УДК 376

В. В. Афанасьев, В. Н. Алексеев, С. А. Тихомиров

Максимальная самоотдача педагога как залог успешного развития математических способностей одаренных детей

В настоящей работе обсуждаются вопросы, касающиеся деятельности по развитию математических способностей одаренных детей. Принцип «максимальной самоотдачи педагога» вводится и рассматривается как непременный атрибут в решении задач этой деятельности.

Ключевые слова: одаренные дети, математические способности, самоотдача педагога, залог успешного развития, принцип «максимальной самоотдачи педагога».

V. V. Afanasiev, V. N. Alekseev, S. A. Tikhomirov

A Teacher's Maximum Dedication as a Guarantee of Progress of the Gifted Children's Mathematical Abilities

In the given work questions concerning the activity on development of the gifted children's mathematical abilities are discussed. The principle «the teacher's maximum dedication» is introduced and regarded as a necessary attribute in the solution of problems of this activity.

Key words: the gifted children, mathematical abilities, a teacher's dedication, a guarantee of progress, a principle «a teacher's maximum dedication».

Раскрытие инновационного потенциала Российской Федерации является одним из приоритетных направлений развития нашего общества в XXI в. Для этого руководством страны недавно был заявлен курс на фронтальную модернизацию, самым активным образом затрагивающую все отрасли народного хозяйства. Разумно полагать, что такая модернизация невозможна без создания эффективной системы подготовки и функционирования кадров для новой России, в которой выявление, образование, воспитание, трудоустройство и в целом социализация одаренных детей является стержневой компонентой. Работа с одаренными детьми по математике – важная составная часть данной деятельности.

Проблема работы по математике с одаренными детьми давно рассматривалась в педагогической науке, однако, актуальность этой проблемы не только не уменьшается, а наоборот, возрастает. Дело в том, что в последние полтора-два десятка лет отечественная система народного образования была главным образом сориентирована на среднего ученика. Интеллектуально и творчески одаренные люди часто не могли найти применения в своей стране. Для одаренных детей, лишившихся должного внимания и поддержки наступили сложные времена. В последнее время в политике государства относительно работы с одаренными детьми наметились некоторые положительные перемены. Как провозгласил Президент РФ Д. Медведев в своем послании Федеральному собранию: «Благополучие России в относительно недалеком будущем будет напрямую зависеть от наших успехов в развитии рынка идей, изобретений, открытий, от способности государства и общества находить и поощрять талантливых и критически мыслящих людей, воспитывать молодежь в духе интеллектуальной свободы и гражданской активности». Для достижения поставленных рубежей начинать надо с самого начала – с воспитания новой личности уже в школе. Посему главная цель школы в наши дни – это раскрытие способностей каждого ученика, поиск, педагогическое сопровождение и поддержка творчески одаренных учащихся, воспитание личности, готовой к жизни в высокотехнологичном, конкурентном мире. Будущее страны будут определять интеллектуально и творчески одаренные люди, а значит, обсуждаемая тематика находится на самом острие современных задач.

Многие специалисты: ученые, педагоги, руководители указывают на дефицит специализированной литературы, посвященной работе с одаренными детьми по математике. Попыткой восполнить этот пробел является монография авторов [1]. В данной статье нам хотелось бы сконцентрировать внимание на роли педагога в развитии математических способностей одаренных детей.

Одаренность ребенка в конечном итоге означает потенциальную возможность получения более существенных результатов в той или иной области со значительно меньшей затратой сил (по сравнению с обычными детьми). Ввиду этого, одной из основных задач педагога при работе с одаренными детьми является успешное развитие их математических способностей. Отметим, что математические способности – один из наиболее «интеллектуальных» видов способностей. Для их развития необходимо постепенно формировать и постоянно корректировать «математический стиль мышления». Признаками этого стиля является способность обосновать свои рассуждения, увидеть все возможные варианты при разборе решения, умение применять имеющиеся знания в новых ситуациях, владеть набором «математических инструментов» – методов. В силу особенностей детского мышления на первом этапе формирования математических способностей следует использовать, как инструмент их формирования, деятельностный метод – решение задач.

Приведем несколько примеров задач, которые можно использовать для пополнения «инструментария» юного математика. Естественно, что такие задачи должны быть обсуждены с учащимся, обращено внимание на метод решения задачи. Затем следует решить несколько задач с применением метода. Конечно, часть достаточно важных методов уже обсуждалась в литературе для школьников и учителей. В первую очередь здесь, естественно, нужно отметить книги Дж. Пойа, например [2, 3]. Это книги с непреходящей ценностью и полезностью для становления математика. В частности в них подробно с большим количеством примеров и пояснений изложен *метод полной математической индукции*.

Другим важным методом, с которым непременно нужно знакомить школьника, интересующегося математикой, является метод решения задач, связанный с применением *принципа Дирихле*. Вначале следует рассмотреть этот принцип для конечных множеств, а затем и его непрерывные аналоги. Решение задач с использованием этого принципа можно рассматривать уже в 5–6 классах. Причем такие задачи на этом этапе хороши тем, что на них можно «отрабатывать» также *метод доказательства от противного*, который в таком случае выглядит гораздо более понятным, чем при изучении геометрии. Проиллюстрируем данное положение небольшим примером.

Задача 1. *В классе учится 25 учащихся. Докажите, что имеется месяц, в котором родилось не менее трех учеников этого класса, и имеется месяц, в котором родилось не более двух учащихся.*

Существование таких месяцев по принципу Дирихле обеспечено выполнением равенства $25 = 2 \times 12 + 1$. А при решении следует использовать противоположное предположение.

1) Допустим, что нет месяца, в котором родилось не менее трех учеников. Тогда в каждом из месяцев года родилось не более двух учеников. А из этого очевидно следует, что в этом случае в классе должно быть не более 24 учеников, что противоречит условию задачи. «Корнем» (источником) полученного противоречия является выдвинутое предположение, значит, от него надо отказаться. Поэтому месяц, в котором родилось не менее чем трое учащихся, существует.

2) Допустим, что не существует месяца, в котором родилось не более двух учащихся. Тогда в каждом месяце года родилось более двух учащихся или, что то же самое, не менее трех учеников. Просуммировав количество рожденных в каждом месяце, мы в данном случае получим, что учащихся в классе не менее 36, а это противоречит условию задачи. Источник противоречия – выдвинутое нами предположение. Следовательно, оно неверно, и от него надо отказаться. Поэтому месяц, в котором родилось не более двух учащихся, существует.

Далее на аналогичных простых примерах следует закрепить этот метод доказательства, а в дальнейшем уже просто пользоваться этим принципом. Приведем еще задачу на использование принципа Дирихле для конечных множеств. Эта задача (точнее ее вариация) в свое время предлагалась учащимся заочной физико-математической школы.

Задача 2. *Винни Пух, Пятачок, Кролик и Сова получили в подарок 100 бананов. Каждый из них какое-то количество бананов съел. Известно, что Винни Пух съел больше любого из оставшихся, Кролик с Совой вместе съели 65 бананов, причем Сова съела больше. Сколько бананов съел каждый из них?*

Начнем анализ задачи с Кролика и Совы. Поскольку они вдвоем съели 65 бананов, и имеет место равенство $65 = 32 \times 2 + 1$, то кто-то из них съел не менее 33 бананов, а кто-то не более 32. А так как, по условию, Сова съела больше Кролика, то это именно она съела не менее 33 бананов, а Кролик съел не более 32 бананов. Теперь учтем условие, что Винни Пух съел больше, чем кто-либо. Поэтому он съел не менее 34 бананов. Но тогда Винни Пух вместе с Кроликом и Совой съели не менее 99 бананов. Это означает, что Пятачку досталось не более одного банана. А поскольку каждый съел какое-то количество бананов, то Пятачку достался именно один банан. Значит, Винни Пух съел 34 банана, Сова – 33 банана, а Кролик – 32 банана.

В этом решении важно обратить внимание на логику обоснования решения, использование свойств неравенств. Уверенное владение принципом Дирихле и свойствами неравенств полностью освободили данное решение от элементов подбора. Хотя метод *подбора решения* также входит «в арсенал средств математика».

Рассмотрим теперь еще один эффективный прием решения некоторых задач, который используют в различных разделах математики. Этот прием известен как «*параметризация*» [5, с. 15, 16, 18, 19]. При его использовании неизвестные величины, входящие в решение задачи, каким-либо образом выражаются через одну из них (или вспомогательный параметр). Довольно часто таким образом можно упростить описанную ситуацию. Рассмотрим задачу, которая была сформулирована как одна из проблем Хонсберга в сборнике библиотечки «Кванта». Эта задача являлась объектом исследования в одной из конкурсных работ на конференции «Шаг в будущее». Автор работы (С. О. Цвырко) рассматривала эту проблему с привлечением компьютерных технологий. Результаты иллюстрировались цветными изображениями, то есть для исследования применялись методы *хромоматематики*. Конкурсантка в это время училась в 7 классе и получила ряд частичных утверждений для решения этой проблемы. С применением хромоматематических методов для решения этой и других проблем можно познакомиться на сайте www.amcff.ishim.info. Итак, сформулируем задачу.

Задача 3. *Найти пары натуральных чисел такие, что их произведение делится нацело на их сумму.*

Для решения проблемы достаточно указать способ перебора всех натуральных чисел *n*, которые вместе с произвольно заданным и зафиксированным натуральным числом *m* образуют пары, удовлетворяющие условию задачи, то есть такие что $x = \dfrac{m \cdot n}{m + n} \in N$. Положим $n = k \cdot m$, где $k = \dfrac{l}{d}$; $l, d \in N$; $НОД(l, d) = 1$; $d \in D(m)$. (1)

В (1) обозначено $D(m)$ – множество делителей числа *m*. Подставляя выражение для *n* в формулу для числа *x* после очевидных упрощений, получим:

$$x = \frac{l \cdot m}{d + l} \in N\ . \ (2)$$

Внешне выражение (2) не отличается от исходного выражения для *x*, но на самом деле оно фактически определяет алгоритм перебора всех чисел $n = \dfrac{l \cdot m}{d}$, дающих искомые пары вместе с числом *m*.

На самом деле, из условий (1) и выражения (2) немедленно вытекает, что:

$$d, d + l \in D(m);\ \ НОД(d, d + l) = 1.$$

Следовательно, для заданного числа нужно выписать все его делители и образовать всевозможные дроби вида $\dfrac{d_1 - d}{d}$, где $d_1 > d$, $НОД(d_1, d) = 1$ и $d, d_1 \in D(m)$. Умножая *m* на все эти числа, мы и получим искомый набор вторых чисел пары.

Например, пусть *m* = 40. Тогда $D(m) = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$, что порождает следующий набор коэффициентов $k \in \left\{\frac{1}{1}; \frac{3}{1}; \frac{4}{1}; \frac{7}{1}; \frac{9}{1}; \frac{19}{1}; \frac{39}{1}; \frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{5}\right\}$. По этому полному набору коэффициентов мы легко построим множество чисел, образующих с числом 40 искомые пары. Это такие числа $n \in \{40;120;160;280;360;760;1560;60;10;24\}$.

Предложенное нами решение легко может быть «переложено на плечи компьютера» и, таким образом, данная задача оказывается практически эквивалентной задаче факторизации, что представляет проблему только для больших чисел. Кстати, история поиска алгоритмов факторизации сама по себе очень увлекательная тема, с которой связаны, в частности, классические способы защиты информации при шифровании с открытым ключом.

Остановимся еще на одном типичном для математиков приеме. Для школьников его можно объяснить, когда они познакомятся с основами логики, например, в курсе основ информатики и вычислительной техники. Речь идет о *законе контрапозиции*, который символически может быть записан в виде $(p \Rightarrow q) \;=\; (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$. В математике этот закон используется следующими способами. Первый способ – теорему формулируют в прямом виде, а доказывают в контрапозитивной форме. Но наиболее частое использование – формулировка необходимого условия в виде прямой теоремы, а практическое применение в контрапозитивной форме. Школьники могут овладевать этими приемами (без предварительного изучения логики) на интуитивном уровне. Приведем соответствующие примеры.

Рассмотрим множество целых чисел, разбитое по остаткам при делении на 4 (по модулю 4). Отметим легко проверяемые утверждения:

$$\left.\begin{array}{l} n \bmod 4 = 0 \;\Rightarrow\; n^2 \bmod 4 = 0 \\ n \bmod 4 = 1 \;\Rightarrow\; n^2 \bmod 4 = 1 \\ n \bmod 4 = 2 \;\Rightarrow\; n^2 \bmod 4 = 0 \\ n \bmod 4 = 3 \;\Rightarrow\; n^2 \bmod 4 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow\; n^2 \bmod 4 \in \{0;1\} \qquad (4)$$

На основе (4) сформулируем необходимое условие того, что натуральное число является точным квадратом в виде теоремы.

Теорема 1. *Если натуральное число является точным квадратом, то оно либо делится на 4 без остатка, либо дает при делении остаток 1.*

Контрапозитивная форма этой теоремы может быть сформулирована в следующем виде:

Теорема 1'. *Если натуральное число при делении на 4 дает в остатке 2 или 3, то это число не является точным квадратом.*

Приведем задачу, при решении которой этот факт будет использован. Кстати, эта задача также является примером задачи, в которой условие формулируется для одной отрасли математики, а при решении используются методы другой отрасли, а также метод рассуждений «от противного».

Задача 4. *Докажите, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то его площадь (в соответствующих единицах измерения) также выражается целым числом.*

Пусть a, b и c – длины сторон треугольника, где c – гипотенуза. Тогда в силу теоремы Пифагора выполняется соотношение $c^2 = a^2 + b^2$. Площадь же прямоугольного треугольника находится по формуле $S = \dfrac{a \cdot b}{2}$. Отсюда сразу видим, что если хотя бы один из катетов a или b имеет длину, выраженную четным числом, то площадь также будет целым числом. Остается убедиться, что случай, когда оба катета имеют нечетную длину – невозможен. Предположим противное – пусть оба катета имеют нечетную длину. Тогда получаем следующую цепочку заключений:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2m+1 \\ b = 2n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 4m^2+4m+1 \\ b^2 = 4n^2+4n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow\; a^2+b^2 = 4(m^2+n^2+m+n)+2 \;\Rightarrow\; c^2 \bmod 4 = 2$$

Но последнее заключение означает (теорема 1'), что число c – не целое, а это противоречит условию. Следовательно, хотя бы один из катетов всегда имеет четную длину (при заданных условиях), что и означает, что площадь также целое число.

Школьники сами могут получить набор разнообразных необходимых признаков того, что число является точным квадратом, рассматривая остатки от деления на разные числа. Приведем еще один пример использования такого признака. По модулю 5 точные квадраты могут иметь остатки 0, 1 и 4. Рассмотрим задачу С6 из КИМов ЕГЭ [4, с. 45].

Задача 5. *Решите в натуральных числах уравнение* $n!+5n+13 = k^2$, *где* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ *– произведение всех натуральных чисел от 1 до n.*

Заметим, что при $n \geq 5$ имеем $(n!+n+13) \bmod 5 = 3$, то есть не может быть полным квадратом. Остается проверить значения $n \in \{1;2;3;4\}$. Непосредственной проверкой находим единственное решение данного уравнения $n = 2, \quad k = 5$.

Отметим еще один аспект правильного построения математических рассуждений. Речь идет о доказательствах, построенных на основе следующей эквивалентности в теории множеств:

$$A = B \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}.$$

Здесь фактически указана необходимость *проведения доказательств «в обе стороны»*, когда обосновывается равенство двух множеств.

Классическим «школьным» примером проведения доказательств этого вида является доказательство теоремы о том, что серединный перпендикуляр к отрезку на плоскости совпадает с множеством точек равноудаленных от концов этого отрезка. Чтобы убедить школьников в необходимости рассмотрения обеих составляющих таких доказательств надо разобрать достаточное количество примеров. Здесь могут быть использованы, например, необходимые признаки точных квадратов, которые не дают достаточных условий. То есть доказательство удается провести только в одном направлении, а ложность утверждения в другом направлении обнаруживается с помощью рассмотрения конкретных примеров. Полезно также рассмотреть, например, множество точек плоскости, из которых заданный отрезок AB виден, скажем, под углом в 30°. Легко обнаружить, что такая точка лежит на окружности с центром в точке O, где ABO – равносторонний треугольник, и радиусом $OA = OB$. Но это множество не совпадает с этой окружностью и не совпадает с объединением двух таких окружностей (симметричных относительно заданного отрезка). Данное множество составляет часть этого объединения.

С реализацией поставленной задачи успешного развития математических способностей одаренных детей может справиться только Учитель с большой буквы – «человек с горящими глазами», строго, последовательно и повсеместно следующий правилу, которое мы называем **принципом «максимальной самоотдачи педагога»**. Исключительную важность и действенность этого принципа продемонстрируем на примере первого заведующего кафедрой геометрии в ярославском педагогическом профессора Залмана Алтеровича Скопеца (1917–1984).

З. А. Скопец с 1963 по 1984 год (до конца своих дней) состоял членом редколлегии журнала «Математика в школе», где возглавлял отдел задач. Многие преподаватели, сотрудники, аспиранты кафедры геометрии (как и других математических кафедр) печатали на страницах этого издания свои статьи, посылали задачи. Также они привлекали студентов к работе в юношеской математической школе, к подготовке материалов для математической газеты совместно с кафедрой элементарной математики, в студенческих научных и научно-методических кружках, которыми, в частности, руководили Г. Б. Хасин, В. А. Кузнецова, О. А. Котий.

В середине 60-х гг. академик А. Н. Колмогоров пригласил З. А. Скопеца к участию в подготовке учебных руководств для школы в соответствии с составленной Андреем Николаевичем программой. Их плодотворное сотрудничество продолжалось около двадцати лет. Под редакцией и при участии З. А. Скопеца был издан учебник «Геометрия 9–10», по которому с 1975 по 1986 гг. работали все школы СССР. Сам Залман Алтерович с большим удовольствием и энтузиазмом занимался с одаренными детьми по математике, многие из которых впоследствии стали серьезными специалистами.

Благодаря общению с иногородними (в первую очередь – московскими) геометрами и при непосредственном содействии З. А. Скопеца ярославские ученые в 70-х гг. прошлого века начали осваивать новую для них область алгебраической геометрии. Безусловным лидером здесь стал доцент кафедры геометрии А. С. Тихомиров, делавший большие успехи в сложной науке. Стоит отметить, что З. А. Скопец начал обучать А. С. Тихомирова, когда тот был еще школьником, имевшим большие способности к математике, выявленные именно Залманом Алтеровичем. Фанатично преданный своему делу З. А. Скопец пестовал А. С. Тихомирова, как и других своих учеников, всей душой и всем сердцем радея для успехов молодого математика, стараясь передать ему максимум своих знаний и умений, при этом поощряя его конструктивную инициативу. Под руководством З. А. Скопеца А. С. Тихомиров в 1975 г. защитил кандидатскую диссертацию.

В дальнейшем З. А. Скопец и А. С. Тихомиров работали уже как коллеги – вместе публиковали статьи, осуществляли научное руководство талантливой молодежью, проводили всесоюзные школы-семинары по алгебраической геометрии. Первая такая школа на базе ЯГПИ прошла в начале 1979 г. Ее организаторами стали Московский государственный университет, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН и Ярославский педагогический институт. Председателем оргкомитета первой Школы был член-корреспондент АН СССР, заведующий кафедрой алгебры МГУ, профессор А. И. Кострикин. Его заместителем стал З. А. Скопец, а секретарем оргкомитета был А. С. Тихомиров.

Эти Школы, регулярно проводившиеся в Ярославле, собирали большое число участников из Москвы (МГУ, МИАН и др.), Ленинграда, Минска и других городов. Среди активных участников и организаторов Школ были А. Н. Тюрин и

В. А. Исковских (оба впоследствии были избраны членами-корреспондентами РАН). В работе Школ принимали участие лауреаты Филдсовской премии член-корреспондент АН СССР С. П. Новиков и профессор В. Г. Дринфельд, а также лауреат Ленинской премии, профессор В. И. Арнольд. И Арнольд, и Новиков вскоре стали академиками. Традиции проведения данных школ живы и сейчас, в наши дни в них участвуют академик РАН А. Н. Паршин, члены-корреспонденты РАН Е. М. Чирка и С. Ю. Немировский, А. С. Тихомиров (ныне – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры ЯГПУ) является постоянным членом оргкомитета.

Под руководством З. А. Скопеца более 40 человек защитили кандидатские диссертации по физико-математическим, педагогическим и техническим наукам. Из тех, кто окончил аспирантуру кафедры геометрии до 1984 г., 17 человек сегодня работают в ЯГПУ и других ярославских вузах. Профессора Скопеца иногда упрекали: «Слишком много сил и энергии тратит на учеников в ущерб личной карьере». Но Залман Алтерович прекрасно понимал, что «кадры решают все», и подготовке квалифицированных специалистов для отечественного образования и науки он предавался самозабвенно, бескорыстно, не щадя себя и буквально «заражая» людей любовью к математике. Подопечных он регулярно приглашал для занятий к себе на квартиру, на дачу, ходил с ними на культурно-массовые мероприятия. «Светя другим, сгораю сам» – этот постулат, однозначно необходимый для работы с одаренными детьми, да и в преподавании в целом, профессор Скопец считал центральным. Талант открывать и растить таланты – таким навсегда остался в светлой памяти коллег, учеников и последователей замечательный ученый, педагог, человек Залман Алтерович Скопец.

Библиографический список:

1. Афанасьев, В. В. Работа с одаренными детьми по математике [Текст] / В. В. Афанасьев, В. Н. Алексеев, С. А. Тихомиров. – Ярославль : ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2011. – 132 с.

2. Пойа, Дж. Математика и правдоподобные рассуждения [Текст] / Дж. Пойя. – Изд. 2-ое, испр. – М. : Наука, 1975. – 464 с.

3. Пойа, Дж. Математическое открытие [Текст] / Дж. Пойа. – Изд. 2-ое, стер. – М. : Наука, 1976. – 448 с.

4. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: 2012: Математика [Текст] / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М. : АСТ : Астрель, 2011. – 96 с.

5. Шафаревич, И. Р. Основы алгебраической геометрии [Текст] / И. Р. Шафаревич. – М. : Наука, 1972. – 568 с.