УДК 512.7

М. А. Заводчиков

Компоненты схемы модулей стабильных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве

В настоящей статье дается классификация неприводимых компонент схемы модулей Гизекера – Маруямы $M_{P^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве P^3. Доказано, что схема модулей $M_{P^3}(2;-1,2,0)$ есть объединение четырех неприводимых компонент, размерности которых равны 11, 15, 19 и 11.

Ключевые слова: компактификация, схема модулей, когерентный пучок ранга 2 без кручения, трехмерное проективное пространство.

M. A. Zavodchikov

Components of the Moduli Scheme of Stable Bunches of the Rank 2 Torsion Free Sheaves with Chern Classes $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ on Three-Dimensional Projective Space

In this paper we consider the Giseker – Maruyama moduli scheme $\mathbf{M} := M_{P^3}(2;-1,2,0)$ of stable coherent rank 2 torsion free sheaves with Chern classes $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ on 3-dimensional projective space P^3. We prove that a scheme $\mathbf{M} := M_{P^3}(2;-1,2,0)$ is a union of four irreducible components of dimentions 11, 15, 19 and 11 correspondingly.

Keywords: compactification, moduli scheme, coherent torsion free rank 2 sheave, 3-dimensional projective space.

§ 1. Введение

В статье рассматривается схема модулей Гизекера – Маруямы $M := M_{P^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве P^3. Геометрия пространств модулей $M_{P^3}(2;c_1,n,0)$ стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1 = 0$ или -1, $c_2 = n$, $c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве P^3 к настоящему моменту изучена только для малых n. А именно при $c_1 = 0$ полная классификация всех компонент пространства $M_{P^3}(2;0,n,0)$ получена лишь для $n = 1$ (см. [17]) и $n = 2$ (см. [16]). При $c_1 = -1$ число n принимает только четные значения, и известно, что для любого четного n пространство модулей $M_{P^3}(2;-1,n,0)$ непусто и содержит компоненту $\overline{M_{P^3}(-1,n)}$, которая является замыканием открытого множества $M_{P^3}(-1,n)$ локально свободных пучков. В работе [10] Р. Хартсхорн и И. Сольс показали, что пространство модулей $M_{P^3}(-1,2)$ стабильных локально свободных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ на P^3 является неприводимым неособым рациональным многообразием размерности 11. В статье Х. Мезегера, И. Сольса и С. А. Стремме [15] описано замыкание $\overline{M_{P^3}(-1,2)}$ многообразия $M_{P^3}(-1,2)$ в схеме M. В работе автора [1] рассмотрены два подмножества пучков

$$\mathrm{M}_1 := \{[\mathrm{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} \approx \mathbf{k}_x, \text{ где x – некоторая точка в } P^3\}, \quad (1)$$

$$\mathrm{M}_2 := \{[\mathrm{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} \approx \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y, \text{ где x и y – различные точки в } P^3\} \quad (2)$$

в M, имеющие размерности 15 и 19 соответственно, и доказано, что их замыкания $\overline{\mathrm{M}}_1$ и $\overline{\mathrm{M}}_2$ – неприводимые компоненты в M, отличные от $\overline{\mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(-1,2)}$. В настоящей статье рассматриваются три новых неприводимых подмножества пучков в M:

$$\mathrm{M}_3 := \{[\mathrm{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} \approx \mathrm{O}_m(1), \text{ где m – некоторая прямая в } P^3\}; \quad (3)$$

$$\mathrm{M}_4 := \{[\mathrm{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} \approx \mathrm{Q}, \text{ где Q включается в тройку вида (5)}\}; \quad (4)$$

$$0 \to \mathbf{k}_x \to \mathrm{Q} \to \mathrm{O}_m \to 0, \quad (5)$$

где x – некоторая точка в P^3, а m – некоторая прямая в P^3;

$$\mathrm{M}_5 := \{[\mathrm{E}] \in \mathrm{M} \mid \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E} \approx \mathrm{Q}, \text{ где Q – пучок из точной тройки вида (7)}\}; \quad (6)$$

$$0 \to \mathrm{Q}_0 \to \mathrm{Q} \to \mathrm{O}_m(-1) \to 0, \quad (7)$$

где Q_0 – артинов пучок длины 2, а m – некоторая прямая в P^3. Показывается, что M есть объединение неприводимых множеств $\overline{\mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(-1,2)}$, $\overline{\mathrm{M}}_1$, $\overline{\mathrm{M}}_2$, M_3, M_4, M_5. Основной результат настоящей статьи состоит в том, что многообразиями $\overline{\mathrm{M}}_1$, $\overline{\mathrm{M}}_2$, $\overline{\mathrm{M}}_3$ и $\overline{\mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(-1,2)}$, где $\dim \overline{\mathrm{M}}_3 = 11$, исчерпываются все неприводимые компоненты схемы M, то есть имеет место следующая теорема.

Теорема 1. M *является объединением четырех неприводимых компонент, одна из которых есть* $\overline{\mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(-1,2)}$, *две другие компоненты* $\overline{\mathrm{M}}_1$ *и* $\overline{\mathrm{M}}_2$ *размерностей 15 и 19 суть замыкания в* M *множеств* M_1 *и* M_2, *определенных в (1) и (2) соответственно, а компонента* $\overline{\mathrm{M}}_3$ *имеет размерность 11.*

Дадим краткое содержание статьи по параграфам. В §2 доказывается, что все пучки из M с нульмерными особенностями лежат в $\overline{\mathrm{M}}_1 \cup \overline{\mathrm{M}}_2$. В §3 определены множества пучков M_3, M_4, M_5 из M с особенностями размерности 1, и доказано, что $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(-1,2) \cup \overline{\mathrm{M}}_1 \cup \overline{\mathrm{M}}_2 \cup \mathrm{M}_3 \cup \mathrm{M}_4 \cup \mathrm{M}_5$. В §4 мы доказываем, что $\overline{\mathrm{M}}_3$ есть неприводимая компонента размерности 11 в M. §5 посвящен доказательству того, что M_4 неприводимо. В §6 доказывается, что $\mathrm{M}_4 \subset \overline{\mathrm{M}}_1$. В статье основным полем $\mathbf{k}$ является поле комплексных чисел C. Через $[\mathrm{E}]$ будем обозначать класс изоморфизма произвольного когерентного пучка E, а через $\mathrm{O} := \mathrm{O}_{\mathrm{P}^3}$ – структурный пучок трехмерного проективного пространства.

§ 2. Пучки из M с нульмерными особенностями

В настоящем параграфе мы опишем пучки $[\mathrm{E}] \in \mathrm{M}$, которые имеют нульмерные особенности. Рассмотрим произвольный пучок $[\mathrm{E}] \in \mathrm{M} \setminus M_{\mathrm{P}^3}(-1,2)$. Ввиду локальной несвободы пучка E и условия $c_3(\mathrm{E}) = 0$ рефлексивный пучок $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ не изоморфен пучку E (см. [9, 17]), и точна последовательность:

$$0 \to \mathrm{E} \xrightarrow{can} \mathrm{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Q} \to 0, \quad (8)$$

где $\mathrm{Q} = \mathrm{E}^{\vee\vee}/\mathrm{E}$, а $can : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^{\vee\vee}$ – канонический морфизм, инъективный в силу того, что E – пучок без кручения. Поскольку $\mathrm{S}upp\mathrm{Q} \subset \mathrm{S}ing\mathrm{E}$ и $\dim \mathrm{S}ing\mathrm{E} \le 1$ для пучка E без кручения (см. [4, Следствие на стр. 109]), то $\dim \mathcal{Q} \le 1$. В работе автора [1] было показано, что при условии $\dim \mathcal{Q} = 0$ возможны два случая: $a)$ $l(\mathcal{Q}) = 1$ и $b)$ $l(\mathcal{Q}) = 2$, где $l(\mathcal{Q})$ – длина артинова пучка $\mathcal{Q}$. Случай $a)$ описывается множеством $\mathcal{M}_1$, определенным в (1). Пучки $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_1$ включаются в точную тройку:

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathbf{k}_x \to 0. \tag{9}$$

Пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ – стабильный рефлексивный пучок с классами Черна $c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1$, $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2$, $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2$. Пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ входит в точную тройку

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2} \to 0, \tag{10}$$

где l_1 и l_2 – скрещивающиеся прямые в $\mathbf{P}^3$. Пучки $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ описаны в [14]. В работе [1] было доказано, что $\overline{\mathcal{M}}_1$ есть компонента в $\mathcal{M}$ размерности 15.

В настоящем параграфе рассматривается множество всех пучков, удовлетворяющих условию $b)$, то есть множество

$$\mathcal{M}_b := \{[\mathcal{E}] \in \mathcal{M} \mid \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E} \text{ – артинов пучок длины } 2\}. \tag{11}$$

По определению множество $\mathcal{M}_2$ (см. (2)) лежит в $\mathcal{M}_b$. В работе [1] было доказано, что $\overline{\mathcal{M}}_2$ есть компонента в $\mathcal{M}$ размерности 19. Основным результатом настоящего параграфа является следующее предложение.

Предложение 1. $\mathcal{M}_b \subset \overline{\mathcal{M}}_2$ *; тем самым, все пучки с нульмерными особенностями лежат в* $\overline{\mathcal{M}}_1 \cup \overline{\mathcal{M}}_2$.

Рассмотрим $\mathrm{Q}uot$-схему $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_b} := \mathrm{Q}uot(2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), 2)$ классов эквивалентности фактор-пучков пучка $2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$, имеющих многочлен Гильберта равный 2.

Лемма 1. *Схема* $\mathrm{Q}uot_{\mathcal{M}_b}$ *неприводима.*

Доказательство. Рассмотрим пучок $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_b$. В статье [1] показано, что $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ – стабильный рефлексивный пучок ранга 2 с классами Черна $c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = -1$, $c_2(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 2$, $c_3(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = 4$. Согласно [9, Example 4.2.3], пучок $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ включается в точную тройку $0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathcal{I}_C \to 0,$ где C – некоторая коника в $\mathbf{P}^3$. Используя эту тройку и $0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \to \mathcal{I}_C \to 0$, получаем локально свободную резольвенту пучка $\mathcal{E}^{\vee\vee}$: $0 \to \mathcal{O}(-3) \to 2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{e_1} \mathcal{E}^{\vee\vee} \to 0.$ С помощью точной тройки (8) и сюръекции $2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{e_1} \mathcal{E}^{\vee\vee}$ строим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & \mathcal{E} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-3) \arrow[r] \arrow[d, "s"] & 2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & 2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & \mathcal{E} \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd} \tag{12}$$

где $\mathcal{K}$ – ядро отображения $\theta = \varepsilon \circ e_1$. Так как многочлен Гильберта $P_{\mathcal{Q}}(n) := \chi(\mathcal{Q}(n))$ пучка $\mathcal{Q}$ равен 2, то по определению класс $[2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} \mathcal{Q}]$ эпиморфизма θ по модулю автоморфизмов пучка $\mathcal{Q}$ есть точка схемы $Quot_{\mathcal{M}_b}$. Пусть $(2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)))\mathcal{O}_{Quot_{\mathcal{M}_b}} \to \mathcal{Q}_{Quot_{\mathcal{M}_b}}$ – универсальный эпиморфизм на $\mathbb{P}^3 \times Quot_{\mathcal{M}_b}$, и пусть $\mathbf{K}$ – ядро этого эпиморфизма. На $\mathbb{P}^3 \times Quot_{\mathcal{M}_b}$ рассмотрим пучок $\mathbf{K}(3) := \mathbf{K} \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))\mathcal{O}_{Quot_{\mathcal{M}_b}})$. По построению для любой точки $q \in Quot_{\mathcal{M}_b}$ имеем $\mathbf{K}(3) \otimes \mathbf{k}_q = \mathcal{K}(3)$, где $\mathcal{K}(3) := \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(3)$.

Пусть $p_2 : \mathbb{P}^3 \times Quot_{\mathcal{M}_b} \to Quot_{\mathcal{M}_b}$ – проекция. Над схемой $Quot_{\mathcal{M}_b}$ рассмотрим проективный спектр $\mathbb{T} := \mathbf{P}roj((p_{2*}\mathbf{K}(3))^\vee) \xrightarrow{\rho} Quot_{\mathcal{M}_b}$ симметрической алгебры пучка $(p_{2*}\mathbf{K}(3))^\vee$, и пусть $\mathcal{O}_{\mathbb{T}}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{T}/Quot_{\mathcal{M}_b}}(1)$ – пучок Гротендика на $\mathbb{T}$ относительно проекции ρ. В силу замены базы [5, Следствие 12.9] следует, что пучок $p_{2*}\mathbf{K}(3)$ локально свободен. Отсюда в силу неприводимости схемы $Quot_{\mathcal{M}_b}$ получаем следующее предложение.

Предложение 2. *Схема* $\mathbb{T}$ *неприводима.*

Далее докажем, что множество $\mathcal{M}_b$, определенное в (11), неприводимо. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^3 \times \mathbb{T} \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d, "\widetilde{p}_2"] & \mathbb{P}^3 \times \mathrm{Quot}_{\mathbb{M}_b} \arrow[d, "p_2"] \\ \mathbb{T} \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Quot}_{\mathbb{M}_b}. \end{tikzcd} \tag{13}$$

Существует естественный эпиморфизм $\varepsilon : \rho^*(p_{2*}\mathbf{K}(3))^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{T}}(1)$ и двойственный ему морфизм $\varepsilon^\vee : \mathcal{O}_{\mathbb{T}}(-1) \to \rho^*((p_{2*}\mathbf{K}(3))^\vee)^\vee$. Так как пучок $p_{2*}\mathbf{K}(3)$ локально свободен, то имеем изоморфизм пучков $((p_{2*}\mathbf{K}(3))^\vee)^\vee \approx p_{2*}\mathbf{K}(3)$. Тем самым, существует изоморфизм $\rho^*((p_{2*}\mathbf{K}(3))^\vee)^\vee \approx \widetilde{p}_{2*}\,\widetilde{\rho}^*\ \mathbf{K}(3)$. Поэтому, поднимая морфизм $\varepsilon^\vee$ на $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{T}$, получаем морфизм пучков $\phi := \widetilde{p}^*{}_2\,\varepsilon^\vee : \widetilde{p}^*{}_2\,\mathcal{O}_{\mathbb{T}}(-1) \to \widetilde{p}^*{}_2\,\widetilde{p}_{2*}\,\widetilde{\rho}^*\ \mathbf{K}(3)$. Пучок $\mathcal{K}(3)$ порождается своими сечениями и $\mathrm{H}^0(\mathcal{K}(3)) = \mathbf{k}^{22}$. Отсюда и в силу замены базы отображение вычисления $ev' : \widetilde{p}^*{}_2\,\widetilde{p}_{2*}\,\mathbf{K}(3) \to \mathbf{K}(3)$ – сюръекция. Тем самым, морфизм $ev : \widetilde{p}^*{}_2\,\widetilde{p}_{2*}\,\widetilde{\rho}^*\ \mathbf{K}(3) \to \widetilde{\rho}^*\ \mathbf{K}(3)$ – также сюръекция. Определим пучки $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ на $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{T}$ как коядра композиций $\lambda := ev \circ \phi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{T}}(-1) \xrightarrow{\lambda} \widetilde{\rho}^*\mathbf{K}$ и $\xi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{T}}(-1) \xrightarrow{\lambda} \widetilde{\rho}^*\mathbf{K} \circ (2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{T}}$ соответственно. Теперь мы можем построить следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[d] & & \mathbf{E} \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{T}}(-1) \arrow[r, tail, "\xi"] \arrow[d, "\lambda"] & (2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{T}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \mathbf{F} \arrow[d] \\
\widetilde{\rho}^{*}\mathbf{K} \arrow[r, tail] \arrow[d] & (2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{T}} \arrow[r, two heads] & \widetilde{\rho}^{*}\mathfrak{Q}_{\mathrm{Quot}_{\mathcal{M}_b}} \arrow[d] \\
\mathbf{E} \arrow[d] & & 0, \\
0 & &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

Рассмотрим в T открытое подмножество $T := \{t \in \mathsf{T} \mid ((2\mathsf{O}(-1) \oplus \mathsf{O}(-2)) \boxtimes \mathsf{O}_{\mathsf{T}}(-1))/\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3\times\mathsf{T}}(-3))_{|\mathsf{P}^3\times\{t\}}$ – рефлексивный пучок на $\mathsf{P}^3\}$. По построению ограничение диаграммы (14) на $\mathsf{P}^3 \times t$, где t – точка в T, есть диаграмма (12). Выберем произвольный пучок $[\mathsf{E}]$ из множества M_b. Используя точные тройки (8) и $0 \to \mathsf{O}(-1) \to \mathsf{E}^{\vee\vee} \to \mathsf{I}_C \to 0$, мы можем построить коммутативную диаграмму (12). Тем самым, определена точка $t = ([\theta], \mathbf{k}_s) \in T$, где $[\theta] \in \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_b}$, а $\mathbf{k}_s$ – класс пропорциональности сечения s пучка $\mathsf{K}(3)$. Поэтому всякий пучок $[\mathsf{E}]$ из множества M_b представлен точкой $t \in T$ такой, что $[\mathsf{E}] = [\mathbf{E}_{|\mathsf{P}^3\times t}]$. Следовательно, M_b совпадает с образом модулярного морфизма $f : T \to \mathrm{M} : t \mapsto [\mathbf{E}_{|\mathsf{P}^3\times t}]$. В связи с этим, в силу неприводимости T верно следующее предложение.

Предложение 3. *Множество* M_b *неприводимо.*

Рассмотрим открытое в T плотное подмножество $T_0 := \{t \in T \mid (\mathbf{F}/\mathbf{E})_{|\mathsf{P}^3\times t} ; \mathbf{k}_x \oplus \mathbf{k}_y$, где x и y – различные точки в $\mathsf{P}^3\}$. По определению $f(T_0) = \mathsf{M}_2$ (см. 2). Отсюда M_2 есть плотное подмножество в M_b в силу предложения 3. С другой стороны, в работе [1] было доказано, что замыкание $\overline{\mathsf{M}}_2$ множества M_2 в схеме модулей M является неприводимой компонентой в M размерности 19. Отсюда получаем, что $\mathsf{M}_2 \subset \mathsf{M}_b \subset \overline{\mathsf{M}}_2$. Предложение 1 доказано.

§ 3. Предварительные вычисления для пучков с одномерными особенностями

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема.

Теорема 2. *Схема модулей* M *есть объединение множеств* $\mathrm{M}_{\mathsf{P}^3}(-1,2) \cup \overline{\mathsf{M}}_1 \cup \overline{\mathsf{M}}_2 \cup \mathsf{M}_3 \cup \mathsf{M}_4 \cup \mathsf{M}_5$.

Рассмотрим пучки $[\mathrm{E}] \in \mathrm{M}$, включающиеся в точную тройку (8), для которых $\dim \mathrm{Q} = 1$. Тогда $c_1(\mathrm{Q}) = 0$, и, тем самым, многочлен Черна пучка Q имеет вид $c_t(\mathrm{Q}) = 1 - lt^2 + c_3(\mathrm{Q})t^3$, где $l := \chi(\mathrm{Q} \otimes \mathrm{O}_{\mathrm{P}^2})$ для общей плоскости $\mathrm{P}^2 \subset \mathrm{P}^3$. Отсюда и из (8) получаем равенство: $c_t(\mathrm{E}) = (1 - t + c_2(\mathrm{E}^{\vee\vee})t^2 + c_3(\mathrm{E}^{\vee\vee})t^3)/(1 - lt^2 + c_3(\mathrm{Q})t^3) =$ $(1 - t + c_2(\mathrm{E}^{\vee\vee})t^2 + c_3(\mathrm{E}^{\vee\vee})t^3)(1 + lt^2 - c_3(\mathrm{Q})t^3) = 1 - t + (c_2(\mathrm{E}^{\vee\vee}) + l)t^2 + (c_3(\mathrm{E}^{\vee\vee}) - l - c_3(\mathrm{Q}))t^3.$ По определению $c_1(\mathrm{E}) = -1$, $c_2(\mathrm{E}) = 2$, $c_3(\mathrm{E}) = 0$, поэтому из предыдущего равенства получаем, что

$$c_2(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = 2 - l = 2 + c_2(\mathrm{Q}), \tag{15}$$

$$c_3(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = l + c_3(\mathrm{Q}). \tag{16}$$

Замечание 1. *Пусть E – стабильный когерентный пучок ранга 2 без кручения с классами Черна $c_1(\mathrm{E}) = -1$, $c_2(\mathrm{E}) = 2$, $c_3(\mathrm{E}) = 0$ на P^3. Тогда $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ μ-стабилен [см. 4, Глава II, Лемма 1.2.4(iii)].*

Замечание 2 *Если чистый пучок F на P^3 μ-стабилен, то он является стабильным [см. 11, Lemma 1.2.13]* .

Из замечания 1 следует, что пучок $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ μ-стабилен, а из замечания 2 получаем, что $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ стабилен. Так как $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ – стабильный рефлексивный пучок и $c_1(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = -1$, то $c_2(\mathrm{E}^{\vee\vee}) \geq 1$ [9, Corollary 3.3]. Из условия $\dim \mathrm{Q} = 1$ следует, что $l > 0$, поэтому из равенства (15) получаем, что $l = 1 = -c_2(\mathrm{Q})$, тем самым, $c_2(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = 1$. Согласно [9, Example 4.2.3], пучок $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ входит в точную тройку:

$$0 \to \mathrm{O}(-1) \to \mathrm{E}^{\vee\vee} \to \mathrm{I}_l \to 0, \tag{17}$$

где l – некоторая прямая в P^3 и $c_3(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = 1$. Итак, имеем равенства

$$c_1(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = -1, c_2(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = 1, c_3(\mathrm{E}^{\vee\vee}) = 1. \tag{18}$$

Нетрудно увидеть, что пучок $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ имеет локально свободную резольвенту вида

$$0 \to \mathrm{O}(-2) \to 3\mathrm{O}(-1) \xrightarrow{e} \mathrm{E}^{\vee\vee} \to 0. \tag{19}$$

Также включается в каноническую последовательность

$$0 \to \mathrm{E}^{\vee\vee} \to 3\mathrm{O} \to \mathrm{O}(1) \to \mathrm{O}_P \to 0, \tag{20}$$

где P – точка в P^3. Точка P является особенностью пучка $\mathrm{E}^{\vee\vee}$.

Отсюда и из (16) находим, что $c_3(\mathrm{Q}) = 0$. Из полученных выше равенств следует, что многочлен Черна $c_t(\mathrm{Q})$ пучка Q равен $1 - t^2$, поэтому $\mathrm{S}upp\mathrm{Q}$ есть некоторая прямая m в объединении с не более чем конечным числом точек, и Q включается в точную тройку:

$$0 \to \mathrm{Q}_0 \to \mathrm{Q} \to \mathrm{O}_m(n) \to 0, \tag{21}$$

где $\dim \mathrm{Q}_0 = 0.$ Определим возможные значения n. Пучок $\mathrm{E}^{\vee\vee}$ порождается глобальными сечениями, значит то же верно и для любого его факторпучка. А пучок $\mathrm{O}_m(n+1)$ порождается глобальными сечениями, когда $n + 1 \geq 0$, следовательно, $n \geq 1$.

Так как $l(\mathrm{Q}_0) \geq 0$, $n \geq -1$ и $l(\mathrm{Q}_0) + n = 1$, то для пары ($l(\mathrm{Q}_0)$, n) возможны три случая: 1) $l(\mathrm{Q}_0) = 0$, $n = 1$; 2) $l(\mathrm{Q}_0) = 1$, $n = 0$; 3) $l(\mathrm{Q}_0) = 2$, $n = -1$.

В случае 1) из () следует, что $\mathrm{Q} = \mathrm{O}_m(1)$ и точная тройка (8) имеет вид:

$$0 \to \mathsf{E} \to \mathsf{E}^{\vee\vee} \to \mathsf{O}_m(1) \to 0. \qquad (22)$$

Случаю 1) соответствует множество пучков M_3, определенное в (3), которое будет рассмотрено в § 4 настоящей статьи. В случае 2) пучок Q включается в точную тройку (5). Этому случаю соответствует множество пучков M_4 (см. 4), которое будет рассмотрено в § 5 и § 6 настоящей статьи. В случае 3) пучок Q включается в точную тройку (7). Множество M_5, соответствующее случаю 3), было рассмотрено в статье автора [12].

Таким образом, множества M_3, M_4, M_5 в M соответствуют случаю $\dim\mathsf{Q}=1$. Согласно предложению 1, пучки E из M, соответствующие случаю $\dim\mathsf{Q}=0$, лежат в объединении $\overline{\mathsf{M}}_1$ и $\overline{\mathsf{M}}_2$. Случаю $\mathsf{Q}=0$ соответствует подмножество $\mathrm{M}_{\mathsf{P}^3}(-1,2)$ в M. Отсюда, так как $\dim\mathsf{Q}\le 1$, получаем теорему 2 – основной результат настоящего параграфа.

§ 4. Множество M_3

В настоящем параграфе мы докажем, что замыкание $\overline{\mathsf{M}}_3$ множества M_3, определенного в (3), является 11-мерной неприводимой компонентой в M. Другими словами, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *1) Множество* M_3 *является 11-мерным неприводимым подмножеством в* M. *2)* $\overline{\mathsf{M}}_3$ *есть неприводимая приведенная компонента размерности 11 в схеме модулей* M.

Для доказательства теоремы 3 мы построим семейство пучков E с базой, биективно отображающейся на M_3 посредством модулярного морфизма (см. предложение 4 ниже). Для этого нам потребуется описание рефлексивных пучков на P^3 с классами Черна $c_1=-1, c_2=c_3=1$, данного в [9, Lemma 9.3]. Из этого описания непосредственно следует, что пространство модулей таких пучков канонически изоморфно P^3 и универсальный пучок F на $\mathsf{P}^3\times\mathsf{P}^3$ существует и включается в точную тройку

$$0 \to \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-2)\boxtimes\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3} \to \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1)\boxtimes\mathrm{T}_{\mathsf{P}^3}(-1) \to \mathsf{F} \to 0. \qquad (23)$$

Положим $Y:=\mathsf{P}^3\times G$, где $G:=G(1,3)$ – грассманиан прямых в P^3. Пусть $pr_{12}:\mathsf{P}^3\times Y\to\mathsf{P}^3\times\mathsf{P}^3$, $pr_{13}:\mathsf{P}^3\times Y\to\mathsf{P}^3\times G$ и $p:\mathsf{P}^3\times Y\to Y$ – проекции, $\Gamma:=\{(x,m)\in\mathsf{P}^3\times G \mid x\in m\}$ – график инциденции в $\mathsf{P}^3\times G$. Рассмотрим пучок $\mathsf{A}:=p_*\mathsf{H}om(pr_{12}^*\mathsf{F},\mathsf{O}_{\tilde\Gamma}(1))$ на Y, где $\tilde\Gamma:=pr_{13}^{-1}(\Gamma);\Gamma\times\mathsf{P}^3$ и $\mathsf{O}_{\tilde\Gamma}(1)=\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(1))\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3\times G}|_{\tilde\Gamma}$.

Лемма 3. *Пучок* A *локально свободен.*

Доказательство. Применяя к точной тройке (23) функтор pr_{12}^*, получаем

$$0 \to \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-2)\boxtimes\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}\boxtimes\mathsf{O}_G \to \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1)\boxtimes\mathrm{T}_{\mathsf{P}^3}(-1)\ \mathsf{O}_G \to \mathsf{F}_\Sigma \to 0, \qquad (24)$$

где $\Sigma:=\mathsf{P}^3\times Y$ и $\mathsf{F}_\Sigma:=p^*\mathsf{F}$. Имеем изоморфизм пучков $\mathsf{H}om(\mathsf{F}_\Sigma,\mathsf{O}_{\tilde\Gamma}(1))\approx\mathsf{F}_\Sigma^\vee\otimes\mathsf{O}_{\tilde\Gamma}(1)$. Так как F – рефлексивный пучок, то используя [9, Proposition 1.10], получаем изоморфизм $\mathsf{F}_\Sigma^\vee\approx\mathsf{F}_\Sigma\otimes\det\mathsf{F}_\Sigma^\vee$. Легко видеть, что $\det\mathsf{F}_\Sigma^\vee\approx\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(1)\boxtimes\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1)\boxtimes\mathsf{O}_G$. Тогда пучок $\mathsf{H}om(\mathsf{F}_\Sigma,\mathsf{O}_{\tilde\Gamma}(1))$ изоморфен пучку $\mathsf{F}_\Sigma\otimes(\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(2)\boxtimes\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(-1)\boxtimes\mathsf{O}_G|_{\tilde\Gamma})$. Пусть $y=(z,m_y)$ – произвольная точка в Y. Очевидно, что

$\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1))|_{\{\mathbb{P}^3\times y\}}\approx\mathcal{O}_{m_y}(1)\oplus\mathcal{O}_{m_y}(2)$, если $z\notin m_y$, и $\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1))|_{\{\mathbb{P}^3\times y\}}\approx 2\mathcal{O}_{m_y}(1)\oplus\mathbf{k}_z$, если $z\in m_y$. Из равенства многочленов Гильберта пучков $\mathcal{O}_{m_y}(1)\oplus\mathcal{O}_{m_y}(2)$ и $2\mathcal{O}_{m_y}(1)\oplus\mathbf{k}_z$ и из [11, Proposition 2.1.2] получаем, что пучок $\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1))$ – плоский над Y. Отсюда так как $\mathrm{h}^0(y,\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1)))=5$ для любого $y\in Y$, то, применяя замену базы [5, III, Следствие 12.9], получаем, что $\mathcal{A}$ – локально свободный пучок.

Пусть $\mathbf{P}:=\mathbf{Proj}(\mathcal{A}^\vee)$ – проективный спектр симметрической алгебры пучка $\mathcal{A}^\vee$ и $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ – пучок Гротендика на нем. Имеем декартов квадрат:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^3\times\mathrm{P} \arrow[r, "\bar\pi"] \arrow[d, "\bar p"] & \mathbb{P}^3\times Y \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{P} \arrow[r, "\pi"] & Y,
\end{tikzcd}$$

где $\pi:\mathbf{P}\to Y$ – структурный морфизм. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\varepsilon:\pi^*\mathcal{A}^\vee\to\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ и ему двойственное отображение $\varepsilon^\vee:\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)\to(\pi^*\mathcal{A}^\vee)^\vee$. В силу локальной свободы $\mathcal{A}$ имеем $(\pi^*\mathcal{A}^\vee)^\vee\approx\pi^*(\mathcal{A}^{\vee\vee})\approx\pi^*\mathcal{A}$. Рассмотрим композицию $\psi:\mathcal{F}_\Sigma\otimes p^*p_*\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1))\xrightarrow{id\otimes can}\mathcal{F}_\Sigma\otimes\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1))\xrightarrow{mult}\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1)$ и отображение $\bar\pi^*\psi:\bar\pi^*(\mathcal{F}_\Sigma\otimes p^*p_*\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1)))\to\bar\pi^*\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1)$.

Изоморфизмы $\bar\pi^*(\mathcal{F}_\Sigma\otimes p^*p_*\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1)))\approx\bar\pi^*\mathcal{F}_\Sigma\otimes\bar\pi^*p^*p_*\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1))\approx\bar\pi^*\mathcal{F}_\Sigma\otimes\bar p^*\pi^*p_*\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\Sigma,\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1))$ определяют композицию $\chi=\bar\pi^*\psi\circ\bar p^*(id\otimes\varepsilon^\vee):\bar\pi^*\mathcal{F}_\Sigma\otimes\bar p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)\to\bar\pi^*\mathcal{O}_{\tilde\Gamma}(1)$. Рассмотрим в $\mathbf{P}$ открытое подмножество $\mathbf{P}^*$ такое, что $\chi_{|\mathbf{P}^*}$ – сюръекция.

Определим семейство пучков $\mathcal{E}$ как $\ker(\chi_{|\mathbf{P}^*})$. По построению ограничение $\mathcal{E}_y=\mathcal{E}_{|\mathbb{P}^3\times y}$ пучка $\mathcal{E}$ для произвольной точки $y=([\mathcal{F}_y],m_y,<\varepsilon:\mathcal{F}_y\twoheadrightarrow\mathcal{O}_{m_y}(1)>)\in\mathbf{P}^*$, где $[\mathcal{F}_y]$ – класс изоморфизма пучка $\mathcal{F}_y=(\bar\pi^*p^*\mathcal{F})_{|\mathbb{P}^3\times y}$, m_y – прямая в $\mathbb{P}^3$, а $<\varepsilon>$ – класс пропорциональности эпиморфизма ε, принадлежит множеству $\mathcal{M}_3$. Тем самым, определен морфизм $f:\mathbf{P}^*\to\mathcal{M}_3$: $y\mapsto\mathcal{E}_y$. Очевидно следующее предложение.

Предложение 4. *Отображение f является биекцией.*

Схема $\mathbf{P}$ есть проективная неприводимая схема, так как пучок $\mathcal{A}$ локально свободен. По построению размерность $\mathbf{P}$ равна 11, и в силу предложения 4 имеем $11=\dim f(\mathbf{P}^*)=\dim\mathcal{M}_3$. Отсюда получаем утверждение 1 из теоремы 3. Следовательно, размерность любой неприводимой компоненты схемы $\mathcal{M}$, содержащей $\mathcal{M}_3$, не меньше, чем 11, то есть

$\dim T_{[E]}M \geq \dim T_{[E]}M_3 \geq \dim M_3 = 11$, где $E \in M_3$. Так как E – стабильный пучок, то, как известно из [13], $\dim T_{[E]}M = \dim Ext^1(E,E)$. Далее, согласно [2, §2], $\dim Ext^1(E,E) = 11$, откуда следует, что $\dim T_{[E]}M = 11$. Отсюда получаем, что $\dim T_{[E]}M_3 = 11$, поэтому $\overline{M}_3$ есть неприводимая приведенная компонента размерности 11 в M. Тем самым, получаем утверждение 2 теоремы 3, чем завершается ее доказательство.

§ 5. Множество M_4

В настоящем параграфе рассматривается множество M_4 пучков E, определенное в (4). Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 4. *Множество* M_4 *неприводимо.*

Мы построим плоское семейство $\mathbf{E}_4$ пучков E с неприводимой базой, обозначаемой ниже через W такое, что образ схемы W при модулярном морфизме $g : W \to M : w \mapsto [\mathbf{E}_{4|P^3 \times \{w\}}]$ есть M_4.

Предложение 5. *Схема* W *неприводима.*

Для доказательства предложения 4 сделаем несколько предварительных построений. Многочлен Гильберта $P_Q(n) := \chi(Q(n))$ пучка Q из (5) равен $n+2$, поэтому класс $[3O(-1) \to Q \to 0]$ эпиморфизма α по модулю автоморфизмов пучка Q есть точка $Quot$-схемы $Quot := Quot(3O(-1), n+2)$ фактор-пучков пучка $3O(-1)$ с многочленом Гильберта $n+2$. Обозначим через X прямое произведение схем $P^3 \times P^3 \times Quot$. Рассмотрим проекции $p_{12} : X \to P^3 \times P^3$, $p_{13} : X \to P^3 \times Quot$, $\pi : X \to Y := P^3 \times Quot$. На $P^3 \times Quot$ имеется универсальный эпиморфизм $3O(-1) \boxtimes O_{Quot} \to Q \to 0$. Рассмотрим пучок $Hom_{O_X}(p_{12}^* O_\Delta, p_{13}^* Q)$, где Δ – диагональ в $P^3 \times P^3$. Согласно утверждению Гротендика [8, 7.7.8-9], существует когерентный O_Y-пучок N такой, что для любой подсхемы Z в схеме Y существует изоморфизм пучков $Hom_{O_X}(p_{12}^* O_\Delta, p_{13}^* Q \otimes \pi^* O_Z) \approx Hom(N, O_Z)$. В частности, беря в качестве подсхемы Z точку $y \in Y$, получаем, что $Hom(k_{x \times \{y\}}, Q_{P^3 \times \{y\}}) = Hom(N, k_y) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $y \in Supp N$. Рассмотрим приведенную подсхему $\widetilde{\Pi}$ в Y, заданную идеалом $\sqrt{AnnN}$. Как множество $\widetilde{\Pi}$ совпадает с $Supp N = \{(x, y = [3O(-1) \to Q_{|P^3 \times \{y\}} \to 0]) \in Y \mid 0 \to k_x \to Q_{|P^3 \times \{y\}}\}$. Обозначим через $O_{\Delta_{\widetilde{\Pi}}}$ пучок $p_{12}^* O_\Delta \otimes O_{P^3 \times \widetilde{\Pi}}$ и через $Q_{\widetilde{\Pi}}$ пучок $O_{P^3} \boxtimes Q \otimes O_{P^3 \times \widetilde{\Pi}}$. Возьмем в вышеупомянутом утверждении Гротендика $Z = \widetilde{\Pi}$. Тогда имеется точная тройка:

$$0 \to O_{\Delta_{\widetilde{\Pi}}} \otimes Hom(O_{\Delta_{\widetilde{\Pi}}}, Q_{\widetilde{\Pi}}) \xrightarrow{can} Q_{\widetilde{\Pi}} \to Q' \to 0,$$

где $Q' := coker(can)$. Обозначим через π_N проекцию $\pi_N : P^3 \times \widetilde{\Pi} \to \widetilde{\Pi}$. По утверждению Гротендика [8, 7.7.8-9] существует когерентный пучок N' такой, что для любой подсхемы Z в схеме $\widetilde{\Pi}$ имеется изоморфизм пучков $\pi_N^* Hom(O_{\Delta_{\widetilde{\Pi}}}, Q' \otimes O_Z) \approx Hom(N', O_Z)$. Определим в $\widetilde{\Pi}$

замкнутую подсхему Π', заданную идеалом $\sqrt{AnnN'}$. Пусть $p: Y \to \mathrm{Q}uot$ – проекция, тогда $p_{\Pi'} := p_{|\Pi'} : \Pi' \to p(\Pi')$ – двулистное накрытие. Обозначим через $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_5}$ образ схемы $p(\Pi')$ при проективном морфизме p. $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_5}$ является замкнутым подмножеством в $\mathrm{Q}uot$ в силу проективности морфизма p. На $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_5} = p(\Pi')$ введем структуру приведенной подсхемы в $\mathrm{Q}uot$. По построению

$$\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_5} \overset{sets}{=} \{[3\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{Q} \to 0] \in \mathrm{Q}uot \,|\, \mathrm{Q} \text{ включается в тройку (7)}\}. \qquad (25)$$

Далее рассмотрим схему $\Pi := \tilde{\Pi} \setminus \Pi'$. Тогда по конструкции морфизм $p_{|\Pi} : \Pi \to p(\Pi) =: \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ является биекцией, поэтому на $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ определена структура приведенной локально замкнутой подсхемы в $\mathrm{Q}uot$. По построению

$$\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4} \overset{sets}{=} \{[3\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{Q} \to 0] \in \mathrm{Q}uot \,|\, \mathrm{Q} \text{ включается в тройку (5)}\}. \qquad (26)$$

Рассмотрим в $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ открытое подмножество

$$\mathrm{Q}uot^* := \{[3\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{Q} \to 0] \in \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4} \,|\, x \notin m \text{ в тройке (5)}\}. \qquad (27)$$

Очевидно, что для $[3\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{Q} \to 0] \in \mathrm{Q}uot^*$ имеет место изоморфизм $\mathrm{Q} \approx \mathrm{O}_m \oplus k_x$. Заметим, что если тройка (5) не распадается, то легко видеть, что $\mathrm{Q} = \mathrm{O}_{\tilde{m}}$, где $\tilde{m}$ – неприведенная схема с носителем m (прямая m с вложенной точкой x), поэтому, рассматривая в $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ подмножества $\mathrm{Q}uot_{nr} := \{[3\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{Q} \to 0] \in \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4} \,|$ в (5) $\mathrm{Q} = \mathrm{O}_{\tilde{m}}$, где $\tilde{m}$ – схема с носителем на прямой m, неприведенная в точке $x \in m\}$ и $\mathrm{Q}uot_{ds} := \{[3\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{Q} \to 0] \in \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4} \,|$ в (5) $x \in m$ и $\mathrm{Q} = \mathrm{O}_m \oplus k_x\}$, получаем, что

$$\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4} = \mathrm{Q}uot^* \cup \mathrm{Q}uot_{nr} \cup \mathrm{Q}uot_{ds}. \qquad (28)$$

Ниже в лемме 4 мы докажем, что множество $\mathrm{Q}uot^*$ неприводимо, в леммах 5 и 6 – что $\mathrm{Q}uot^* \cup \mathrm{Q}uot_{nr}$ и $\mathrm{Q}uot^* \cup \mathrm{Q}uot_{ds}$ – образы неприводимых множеств при некоторых морфизмах в $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$. Отсюда будет следовать, что множество $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ неприводимо (см. лемму 7).

Лемма 4. $\mathrm{Q}uot^*$ *– неприводимое открытое подмножество в* $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$.

Доказательство. Пусть G – грассманиан прямых в P^3 и Γ – график инциденции в $\mathrm{P}^3 \times G$. Рассмотрим проекцию $g: \mathrm{Q}uot^* \to G \times \mathrm{P}^3 \setminus \Gamma$: $[3\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{O}_m \oplus \mathbf{k}_x \to 0] \mapsto (m, x)$. По построению $\mathrm{Q}uot^* = g^{-1}(G \times \mathrm{P}^3 \setminus \Gamma)$ – открытое подмножество в схеме $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$. Слой $g^{-1}(m,x) = \mathrm{H}om^{epi}(3\mathrm{O}(-1), \mathrm{O}_m \oplus \mathbf{k}_x)/\mathrm{A}ut(\mathrm{O}_m \oplus \mathbf{k}_x)$, где

$\mathrm{H}om^{epi}(3\mathrm{O}(-1), \mathrm{O}_m \oplus \mathbf{k}_x) = \{(3\mathrm{O}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{O}_m \oplus \mathbf{k}_x) \in \mathrm{H}om(3\mathrm{O}(-1), \mathrm{O}_m \oplus \mathbf{k}_x) \;|\; \alpha$ – эпиморфизм$\}$

есть плотное открытое, а значит, неприводимое подмножество в $\mathcal{H}om(3\mathcal{O}(-1),\mathcal{O}_m \oplus \mathbf{k}_x) \approx \mathbf{k}^9$. Так как $\mathcal{A}ut(\mathcal{O}_m \oplus \mathbf{k}_x) = (\mathbf{k}^*)^{\times 2}$, то отсюда следует, что слой $g^{-1}(m,x)$ над каждой точкой $(m,x) \in \mathbb{P}^3 \times G \setminus \Gamma$ неприводим и имеет размерность 7. Тем самым, множество $\mathcal{Q}uot^*$ неприводимо размерности 14.

Лемма 5. $\mathcal{Q}uot^* \cup \mathcal{Q}uot_{nr}$ *есть образ в* $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{M}_4}$ *неприводимого множества при некотором морфизме.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times G$ и проекции $pr_1 : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times G \to \mathbb{P}^3$, $pr_{13} : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times G \to \mathbb{P}^3 \times G$, $pr_{23} : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times G \to \mathbb{P}^3 \times G$, $pr_{12} : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times G \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. Пусть $Z_1 := pr_{13}^{-1}(\Gamma)$ и $Z_2 := pr_{12}^{-1}(\Delta)$, где Δ – диагональ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. Имеем точную тройку: $0 \to \mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2} \to \mathcal{O}_{Z_1} \oplus \mathcal{O}_{Z_2} \to \mathcal{O}_{Z_1 \cap Z_2} \to 0$. Пусть $\delta : \mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G \to \mathbb{P}^3 \times G$ – раздутие $\mathbb{P}^3 \times G$ вдоль графика инциденции $\Gamma \subset \mathbb{P}^3 \times G$. Обозначим через δ' проекцию $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G \to \mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G$.

Докажем, что пучок $(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^* \mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2}$ – плоский над $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G$. Для этого воспользуемся утверждением [3, 9, Следствие 3], согласно которому достаточно показать, что существует целое число n_0 такое, что для любых $n > n_0$ пучок $\delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^*(\mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n))$ локально свободен. Применим к тройке $0 \to \mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n) \to (\mathcal{O}_{Z_1} \oplus \mathcal{O}_{Z_2}) \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}_{Z_1 \cap Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n) \to 0$ функтор $\delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^*$, получим:

$$0 \to \delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^*(\mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n)) \to \delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^*((\mathcal{O}_{Z_1} \oplus \mathcal{O}_{Z_2}) \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n)) \to$$

$$\to \delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^*(\mathcal{O}_{Z_1 \cap Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n)) \to 0. \tag{29}$$

По определению очевидно, что пучки $\mathcal{O}_{Z_1}$ и $\mathcal{O}_{Z_2}$ – плоские над $\mathbb{P}^3 \times G$, следовательно, пучки $(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^* \mathcal{O}_{Z_1}$ и $(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^* \mathcal{O}_{Z_2}$ также плоские $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G$. Поэтому пучок $\delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^*((\mathcal{O}_{Z_1} \oplus \mathcal{O}_{Z_2}) \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n))$ локально свободен для всех $n > n_1$, где n_1 – некоторое натуральное число. Имеем изоморфизм $\delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^* \mathcal{O}_{Z_1 \cap Z_2} \approx \delta^* pr_{23*} \mathcal{O}_{Z_1 \cap Z_2}$. Отображение $pr_{23} : Z_1 \cap Z_2 \to \Gamma$ является изоморфизмом. Тогда $\delta^* pr_{23*} \mathcal{O}_{Z_1 \cap Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n)$ – обратимый пучок на исключительном дивизоре $\widetilde{\Gamma} = \delta^{-1}(\Gamma)$ раздутия δ. Отсюда и из (29) получаем, что $\delta'_*(id_{\mathbb{P}^3} \times \delta)^*(\mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2} \otimes pr_1^* \mathcal{O}(n))$ локально свободен для $n > n_1$. Тем самым, пучок $(id \times \delta)^* \mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2}$ – плоский над $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G$.

Рассмотрим схему $X := \mathbf{P}roj((\delta'_* \mathcal{H}om(3\mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G}, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2}))^\vee)$, где $\widetilde{Z}_1 := (id \times \delta)^{-1}(Z_1)$, $\widetilde{Z}_2 := (id \times \delta)^{-1}(Z_2)$. Имеем $(id_{\mathbb{P}^3 \times \delta})^* \mathcal{O}_{Z_1 \cup Z_2} = \mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2}$. Пусть $p : X \to \mathbb{P}^3 \widetilde{\times} G$ – естественная проекция. Пучок $\delta'_*\mathcal{H}om(3\mathcal{O}(-1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3\times\tilde{G}},\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2})\approx\delta'_*3\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(1)$ локально свободен, так как в силу замены базы его ограничение на произвольную точку $z\in\mathbf{P}^3\times\tilde{G}$ есть $\mathrm{H}om(3\mathcal{O}(-1),\mathcal{Q})=\mathbf{k}^9$, где $\mathcal{Q}=\mathcal{O}_m\oplus\mathbf{k}_x$ или $\mathcal{Q}=\mathcal{O}_{\tilde{m}}$ – структурный пучок схемы с носителем на прямой m, неприведенной в точке $x\in m$. Следовательно, схема X неприводима.

Пусть $\mathcal{O}_X(1)$ – пучок Гротендика на схеме X и $q:\mathbf{P}^3\times X\to X$ – проекция. Тогда определен канонический морфизм $\mathcal{O}_X(-1)\to p^*\delta'_*3\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(1)$, и, следовательно, определен морфизм $\nu:q^*\mathcal{O}_X(-1)\to q^*p^*\delta'_*3\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(1)$. Используя морфизм вычисления $ev:(id\times p)^*\delta'^*\delta'_*3\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(1)\to(id\times p)^*3\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(1)$, построим композицию $ev\circ\nu:q^*\mathcal{O}_X(-1)\to(id\times\delta')^*3\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(1)$. С помощью естественного изоморфизма $3\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}(1)\approx(3\mathcal{O}(-1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3\times\tilde{G}})^\vee\otimes\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}$ строим морфизм пучков $\alpha_X:3\mathcal{O}(-1)\boxtimes\mathcal{O}_X\to(id\times p)^*\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}\otimes(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}\boxtimes\mathcal{O}_X(1))$. Так как пучок $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}$ – плоский над $\mathbf{P}^3\times\tilde{G}$, то пучок $(id\times p)^*\mathcal{O}_{\tilde{Z}_1\cup\tilde{Z}_2}\otimes(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}\boxtimes\mathcal{O}_X(1))$ – плоский над X. Тогда существует морфизм схем $\Phi:X\to\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ такой, что $\alpha_X=\Phi^*\alpha_{\mathrm{Q}uot}$, где $\alpha_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}:3\mathcal{O}(-1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}\to\mathcal{Q}_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}$ – универсальный морфизм. По построению $\mathrm{i}m\Phi=\mathrm{Q}uot^*\cup\mathrm{Q}uot_{nr}$. Тем самым, в силу неприводимости X, получаем, что $\mathrm{Q}uot^*\cup\mathrm{Q}uot_{nr}$ есть образ неприводимого множества при морфизме Φ.

Лемма 6. *Схема* $\mathrm{Q}uot^*\cup Quot_{ds}$ *есть образ в* $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ *неприводимого множества при некотором морфизме.*

Доказательство. Рассмотрим пучок $\mathcal{O}_{Z_1}\oplus\mathcal{O}_{Z_2}$ из доказательства леммы 5. Очевидно, что этот пучок – плоский над $\mathbf{P}^3\times G$. Пусть $Y_1:=\mathbf{P}roj(p_{23*}\mathcal{H}om(3\mathcal{O}(-1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}\boxtimes\mathcal{O}_G,\mathcal{O}_{Z_1}\oplus\mathcal{O}_{Z_2})^\vee)$ и $q:Y_1\xrightarrow{q}\mathbf{P}^3\times G$ – структурный морфизм. Слой проекции q над каждой точкой $(x,m)\in\mathbf{P}^3\times G$ изоморфен $\mathrm{H}om(3\mathcal{O}(-1),\mathcal{O}_m\oplus k_x)\approx\mathbf{P}^8$, где $x\in m$. Поэтому схема Y_1 неприводима.

Пучок $(id\times q)^*(\mathcal{O}_{Z_1}\oplus\mathcal{O}_{Z_2})\boxtimes\mathcal{O}_{Y_1}(1)$ – плоский над Y_1. Тогда существует морфизм $\Phi_1:Y_1\to\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ такой, что $\alpha_{Y_1}=\Phi_1^*\alpha_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}$, где $\alpha_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}:\mathcal{O}(-1)\boxtimes3\mathcal{O}_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}\to\mathcal{Q}_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}$. По построению $\mathrm{i}m\Phi_1=\mathrm{Q}uot^*\cup\mathrm{Q}uot_{ds}$. Отсюда, в силу неприводимости Y_1, получаем, что $\mathrm{Q}uot^*\cup\mathrm{Q}uot_{ds}$ есть образ неприводимого множества при морфизме Φ_1.

Лемма 7. *Схема* $\mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}$ *неприводима.*

Доказательство. Для доказательства настоящей леммы мы воспользуемся легко проверяемым утверждением: *если множество* X *покрывается образами* X_1 *и* X_2 *двух неприводимых множеств при некоторых морфизмах так, что* $X_1 \cap X_2$ *есть открытое плотное неприводимое множество в* X*, то* X *неприводимо.* Применим это утверждение к случаю $X = \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}$, $X_1 = \mathrm{Q}uot^* \cup \mathrm{Q}uot_{ds}$, $X_2 = \mathrm{Q}uot^* \cup \mathrm{Q}uot_{nr}$, а $X_1 \cap X_2 = \mathrm{Q}uot^*$. Тогда, используя леммы 4, 5 и 6, получаем, что схема $\mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}$ неприводима.

Рассмотрим пучок $[\mathsf{E}] \in \mathsf{M}_4$. Из определения M_4 (см. (4)) следует, что E включается в точную тройку (8), где Q – пучок из (5). Поэтому $\mathsf{E}^{\vee\vee}$ – стабильный рефлексивный пучок на P^3 с классами Черна $c_1(\mathsf{E}^{\vee\vee}) = -1$, $c_2(\mathsf{E}^{\vee\vee}) = 1$ и $c_3(\mathsf{E}^{\vee\vee}) = 1$, удовлетворяющий точной тройке (17). Используя тройку (19), строим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[d] & & \mathcal{E} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 3\mathcal{O}(-1) \arrow[r, "e"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & 3\mathcal{O}(-1) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
& \mathcal{E} \arrow[d] & & 0 & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd} \tag{30}$$

где H – ядро отображения $\alpha = \varepsilon \circ e$.

На $\mathsf{P}^3 \times \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}$ имеется универсальный эпиморфизм $3\mathsf{O}(-1) \boxtimes \mathsf{O}_{\mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}} \to \mathsf{Q}_{\mathsf{M}_4} \to 0$, где $\mathsf{Q}_{\mathsf{M}_4} = \mathsf{Q}_{|\mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}}$ – универсальный пучок на $\mathsf{P}^3 \times \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}$. Пусть $\mathbf{H}$ – ядро этого эпиморфизма. На $\mathsf{P}^3 \times \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}$ имеется пучок $\mathsf{H}om(\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3 \times \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}}, \mathbf{H}(2))$, где $\mathbf{H}(2) := \mathbf{H} \otimes (\mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(2) \boxtimes \mathsf{O}_{\mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}})$. По построению для любой точки $q \in \mathrm{Q}uot_{\mathsf{M}_4}$ имеем: $\mathbf{H}(2) \otimes \mathbf{k}_q = \mathsf{H}(2)$, где $\mathsf{H}(2) = \mathsf{H} \otimes \mathsf{O}_{\mathsf{P}^3}(2)$.

Лемма 8. *Пучок* $\mathsf{H}(2)$ *из коммутативной диаграммы (30) порождается своими сечениями и* $\mathrm{H}^0(\mathsf{H}(2)) = \mathbf{k}^8$.

Пусть $pr:\mathrm{P}^3\times \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}\to \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ – проекция. Над схемой $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ рассмотрим проективный спектр $\mathrm{W}:=\mathbf{P}roj((pr_*\mathrm{H}om(\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3\times\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}},\mathbf{H}(2)))^\vee)$ с проекцией $\rho:\mathrm{W}\to \mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$. Из леммы 8 и замены базы [5, Следствие 12.9] следует, что пучок $(pr_*\mathrm{H}om(\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3\times\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}},\mathbf{H}(2)))^\vee$ локально свободен. В связи с этим, так как схема $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ неприводима (см. лемму 7), получаем следующее предложение.

Предложение 2. *Схема* W *неприводима.*

Рассмотрим в W открытую плотную подсхему $W:=\{w\in \mathrm{W}\mid(3\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3}(-1))\mathrm{O}_{\mathrm{W}}/\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3}(-2))\mathrm{O}_{\mathrm{W}})_{|\mathrm{P}^3\times\{w\}}$ – рефлексивный пучок на $\mathrm{P}^3\}$. Аналогично рассуждениям после предложения 2 получаем, что M_4 совпадает с образом модулярного морфизма $g:W\to \mathrm{M}:w\mapsto[\mathbf{E}_{4|\mathrm{P}^3\times w}]$. Отсюда и из предложения 5 получаем следующий основной результат этого параграфа.

Предложение 7. *Множество* M_4 *неприводимо.*

§ 6. Включение множества M_4 в $\overline{\mathrm{M}}_1$

В настоящем параграфе рассматриваются множества M_1 и M_4, участвующие в формулировке теоремы 2. Как отмечалось в §2, замыкание $\overline{\mathrm{M}}_1$ множества M_1 в M является неприводимой компонентой размерности 15 в M. Докажем, что M_4 лежит в $\overline{\mathrm{M}}_1$. Отсюда будет следовать следующая теорема.

Теорема 5. $\overline{\mathrm{M}}_4$ *не составляет неприводимой компоненты в* M.

В силу неприводимости M_4 нам достаточно убедиться в том, что общая точка $[\mathrm{E}]\in\mathrm{M}_4$ лежит в неприводимой компоненте $\overline{\mathrm{M}}_1$. В схеме $\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}$ формулой (27) определено подмножество $\mathrm{Q}uot^*$. Рассмотрим открытое плотное подмножество $W^*=W\times_{\mathrm{Q}uot_{\mathrm{M}_4}}\mathrm{Q}uot^*$ в схеме W. Обозначим через M_4^* образ множества W^* в схеме модулей M при модулярном морфизме f. Пусть Γ – график инциденции в $\mathrm{P}^3\times G$. Рассмотрим схему $T:=G\times\Gamma\times\mathrm{P}^3$ и ее открытую подсхему $T':=\{(l,y,m,x)\in T\mid l$ и m – скрещивающиеся прямые, $x\notin m$, $y\in m$, $x,y\notin l$ и $x\neq y\}$. Пусть $\xi_{12}:\mathrm{P}^3\times T'\to\mathrm{P}^3\times G$, $\xi_{13}:\mathrm{P}^3\times T'\to\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3$, $\xi_{14}:\mathrm{P}^3\times T'\to\mathrm{P}^3\times G$, $\xi_{15}:\mathrm{P}^3\times T'\to\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3$, $\xi_1:\mathrm{P}\times T'\to\mathrm{P}^3$, $\xi_2:\mathrm{P}\times T'\to T'$, $\xi_{123}:\mathrm{P}^3\times T'\to\mathrm{P}^3\times G\times\mathrm{P}^3$, $\xi_{145}:\mathrm{P}^3\times T'\to\mathrm{P}^3\times G\times\mathrm{P}^3$ – проекции. На $\mathrm{P}^3\times T'$ имеется пучок $\mathrm{B}:=\mathrm{E}xt^1_{\xi_2}(\xi^*_{123}\mathrm{I}_{\Gamma\cup\Delta},\xi^*_{145}\mathrm{I}_{\Gamma\cup\Delta}\boxtimes\xi_1^*\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3}(-1))$. Прямые вычисления показывают, что $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))=\mathbf{k}^4$ для любой точки $t=(l,y,m,x)\in T'$. Тем самым, для произвольной точки $t\in T'$ замена базы дает, что $\mathrm{B}\otimes\mathbf{k}_t=\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$, и, согласно [6; Satz3(ii)], пучок B локально свободен ранга 4. Рассмотрим схему $\Omega:=\mathbf{P}roj(\mathrm{B})\xrightarrow{\gamma}T'$. Так как T', очевидно, неприводимо, то в силу локальной свободы пучка B получаем, что Ω неприводимо.

Рассмотрим в Ω открытое плотное подмножество $\Omega^*:=\{\omega=(l,y,m,x,<\xi>)\in\Omega\mid\xi\in\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\setminus\delta(\mathrm{H}om(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_x))$, где δ – связывающий гомоморфизм в точной последовательности $\mathrm{E}xt$-групп:

$0\to \mathrm{H}om(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_x)\xrightarrow{\delta}\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{I}_{m\cup x}(-1))\xrightarrow{\upsilon}\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{O}(-1))\}$. Из универсальных свойств пучка $\mathcal{B}$ (см. [12]) следует, что на $\mathcal{P}^3\times\Omega^*$ определен пучок $\mathcal{E}$ такой, что его ограничение $\mathcal{E}_\omega=\mathcal{E}_{|\mathcal{P}^3\times\omega}$ на произвольную точку $\omega=(l,y,m,x,<\xi>)\in\Omega^*$ есть расширение

$$0\to\mathcal{I}_{m\cup x}(-1)\to\mathcal{E}_\omega\to\mathcal{I}_{l\cup y}\to 0, \tag{31}$$

задаваемое элементом $\xi\in\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{I}_{m\cup x}(-1))\setminus\delta(\mathrm{H}om(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_x))$. Тем самым, определен морфизм $\nu:\Omega^*\to\mathrm{M}:\omega\mapsto[\mathcal{E}_\omega]$.

Предложение 8. *Образ* Ω^* *при отображении* ν *лежит в* $\mathcal{M}_4^*$.

Доказательство. Выберем произвольную точку $\omega=(l,y,m,x,<\xi>)\in\Omega^*$. Покажем, что $\mathcal{E}_\omega\in\mathcal{M}_4^*$. Нетрудно видеть, ввиду легко проверяемого изоморфизма $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_l,\mathcal{O}(-1))\approx\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{O}(-1))$, что точные тройки $0\to\mathcal{I}_{m\cup x}(-1)\to\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_x\to 0$ и (31) достраиваются до коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{l\cup y} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}_l \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{k}_y \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_\omega \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[u] & \mathcal{O}_m\oplus\mathbf{k}_x \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[u, "s"] & \mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_x \arrow[r] \arrow[u] & 0. \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{32}$$

Расширение $0\to\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{F}\to\mathcal{I}_l\to 0$ задается элементом $0\neq\upsilon(\xi)\in\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_l,\mathcal{O}(-1))\approx\mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{O}(-1)$ согласно определению Ω^*, поэтому $\mathcal{F}$ – рефлексивный пучок (см. [9, Example 4.2.3]). Поэтому $\mathcal{F}=\mathcal{E}_\omega^{\vee\vee}$. Таким образом, пучок $\mathcal{E}$ включается в точную тройку $0\to\mathcal{E}_\omega\to\mathcal{E}_\omega^{\vee\vee}\to\mathcal{O}_m\oplus\mathbf{k}_x\to 0$. Тем самым, по определению, $\mathcal{E}_\omega\in\mathcal{M}_4^*$, следовательно $\nu(\Omega^*)\subset\mathcal{M}_4^*$.

Предложение 9. *Морфизм* $\nu:\Omega^*\to\mathcal{M}_4^*$ *сюръективен.*

Доказательство. Покажем, что для любого наперед заданного класса изоморфизма пучка $[\mathcal{E}]\in\mathcal{M}_4^*$ существует точка $\omega=(l,y,m,x,<\xi>)\in\Omega^*$ такая, что $\nu(\omega)=[\mathcal{E}]$. Фиксируем пучок $\mathcal{E}\in\mathcal{M}_4^*$. По определению он включается в точную тройку (8), где $\mathcal{Q}=\mathcal{O}_m\oplus\mathbf{k}_x$, а $m\cup x$ – дизъюнктное объединение прямой m и точки x. Для любого $0\neq s\in\mathrm{H}^0(\mathcal{E}^{\vee\vee}(1))$, согласно (17), имеем $coker(s:\mathcal{O}\to\mathcal{E}^{\vee\vee}(1))=\mathcal{I}_l$, где l – прямая нулей сечения s (см. [9, Example 4.2.3]). Нетрудно видеть, что для общего сечения $s\in \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^{\vee\vee}(1))$ образ композиции $\varepsilon\circ s$, где $\varepsilon:\mathcal{E}^{\vee\vee}\to\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}=\mathcal{O}_m\oplus\mathbf{k}_x$ – каноническая сюръекция, есть $\mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_x$, поэтому для общего сечения s пучок $\mathcal{E}\in\mathcal{M}_4^*$ включается в диаграмму (32). По построению расширение $0\to\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{E}^{\vee\vee}\to\mathcal{I}_l\to 0$ нетривиально, в связи с этим левая вертикальная тройка в (32) как расширение задается элементом $\xi\in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{I}_{m\cup x}(-1))\setminus\delta(\mathrm{H}om(\mathcal{I}_{l\cup y},\mathcal{O}_m(-1)\oplus\mathbf{k}_x))$ (см. определение Ω^*). Тем самым, левая вертикальная тройка в (32) совпадает с тройкой (31), где $\mathcal{E}=\mathcal{E}_\omega$ для $\omega=(l,y,m,x,<\xi>)\in\Omega^*$. Другими словами, $[\mathcal{E}]=\nu(\omega)$.

Рассмотрим произвольное нетривиальное расширение $0\to\mathcal{I}_{m\cup x}(-1)\to\mathcal{X}\to\mathbf{k}_x\oplus\mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1)\to 0$, где $x\notin m$, $x\notin\mathbb{P}^2$, а $z=m\cap\mathbb{P}^2$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{X}=\mathcal{I}_{m\cup l}$ для некоторой прямой l в $\mathbb{P}^2$. Для фиксированных прямой $l\subset\mathbb{P}^2$ и точки $y\in\mathbb{P}^2$ однозначно с точностью до пропорциональности определена сюръекция $\eta:\mathcal{I}_{l\cup y}\to\mathbf{k}_x\oplus\mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1)$, ядро которой есть пучок $\mathcal{I}_x(-1)$. Тем самым получаем точную тройку $0\to\mathcal{I}_x(-1)\to\mathcal{I}_{l\cup y}\xrightarrow{\eta}\mathbf{k}_x\oplus\mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1)\to 0$, которая вместе с тройкой $0\to\mathcal{I}_{m\cup x}(-1)\to\mathcal{I}_{m\cup l}\to\mathbf{k}_x\oplus\mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1)\to 0$ достраивается до коммутативной диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_x(-1) \arrow[r] & \mathcal{I}_{l\cup y} \arrow[r, "\eta"] \arrow[u] & \mathbf{k}_x\oplus\mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_x(-1) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}_{m\cup l} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \arrow[r, equal] \arrow[u] & \mathcal{I}_{m\cup x}(-1) \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0, \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{33}
$$

в которой $\mathcal{E}$ – некоторый пучок ранга 2. Вертикальная средняя тройка в этой диаграмме совпадает с точной тройкой типа (31). С другой стороны, центральная горизонтальная тройка

$$0\to\mathcal{I}_x(-1)\to\mathcal{E}\to\mathcal{I}_{m\cup l}\to 0. \tag{34}$$

показывает, что $\mathcal{E}\in\overline{\mathcal{M}_1}$ [1, формула(7)].

Рассмотрим многообразие $X:=\{((l,y,m,x),z,\mathrm{P}^2)\in T^{'}\times\mathrm{P}^3\times\breve{\mathrm{P}}^3\mid l\cup y\subset\mathrm{P}^2\}$. По определению X лежит в $G\times\mathrm{P}^3\times G\times\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3\times\breve{\mathrm{P}}^3$, поэтому определены проекции на сомножители $j_1:\mathrm{P}^3\times X\to\mathrm{P}^3$, $j_2:\mathrm{P}^3\times X\to X$, $j_{12}:\mathrm{P}^3\times X\to\mathrm{P}^3\times G$, $j_{13}:\mathrm{P}^3\times X\to\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3$, $j_{14}:\mathrm{P}^3\times X\to\mathrm{P}^3\times G$, $j_{15}:\mathrm{P}^3\times X\to\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3$, $j_{16}:\mathrm{P}^3\times X\to\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3$, $j_{17}:\mathrm{P}^3\times X\to\mathrm{P}^3\times\breve{\mathrm{P}}^3$. Обозначим через Γ график инциденции в $\mathrm{P}^3\times G$, через Δ – диагональ в $\mathrm{P}^3\times\mathrm{P}^3$, а через $\Sigma=\{(x,\mathrm{P}^2)\in\mathrm{P}^3\times\breve{\mathrm{P}}^3\mid x\in\mathrm{P}^2\}$ – график инциденции в $\mathrm{P}^3\times\breve{\mathrm{P}}^3$. Положим $\Gamma_{12}:=j_{12}^{-1}(\Gamma)$, $\Gamma_{13}:=j_{13}^{-1}(\Delta)$, $\Delta_{14}:=j_{14}^{-1}(\Gamma)$, $\Delta_{15}:=j_{15}^{-1}(\Delta)$, $\Delta_{16}:=j_{16}^{-1}(\Delta)$, $\Sigma_{17}:=j_{17}^{-1}(\Sigma)$. Пусть D – ядро эпиморфизма $\mathrm{O}_{\Sigma_{17}}\to\mathrm{O}_{\Delta_{16}}\oplus\mathrm{O}_{\Gamma_{12}}$. Рассмотрим на $\mathrm{P}^3\times X$ пучки $\mathbf{G}:=\mathrm{O}_{\Delta_{16}}\oplus\mathrm{D}$, $\mathrm{I}_{\Gamma_{14}\cup\Delta_{15}})j_1^*\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3}(-1)$ и $\mathrm{C}:=\mathrm{E}xt^1_{j_1}(\mathbf{G},\mathrm{I}_{\Gamma_{14}\cup\Delta_{15}})j_1^*\mathrm{O}_{\mathrm{P}^3}(-1))$.

Нетрудно видеть, что для пучка C имеет место изоморфизм замены базы, который для произвольной точки $t\in T^{'}$ дает $\mathrm{C}\otimes\mathbf{k}_t=\mathrm{E}xt^1(\mathrm{G},\mathrm{I}_{m\cup x_1\cup x_2}(-1))$, поэтому, согласно [6, Satz 3(ii)], пучок Ñ локально свободен и $\Upsilon:=\mathbf{P}roj(\mathrm{C})$ – неприводимое многообразие, точками которого являются наборы $(l,y,m,x,z,\mathrm{P}^2,<\tau>)$, где $\tau\in\mathrm{E}xt^1(\mathrm{G},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$. Для произвольной точки $u=(l,y,m,x,z,\mathrm{P}^2,<\tau>)\in\Upsilon$ элемент τ определяет правую вертикальную тройку в (), а сюръекция η в (33) определяется тройкой (l,y,P^2), согласно сказанному выше. Тем самым, получаем отображение $\nu^{'}:\Upsilon\to\Omega:(l,y,m,x,z,\mathrm{P}^2,<\tau>)\mapsto(l,y,m,x,<\xi>)$, где ξ – элемент группы $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$, задающий центральную вертикальную тройку в диаграмме (33) как расширение. В силу неприводимости Υ и Ω отображение $\nu^{'}$ является морфизмом. Для того чтобы доказать, что морфизм $\nu^{'}$ доминантен, нам необходимо следующее предложение.

Отображение $\zeta:\mathrm{E}xt^1(\mathrm{G},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\to\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$ сюръективно.

Доказательство. 1) Применим к тройке $0\to\mathrm{I}_x(-1)\to\mathrm{I}_{l\cup y}\xrightarrow{\eta}\mathrm{G}\to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*,\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{E}xt^1(\mathrm{G},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\xrightarrow{\zeta}\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\to\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_x(-1),\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\to$$

$$\to\mathrm{E}xt^2(\mathrm{G},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\to\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\to\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_x(-1),\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\to$$

$$\mathrm{E}xt^3(\mathrm{G},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))\to\mathrm{E}xt^3(\mathrm{I}_{l\cup y},\mathrm{I}_{m\cup x}(-1)). \qquad (35)$$

2) Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_x(-1),\mathrm{I}_{m\cup x}(-1))=\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})$. К точной тройке $0\to\mathrm{I}_x\to\mathrm{O}\to\mathbf{k}_x\to 0$ применим функтор $\mathrm{H}om(*,\mathrm{I}_{m\cup x})$, получим:

$$\mathrm{H}om(\mathrm{I}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})\to\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})\to\mathrm{E}xt^1(\mathrm{O},\mathrm{I}_{m\cup x})\to$$

$$\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})\to\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})\to\mathrm{E}xt^2(\mathrm{O},\mathrm{I}_{m\cup x}). \qquad (36)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})$. Для этого применим к точной тройке $0\to\mathrm{I}_{m\cup x}\to\mathrm{I}_m\to\mathbf{k}_x\to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*,\mathbf{k}_x)$, получим: $\mathrm{H}om(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_m)\to\mathrm{H}om(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_x)\to\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})\to\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_m)$. Очевидно, что $\mathrm{H}om(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_m)=0$, $\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_m)=0$, так как $x\notin m$ и $\mathrm{H}om(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_x)=\mathbf{k}$, поэтому

$$\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x,\mathrm{I}_{m\cup x})=\mathbf{k}. \qquad (37)$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_x(-4))^\vee$. Применим к точной тройке $0 \to \mathrm{I}_{m\cup x} \to \mathrm{I}_m \to \mathbf{k}_x \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathbf{k}_x(-4))$, получим: $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x(-4)) \to \mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_x(-4)) \to \mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x(-4)) \to \mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x(-4))$. Так как $x \notin m$, то $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x(-4)) = 0$ и $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x(-4)) = 0$. Очевидно, что $\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x(-4)) = \mathbf{k}^3$. Отсюда получаем, что $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_x(-4)) = \mathbf{k}^3$. По двойственности Серра

$$\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_x(-4))^\vee = \mathbf{k}^3. \tag{38}$$

Очевидно, что $\mathrm{H}om(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) = 0$, $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{O}, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathbf{k}$, $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{O}, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}^2(\mathrm{I}_{m\cup x}) = 0$. Отсюда и из (36), (37), (38) получаем, что

$$\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathbf{k}^3. \tag{39}$$

3) Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x \oplus \mathrm{I}_{z,\mathrm{P}^2}(-1), \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) = \mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) \oplus \mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_{z,\mathrm{P}^2}, \mathrm{I}_{m\cup x})$. Применим к точной тройке $0 \to \mathrm{I}_{z,\mathrm{P}^2} \to \mathrm{O}_{\mathrm{P}^2} \to \mathbf{k}_z \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathrm{I}_{m\cup x})$, получим:

$$\mathrm{E}xt^2(\mathrm{O}_{\mathrm{P}^2}, \mathrm{I}_{m\cup x}) \to \mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_{z,\mathrm{P}^2}, \mathrm{I}_{m\cup x}) \to \mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_z, \mathrm{I}_{m\cup x}) \to \mathrm{E}xt^3(\mathrm{O}_{\mathrm{P}^2}, \mathrm{I}_{m\cup x}). \tag{40}$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_z, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}om(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_z(-4))^\vee$. К точной тройке $0 \to \mathrm{I}_{m\cup x} \to \mathrm{I}_m \to \mathbf{k}_x \to 0$ применим функтор $\mathrm{H}om(*, \mathbf{k}_z(-4))$, получим $0 \to \mathrm{H}om(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_z(-4)) \to \mathrm{H}om(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_z(-4)) \to \mathrm{H}om(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_z(-4)) \to \mathrm{E}xt^1((\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_z(-4))$. Так как $x \notin m$ и $z \in m$, то имеем $\mathrm{H}om(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_z(-4)) = 0$, $\mathrm{H}om(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_z(-4)) = \mathbf{k}^2$ и $\mathrm{E}xt^1((\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_z(-4)) = 0$, поэтому

$$\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_z, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}om(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_z(-4))^\vee = \mathbf{k}^2. \tag{41}$$

Очевидно, что $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{O}_{\mathrm{P}^2}, \mathrm{I}_{m\cup x}) = 0$ и $\mathrm{E}xt^3(\mathrm{O}_{\mathrm{P}^2}, \mathrm{I}_{m\cup x}) = 0$, поэтому из (40) получаем, что $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_{z,\mathrm{P}^2}, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathbf{k}^2$. Отсюда и из (38) вытекает, что

$$\mathrm{E}xt^2(\mathbf{k}_x \oplus \mathrm{I}_{z,\mathrm{P}^2}(-1), \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) = \mathbf{k}^5. \tag{42}$$

4) Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_{l\cup y}, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathrm{I}_{l\cup y} \to \mathrm{I}_l \to \mathbf{k}_y \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$, получим: $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_l, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) \to \mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_{l\cup y}, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) \to \mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_y, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) \to \mathrm{E}xt^3(\mathrm{I}_l, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1))$. Используя локально свободную резольвенту $0 \to \mathrm{O}(-2) \to 2\mathrm{O}(-1) \to \mathrm{I}_l \to 0$ пучка I_l, нетрудно получить, что $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_l, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) = 0$ и $\mathrm{E}xt^3(\mathrm{I}_l, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) = 0$. Так как $y \in m$, то аналогично (41) получаем, что

$$\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_{l\cup y}, \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) = \mathbf{k}^2. \tag{43}$$

5) Вычислим $\mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_x(-1), \mathrm{I}_{m\cup x}(-1)) = \mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_{m\cup x})$. Применим к точной тройке $0 \to \mathrm{I}_x \to \mathrm{O} \to \mathbf{k}_x \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathrm{I}_{m\cup x})$, получим

$$\mathrm{E}xt^2(\mathrm{O}, \mathrm{I}_{m\cup x}) \to \mathrm{E}xt^2(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) \to \mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) \to \mathrm{E}xt^3(\mathrm{O}, \mathrm{I}_{m\cup x}). \tag{44}$$

Вычислим $\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_x, \mathrm{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}om(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_x)^\vee$. Применим к точной тройке $0 \to \mathrm{I}_{m\cup x} \to \mathrm{I}_m \to \mathbf{k}_x \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathbf{k}_x)$, получим: $0 \to \mathrm{H}om(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x) \to \mathrm{H}om(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x) \to \mathrm{H}om(\mathrm{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_x) \to \mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x) \to \mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x)$. Очевидно, что $\mathrm{H}om(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x) = \mathbf{k}$ и $\mathrm{E}xt^1(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_x) = \mathbf{k}^3$. Так как $x \notin m$, то $\mathrm{H}om(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x) = \mathbf{k}$ и $\mathrm{E}xt^1(\mathrm{I}_m, \mathbf{k}_x) = 0$. Тогда получаем, что

$$\mathcal{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x}, \mathbf{k}_x)^{\vee} = \mathcal{E}xt^3(\mathbf{k}_x, \mathcal{I}_{m\cup x}) = \mathbf{k}^3. \tag{45}$$

Так как $\mathrm{E}xt^2(\mathcal{O}, \mathcal{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}^2(\mathcal{I}_{m\cup x}) = 0$ и $\mathrm{E}xt^3(\mathcal{O}, \mathcal{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}^3(\mathcal{I}_{m\cup x}) = 0$, из (44) следует, что

$$\mathrm{E}xt^2(\mathcal{I}_x(-1), \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) = \mathbf{k}^3. \tag{46}$$

6) Вычислим $\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_x \oplus \mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1), \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) = \mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_x, \mathcal{I}_{m\cup x}) \oplus \mathrm{E}xt^3(\mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}, \mathcal{I}_{m\cup x})$. Очевидно, что $\mathrm{E}xt^3(\mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}, \mathcal{I}_{m\cup x}) = \mathrm{H}om(\mathcal{I}_{m\cup x}, \mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-4)) = 0$. Отсюда, используя (45), получаем, что

$$\mathrm{E}xt^3(\mathbf{k}_x \oplus \mathcal{I}_{z,\mathbb{P}^2}(-1), \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) = \mathbf{k}^3. \tag{47}$$

7) Вычислим $\mathrm{E}xt^3(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_{l\cup y} \to \mathcal{I}_l \to \mathbf{k}_y \to 0$ функтор $\mathrm{H}om(*, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1))$, имеем: $\mathrm{E}xt^3(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) \to \mathrm{E}xt^3(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) \to 0$. Используя локально свободную резольвенту $0 \to \mathcal{O}(-2) \to 2\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{I}_l \to 0$ пучка $\mathcal{I}_l$, нетрудно получить, что $\mathrm{E}xt^3(\mathcal{I}_l, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) = 0$, следовательно,

$$\mathrm{E}xt^3(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) = 0. \tag{48}$$

8) Согласно (39), (42), (43), (46), (47), (48), точная тройка (35) принимает вид: $\mathrm{E}xt^1(\mathcal{G}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{E}xt^1(\mathcal{I}_{l\cup y}, \mathcal{I}_{m\cup x}(-1)) \to \mathbf{k}^3 \to \mathbf{k}^5 \to \mathbf{k}^2 \to \mathbf{k}^3 \to \mathbf{k}^3 \to 0$. Следовательно, отображение ζ сюръективно. W

Обозначим через Υ^* прообраз множества $\Omega^* \subset \Omega$ при отображении ν', который в силу доминантности ν', плотности Ω^* в Ω, неприводимости Ω и Υ является открытым плотным подмножеством в Υ. По построению морфизм $\nu'_{|\Upsilon^*}: \Upsilon^* \to \Omega^*$ доминантен. Отсюда в силу предложения 8 композиция $\nu \circ \nu': \Upsilon^* \xrightarrow{\nu\circ\nu'} \mathcal{M}_4^* \subset \mathcal{M}_4$ также доминантна, поэтому ввиду того, что по конструкции для точки $u \in \Upsilon^*$ пучок $[\mathcal{E}] = (\nu \circ \nu')(u)$ из тройки (34) принадлежит $\overline{\mathcal{M}}_1$, следует, что $\mathcal{M}_4 \subset \overline{\mathcal{M}}_1$. По определению $\dim \mathcal{M}_4 = 13$, а $\dim \mathcal{M}_1 = 15$, то $\overline{\mathcal{M}}_4 \neq \overline{\mathcal{M}}_1$, и, значит, $\overline{\mathcal{M}}_4$ не составляет компоненты в схеме модулей $\mathcal{M}$. Тем самым, теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. Заводчиков, М. А. Новые компоненты схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ полустабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ [Текст] / М. А. Заводчиков // Труды пятых Колмогоровских чтений. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2007.
2. Заводчиков, М. А. О свойствах стабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ [Текст] / М. А. Заводчиков // Ярославский педагогический вестник. Естественные науки.
3. Мамфорд, Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности [Текст] / Д. Мамфорд. – М. : Мир, 1968.
4. Оконек, К., Шнейдер М., Шпиндлер Х. Векторные расслоения на комлексных проективных пространствах [Текст] / К. Оконек, М. Шнейдер, Х. Шпиндлер. – М. : Мир, 1984.
5. Хартсхорн, Р. Алгебраическая геометрия [Текст] / Р. Хартсхорн. – М. : Мир, 1981.
6. Banica C., Putinar M., Schumacher G. Variation der globalen $\mathrm{E}xt$ in Deformationen kompakter komplexer Räume Math. Ann. 250, 1980, 135–155.
7. Ellingstrud G., Lehn M. Irreducibility of Punctual Quotient Scheme of a Sufaces arXiv:alg-geom/9704016, vol 1, 1997.
8. Grothendieck A. EGA, Ch.III Publ. Math I.H.E.S. vol 17, 1963.
9. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves. Mathematische Annalen, vol 254, 1980, 121–176.
10. Hartshorne R., Sols I. Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = -1$, $c_2 = 2$. Preprint, 1980.

11. Huyberchts D., Lehn M. The Geometry of moduli spaces of sheaves. A Publication of the Max-Planck-Institut für Matematik, Bonn, 1997.
12. Lange H. Universal families of extentions. Journal of algebra 83, 1983, 101–112
13. Maruyama M. Moduli of stable sheaves. II J. Math. Kyoto Univ. 18, 1978, 557–614.
14. Mei-Chu Chang Stable rank 2 reflexive sheaves on P^3 with small c_2 and applications. Transactions of American Mathematical Society, vol 284, 1984, 57-89.
15. Meseguer J., Sols I., Strømme S. A. Compactification of a family of vector bundles on P^3. Prog. Math. 11, 1981, 474–494.
16. Potier J. Le Systémes coherents et structures de nuveau. Astérisque, 1993.
17. Wever G.P. The moduli of a class of rank 2 vector bundles on projective 3-space. thesis, Univ. Calif. Berkley, 1977.