УДК 37.0

Р. А. Иванов, В. Е. Фирстов

Метрические концепции оптимизации управления дидактическими процессами

В статье представлены основные метрические концепции в области теории информации с целью показать, каким образом эти концепции отражаются в учебном процессе и позволяют формировать оптимальное управление процессом обучения на основе количественных информационных принципов оптимизации. Такое направление в дидактике авторами определяется, как квантитативная когнитология.

Ключевые слова: метрические концепции информации, дидактические процессы, квантитативная когнитология, развивающее обучение, алгоритм, экспертная система.

R. A. Ivanov, V. E. Firstov

Metric Concepts of Optimization of Didactic Processes Management

Main metric conceptions in the sphere of the information theory are represented in this work in order to show in what way these conceptions are reflected in training processes, and how these conceptions allow to form optimal control by the teaching process on the basis of the quantitative information principles of optimization. This direction in didactics is defined by the authors as quantitative cognitology.

Key words: metric information conceptions, control, didactic processes, quantitative cognitology, developing training, algorithm, an expert system.

В XXI в. набирает обороты глобальный процесс информатизации общественных отношений, который в системе образования позволяет расширить возможности процесса обучения, и, представляет один из приоритетов концепции модернизации российского образования. Однако, определяя в качестве приоритета широкую информатизацию учебных процессов, по сути, ставятся определенные проблемы в области дидактики, связанные с созданием обновленной коммуникационной среды обучения, адаптированной к усвоению больших массивов знаний и формированию необходимых компетенций. Цель работы – показать, что разрешение многих вопросов обозначенной проблематики происходит в рамках кибернетической концепции по линии квантитативной когнитологии, представляющей новое междисциплинарное направление в современной дидактике [1], трактующее обучение как управление познавательными процессами в системе знаний на основе количественных мер информации.

Три подхода к определению количества информации. Основания квантитативной когнитологии восходят к классическим работам К. Шеннона (1948, [2]), Н. Рашевского (1955, [18]) и А. Н. Колмогорова (1965, [3]).

Построение метрической функции для определения количества информации по Шеннону происходит *на основе стохастической меры* так, что количество информации I в сообщении выражается соотношением [2]:

$$I = -\log_2 p, \quad (1)$$

где p – вероятность данного сообщения, а величина I измеряется в битах или байтах. Количество информации (1) представляет типичный пример абстрактной стохастической меры, трактующей информацию, как некий груз неопределенности, снятие которой приводит к адекватному восприятию данного сообщения. В реальности, почти всегда имеют дело с потоком независимых сообщений с вероятностями $p_1;\dots;p_n$ и соответствующую меру информации определяют в виде математического ожидания:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i I_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i, \quad (2)$$

где I_i – количество информации, связанное с i-м сообщением. Величину H называют информационной энтропией по К. Шеннону [2].

Определения количества информации [1, 2] представляют его как меру неопределенности, снятие которой приводит к адекватному управлению процессом, что позволяет сформулировать критерий оптимизации управления, известный как принцип минимизации информационной энтропии данного процесса: opt $H \Leftrightarrow$ min H [3].

Фактически, минимизация информационной энтропии в процессе управления означает оптимальную организацию информационных сетей и потоков, реализующих передачу управляющего сигнала в данном процессе.

Для построения метрической функции, определяющей количество информации на основе *детерминированной меры*, обычно используются *алгоритмический* или *топологический* подходы [18, 3].

При алгоритмическом подходе рассматриваемая система передачи информации моделируется семантической сетью, представляющей орграф $\vec{\Gamma}(S)$ в виде пары $(S;F)$, где S – множество вершин, описывающих предикатную область данной системы, связи (дуги) в которой задаются посредством коммутатора F, представляющего набор функций $f \in F$, реализующих определенные правила вывода. Пусть в сети $\vec{\Gamma}(S)$ имеется алгоритм вывода: $f : s_1;\ldots;s_n \to s$, где $s_1;\ldots;s_n;s \in S$. Процедура вывода s является упорядоченным множеством $B(s) \subseteq U(s)$, где $U(s)$ – объединение всех алгоритмов перехода к вершине s. Пусть $\vec{l}(\Sigma;s)$ – множество маршрутов от источников сети $\Sigma \subset S$ к вершине s в алгоритме вывода $B(s)$. Длина $|\vec{b}(s)|$ алгоритма $B(s)$ представляет критический путь на $B(s)$ и определяется рекурсивно [4, 5]:

$$|\vec{b}(s)| = \max(|\vec{b}(s_1)|;\ldots;|\vec{b}(s_n)|)+1. \quad (4)$$

Тогда величина inf $|\vec{b}(s)|$ среди всех алгоритмов множества $U(s)$ определяет алгоритмическое количество информации по А. Н. Колмогорову при переходе к вершине s в рамках сети $\vec{\Gamma}(S)$.

Топологический подход к построению метрической функции для определения количества информации формируется с помощью системы покрытий сети $\vec{\Gamma}(S)$, когда параметром оптимизации выступает емкость (мощность) элементов покрытия [4, 5]. Таким образом, формируется топологическая концепция Н. Рашевского для определения количества информации [18], которая, вообще говоря, не совпадает с алгоритмической концепцией А. Н. Колмогорова [3]. Эта проблематика основательно исследуется в связи с задачами принятия решений при ситуационном управлении сложными системами и, например, в алгоритмах обобщения [6], использующих аппарат покрытий, эффективность принимаемого решения оценивается с помощью мощностей подмножеств, покрывающих класс элементов обучающей выборки на соответствующей семантической сети.

В последние десятилетия в квантитативной когнитологии эффективно задействованы концепции синергетики [7], так как самоорганизация системы на микроуровне приводит к возникновению новых качеств на ее макроуровне. Появление новых качеств происходит подобно фазовому переходу в динамической системе по сценарию самоорганизованной критичности [8], порождая новые информационные качества (семантические или аксиологические) системы. В этом плане синергетика выступает как определенная методология в дидактике, поскольку посредством целенаправленного взаимодействия в процессе обучения наблюдаются эффекты, присущие открытым системам.

Наша дальнейшая цель – дать отражение представленных метрических информационных концепций в различных дидактических аспектах.

Оптимизация группового сотрудничества в учебном процессе. В этом случае наиболее важным моментом для обеспечения учебного эффекта является формирование оптимального разбиения обучаемого контингента на коалиции, которое реализуется в рамках ИКТ [10] следующим образом [11].

Пусть $A=\{a_1;a_2;\ldots;a_m\}$ – множество, представляющее некоторый обучаемый контингент, на котором проводится педагогическое измерение посредством тестирования уровня знаний, при котором контролируется индивидуальное время выполнения тестов. В результате устанавливается цепочка неравенств $0<t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_m<T$, где t_i – общее время выполнения задания i-м учащимся, где учтено качество выполнения; $i=\overline{1;m}$; T – регламент, определяемый параметрами теста. Пусть установленная цепочка неравенств – это некоторое устойчивое статистическое среднее, которое с достаточной точностью реализуется при многократном испытании.

По данным измерения определяются уровни обученности $\alpha_i=1-t_i/T$ учащихся, по которым строится распределение нормированных вероятностей

$$p(a_i)=\frac{\alpha_i}{\alpha}=\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m},\ i=\overline{1,m}. \quad (5)$$

которые образуют полную систему, представляющую «интеллектуальный портрет» данного контингента. Технология группового сотрудничества формально выражается посредством разбиения множества

$$A=A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n,\ A_j\cap A_k=\varnothing,\ j\neq k,\ j;k=\overline{1,n},\ (6)$$

$$|A_1|+|A_2|+...+|A_n|=|A|=m. \quad (7)$$

Для проведения оптимизации разбиения построим групповые вероятности:

$$p_j=\sum p(a_i),\forall a_i\in A_j\ , \quad (8)$$

где p_j – есть вероятность того, что некоторый элемент из A входит в класс A_j, и пусть q_j – есть вероятность того, что из разбиения (6) на удачу выбран класс A_j при условии $q_1+...+q_n=1$. С вероятностями p_j; q_j связываются информационные энтропии:

$$H(p)=-\sum_{j=1}^{n}p_j\log_2 p_j\ ,\quad H(q)=-\sum_{j=1}^{n}p_j\log_2 q_j\ . \quad (9)$$

Оптимум в рассматриваемой информационной модели достигается, если минимальна энтропия $H(q)$, что обеспечивается при условии равенства $p_j=q_j$. Это означает, что при оптимизации группового сотрудничества в учебном процессе разбиение (6) должно формироваться с учетом распределения (5), следуя критерию (3), то есть $H(p)\rightarrow\min$.

Данная ИКТ реализована как на уровне школьного (4–11 классы), так и высшего образования. Для примера на рисунке 1 представлены результаты оптимизации группового сотрудничества на уроках математики в 4 классе МОУ «Гимназия № 5» г. Саратова. Как видно из диаграммы на рисунке 1, после проведения ИКТ показатели академической успешности школьников улучшились в среднем на 27,5 %. В целом как показывает опыт, посредством данной ИКТ показатели успеваемости школьников могут увеличиваться на 20–30 %, где нижнее значение соответствует старшим классам. На уровне I курса физико-математических специальностей университетов и педвузов данный показатель находится на уровне 18–20 % [1].

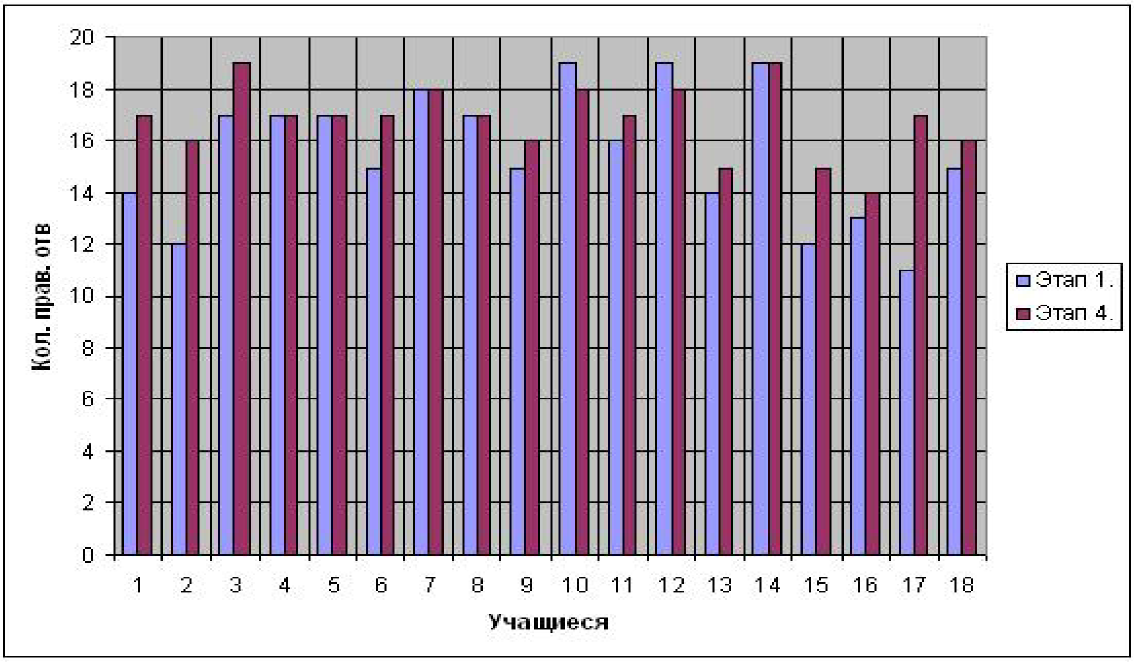

Рис. 1. На диаграмме по оси абсцисс занумерованы фамилии учащихся; по оси ординат – количество правильных ответов на тестовое задание. Тест содержал 20 вопросов

Оптимизация распределения образовательного контента по траектории учебного процесса. В рамках психологической концепции Л. С. Выготского информационную модель развивающего обучения можно выразить следующим рекуррентным уравнением:

$$I_{i+1} = I_i + \Delta I_i, \qquad (10)$$

где I_i – количество информации, отвечающее актуальному уровню знаний обучаемого субъекта на *i*-м шаге обучения; ΔI_i – знания, активируемые путем целенаправленного учебного воздействия на зону потенциального развития уровня I_i данного субъекта и, по мере наполнения уровня I_{i+1} в процессе $I_i \to I_{i+1}$, реализуется $(i+1)$-й шаг обучения; параметр $i = \overline{0;n}$. Таким образом, в рамках процедуры (15.1) исходный уровень знаний I_0 планомерно поднимается до уровня I_{n+1}. При этом знания области ΔI_i, по классическим исследованиям Л. С. Выготского [11], представляют функции $\Delta I_i = \Delta I_i(I_i)$, то есть области ΔI_i развиваются на основе имеющегося опыта I_i путем создания и разрешения проблемных ситуаций в учебном процессе.

Определим информационные характеристики учебного процесса, моделируемого процедурой (10). В этом случае переход к уровню знаний I_{i+1} происходит в результате «освоения» области ΔI_i посредством целенаправленного учебного воздействия на зону потенциального развития уровня I_i обучаемого субъекта, так, что информационная энтропия в процессе развивающего обучения (10) составит:

$$H = \sum_{i=0}^{n} \Delta I_i p_i = -\sum_{i=0}^{n} p_i \log_2 p_i \qquad (11)$$

где p_i – вероятность усвоения совокупности знаний области ΔI_i. Тогда пропускная способность рассматриваемого канала связи оказывается равной:

$$\gamma = \frac{H}{T} = -\frac{1}{T}\sum_{i=0}^{n} p_i \log_2 p_i \qquad (12)$$

где T – продолжительность обучения в данном учебном процессе.

Представленная информационная модель (10)–(12) описывает траекторию обучения учащихся и оптимизация в рамках данной модели, согласно (3), происходит посредством минимизации информационной энтропии (11), что подразумевает целенаправленное воздействие на вероятности p_i и приводит к системе ограничений, при которых минимизируется энтропия (11):

$$\sum_{i=0}^{n} t_i \le T; \quad \sum_{i=0}^{n} \Delta I_i = I_{n+1} - I_0 = \Delta I \qquad (13)$$

где t_i – время, в течение которого происходит проработка предметной области знаний ΔI_i. Определение вероятностей p_i происходит по так называемым кривым научения [13], представляющих вероятность усвоения p_i знаний области ΔI_i в зависимости от времени t_i.

Таким образом, информационная модель развивающего обучения (10)–(13) реализует планомерное продвижение знаний в учебном процессе, в рамках которого формируется оптимальная учебная траектория обучаемого субъекта, описываемая итерационным процессом (10). По сути дела, оптимизация процесса в этом случае сводится к стимулированию мыслительной деятельности обучаемого в зоне его ближайшего развития ($\Delta I_i > 0$), что равносильно дидактически взвешенной подаче изучаемого материала, особенно, если речь идет о разработке базы знаний обучающей экспертной системы (ЭС) [13]. Отметим, что в рамках модели (10)–(13) легко показать, что «пошаговое» обучение (10) уступает блочно-модульному обучению, однако, при этом играют важную роль онтогенетические факторы, и модульное обучение довольно распространено в высшей школе. В средней школе, из-за возрастной специфики преимущества блочно-модульного обучения пока не столь очевидны [12].

Семантические сети и оптимизация качества образовательного контента. Этот важный аспект управления учебным процессом проводится на основе алгоритмической меры информации по Колмогорову или на языке покрытий по Рашевскому в интерпретации [14]. Мы его продемонстрируем на примере школьной геометрии, анализируя основные варианты доказательств теоремы Пифагора в российском образовании за период с 1768 г. по настоящее время, параметры которых представлены в таблице 1, где $|\vec{b}_i(T)|$ – длина *i*-го доказательства, определенная по алгоритмической мере (4); $|B_i(T)|$ – соответствующая емкость доказательства $B_i(T)$.

Таблица 1

Метрические характеристики основных вариантов доказательств теоремы Пифагора в различных системах аксиом

Доказательство	**Аксиоматика**	***i***	$\left\|\vec{b}_i(T)\right\|$	$\left\|B_i(T)\right\|$
Евклид	Евклид (IV в. до н. э.)	1	10	36
Бхаскар-I		2	9	23
Бхаскар-II	Д. Гильберт (1899)	3	12	35
Векторно-точечное	Г. Вейль (1918)	4	2	12

Как видно из таблицы 1, по обоим параметрам векторно-точечное доказательство в духе Вейля является предпочтительным, однако, оно связано с повышением уровня абстракции в преподавании и проигрывает по дидактическим принципам наглядности и доступности, которые в процессе обучения очень важны и это подтверждают данные таблицы 2, где приведены основные варианты доказательства теоремы Пифагора в российских школьных учебниках геометрии за период с 1768 г. Классическое евклидово доказательство в виде «пифагоровых штанов», по существу, встречается в учебниках Н. Г. Курганова и С. Е. Гурьева, которые строго следовали канону «Начал» Евклида. Что касается учебника А. П. Киселева, то там это доказательство дается, скорее, как дань исторической традиции, вкупе с доказательствами Бхаскара. Начиная с учебника А. Ю. Давидова, в отечественных учебниках по геометрии при доказательстве теоремы Пифагора наибольшее распространение получили доказательства Бхаскара-I и Бхаскара-II [15]. Таким образом, в отечественном образовании в области школьной геометрии принципы наглядности и доступности всегда доминировали над принципом абстракции, и эти дидактические постулаты выдержали серьезную проверку. Попытки изменить это положение, предпринятые в ряде стран в 60-х гг. прошлого века, как известно [16, 17], имели самые негативные последствия.

Таблица 2

Основные варианты доказательств теоремы Пифагора в российском математическом образовании

Учебник	**Авторы**	**Год издания**	**Доказательства**			
			1	**2**	**3**	**4**
Элементы геометрии	Н. Г. Курганов	1768	+	-	-	-
Основания геометрии	С. Е. Гурьев	1811	+	-	-	-
Элементарная геометрия	А. Ю. Давидов	1864	-	-	+	-
Элементарная геометрия	А. П. Киселев	1893	+	+	+	-
Рабочая книга по математике	М. Ф. Берг и др.	1930	-	+	-	-
Элементарная геометрия	Ж. Адамар	1957	-	-	+	-
Геометрия	Н. Н. Никитин	1961	-	+	-	-
Преобразование. Векторы	В. Г. Болтянский, И. М. Яглом	1964	-	-	-	+
Геометрия	П. П. Андреев, Э. З. Шувалова	1973	-	-	+	-
Геометрия	А. Н. Колмогоров и др.	1980	-	-	+	-
Геометрия	А. Д. Александров	1991	-	+	-	-
Геометрия	Л. С. Атанасян и др.	1992	-	+	-	+
Геометрия	А. В. Погорелов	1993	-	-	+	+
Геометрия	И. Ф. Шарыгин	2000	-	-	+	+

Объективный процесс информатизации образования приводит к тому, что педагогическая наука все больше нуждается в формализованном языке, причем, не столько для реализации собственных концепций, сколько для анализа непростой логики дидактических процессов. Теория информации в этом смысле представляет уникальную возможность, поскольку ее основное понятие допускает количественное измерение и, таким образом, в сфере образования открывается широкое поле для математического моделирования, а, следовательно, и прогнозирования при принятии ответственных решений. В данной работе конкретно показаны определенные пути в этом направлении, из которых явно видно, что современная дидактика из науки о передаче знаний в форме теории обучения постепенно приобретает форму квантитативной когнитологии.

Библиографический список:

1. Фирстов, В. Е. Математические модели управления дидактичекскими процессами при обучении математике в средней школе на основе кибернетического подхода [Текст] : автореф. дисс. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / В. Е. Фирстов. – Ярославль, 2010. – 48 с.

2. Шеннон, К. Работы по теории информации и кибернетике [Текст] / К. Шеннон. – М., 1963. – 829 с.

3. Колмогоров, А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» [Текст] т. 1 / А. Н. Колмогоров // Проблемы передачи информации – 1965. – № 1. – С. 3–11.

4. Фирстов, В. Е. Семантическая модель и оптимизация при построении и распространении математического знания [Текст] / В. Е Фирстов // Вестник Саратовского госуд. техн. ун-та, 2006, №3 (14), вып. 1. – С. 34–43.

5. Фирстов, В. Е. Семантические сети и эффективное формирование математического знания [Текст] / В. Е. Фирстов // Труды V-х Колмогоровских чтений. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 172–182.

6. Вагин, В. Н. Вопросы структурного обобщения и классификации в системах принятия решений [Текст] / В. Н. Вагин, Н. П. Викторова // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1982. – № 5. – С. 64–72.

7. Хакен, Г. Информация и самоорганизация [Текст] / Г. Хакен. – М. : Ком.Книга, 2005. – 248 с.

8. Пер Бак, Самоорганизованная критичность [Текст] / Пер Бак, Кан Чен // В мире науки. – 1991. – № 3. – С. 16–24.

9. Фирстов, В. Е. Информационная технология организации группового сотрудничества при обучении [Текст] / В. Е. Фирстов // Вестник Саратовского госуд. техн. ун-та. – 2009. – №2 (39). – вып. 2. – С. 101–103.

10. Фирстов, В. Е. Концепция развивающего обучения Л. С. Выготского, педагогика сотрудничества и кибернетика [Текст] / В. Е. Фирстов // Ярославский педагогический вестник. – 2008. – Вып. №4(57). – С. 98–104.

11. Выготский, Л. С. Педагогическая психология Под ред. В. В. Давыдова [Текст] / Л. С. Выготский. – М. : АСТ : Астрель : Люкс, 2005. – 671 с.

12. Нурминский, И. И. Статистические закономерности формирования знаний и умений учащихся [Текст] / И. И. Нурминский, Н. К. Гладышева. – М. : Педагогика, 1991. – 224 с.

13. Фирстов, В. Е. Экспертные системы и информационная концепция развивающего обучения [Текст] / В. Е. Фирстов // Ярославский педагогический вестник. – 2009. – № 1(58). – С. 69–73.

14. Фирстов, В. Е. Информационно-стохастическая модель и оптимизация при формировании математического знания [Текст] / В. Е. Фирстов // Труды IV Колмогоровских чтений. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2006. – С. 240–252.

15. Фирстов, В. Е. Кибернетическая концепция и математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в школе и вузе: Монография [Текст] / В. Е. Фирстов. – Саратов : Издательский Центр «Наука», 2010. – 511 с.

16. Колмогоров, А. Н. Новые программы французской школы [Текст] / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов // Математика в школе. – 1978. – № 6. – С. 74–78.

17. Маслова, Г. Г. Совет учителей математики США о путях совершенствования математического образования в 80-е годы [Текст] / Г. Г. Маслова // Математика в школе. – 1981. – № 5. – С. 68–71.

18. Rashevsky, N. Live, Information Theory and Topology [Text] / N. Rashevsky // The Bulletin of Mathematical Biophysics. – Chicago, 1955, V.17, № 3. – PP. 25–78.