношениям взаимодействия. Из рис. 2 ясно, что, если $g_1 = g_2^0 \cdot F(R)$ и $g_2 = g_1^0 \cdot F(R)$, где g_1 и g_2 противоположно направленные взаимные радиальные ускорения тел, а g_1^0 и g_2^0 константы, то к моменту времени T скорости тел образуют, если прямая соединяющая центры тел не вращается, отношение $V_{12}/V_{21} = \int_0^\tau g_2^0 \cdot F(R) d\tau \Big/ \int_0^\tau g_1^0 \cdot F(R) d\tau = g_2^0 \int_0^\tau F(R) d\tau / g_1^0 \int_0^\tau F(R) d\tau$ или $V_{12}/V_{21} = g_2^0/g_1^0$, что иначе запишется как

$$V_{12} \cdot g_1^0 = V_{21} \cdot g_2^0 \qquad \text{(Аналог закона сохранения количества движения).} \tag{19}$$

Для радиального сжатия или расширения системы тел, при соблюдении того же ограничения характера движения, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \left(V_{ji} \cdot g_j^0 - V_{ij} \cdot g_i^0\right) = 0.$$

Библиографический список

1. Герц, Г. Принципы механики, изложенные в новой связи [Текст] / Г. Герц. – М., 1959. – 386 с.
2. Ландау, Л. Б., Лифшиц, Е. М. Краткий курс теоретической физики. Книга 1 [Текст] / Л. Б. Ландау, Е. М. Лифшиц // Механика и электродинамика. – М. : «НАУКА», 1969. – 271 с.
3. Лойцянский, Л. Г., Лурье, А. И. Курс теоретической механики Т. 1–2 [Текст] / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : «ДРОФА», 2006.
4. Синг, Дж. Л. Классическая динамика [Текст] / Дж. Л. Синг. – М. : Физматгиз, 1963 г. – 448 с.
5. Voss A., Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Encyklopädie der matematischen Wissenschaften, т. ιv, стр. 3-121. Leipzig,1901-1908.