УДК 539.1

А. С. Киселёв, В. Г. Кречет

Пятимерная вакуумная задача с вихревым гравитационным полем

Данная поисковая научно-исследовательская работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

В работе в рамках пятимерной геометрической теории исследуется проблема гравитационного взаимодействия вихревого гравитационного и скалярного полей. Дано решение пятимерных вакуумных уравнений Эйнштейна, проводится сравнение результатов с полученными ранее в четырехмерной теории.

Ключевые слова: пятимерие, скалярное поле, вихревое гравитационное поле, единая геометрическая теория, «кротовые норы».

A. S. Kiseliov, V. G. Krechet

Five-Measured Vacuum Sum with a Vortical Gravitational Field

In the work within the five-measured geometrical theory the problem of gravitational interaction of the vortical gravitational and scalar fields is investigated. The solution of the five-measured vacuum equations of Einstein is given. Is presented the comparison of results with received before in the four-dimensional theory.

Keywords: five-dimention, a scalar field, a vortical gravitational field, the integrated geometrical theory, «mole's holes».

Рассмотрим принципиально важную задачу о гравитационном взаимодействии геометрического скалярного поля с вихревым гравитационным полем в пятимерном пространстве-времени. Подобная задача для четырехмерного случая рассматривалась ранее в работе [1].

Для удобства будем использовать экспоненциальные выражения для метрических коэффициентов, так что соответствующая пятимерная метрика будет иметь вид:

$$ds^2 = -e^{\nu(x)}dt^2 + e^{\lambda(x)}dx^2 + e^{\mu(x)}d\alpha^2 + e^{\gamma(x)}dz^2 + e^{\varphi(x)}(dx^4)^2 + 2e^{\beta(x)}dtd\alpha \quad (1)$$

Здесь метрический коэффициент $e^{\beta(x)} = g_{02}$ соответствует наличию вращения конгруэнций временеподобных мировых линий, а коэффициент $e^{\varphi(x)} = g_{44}$ описывает некое скалярное поле геометрического происхождения.

Для исследования поставленной задачи необходимо решить вакуумные уравнения Эйнштейна в пятимерном пространстве-времени:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} = 0; \quad (A,B = 0,1,2,3,4) \quad (2)$$

Для рассматриваемого случая эта система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(\mu' + \gamma' + \varphi')' - (\mu' + \nu' + \gamma' + \varphi')(\varphi' + \gamma' + \mu') - e^{2\beta-\mu-\nu}(\beta' - \nu')^2 = 0;\\
&\mu'(\varphi' + \gamma' + \nu') + \nu'(\gamma' + \varphi') - \gamma'\varphi' + e^{2\beta-\mu-\nu}(\beta' - \nu')^2 = 0;\\
&(\nu' + \gamma' + \varphi')' - (\mu' + \nu' + \gamma' + \varphi')(\nu' + \gamma' + \varphi') + e^{2\beta-\mu-\nu}(\beta' - \nu')^2 = 0;\\
&\beta'' - \nu'' + (\beta' - \nu')(\beta' - 2\mu' - \nu' - \gamma' - \varphi') = 0;\\
&\mu'' + \nu'' - \varphi'' + (\varphi' - \mu' - \nu')(\mu' + \nu' + \gamma' + \varphi') = 0;\\
&\mu'' + \nu'' + \gamma'' - (\mu' + \nu' + \gamma')(\mu' + \nu' + \gamma' + \varphi') = 0.
\end{aligned} \quad (3)$$

Последние три уравнения системы (3) имеют следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} &(\beta' - \nu')e^{\beta - 2\mu - \nu - \gamma - \varphi} = 2\omega_0; \\ &(\mu' + \nu' - \varphi')e^{-(\mu + \nu + \gamma + \varphi)} = c_1; \\ &(\mu' + \nu' + \gamma')e^{-(\mu + \nu + \gamma + \varphi)} = c_2; \end{aligned} \qquad (4)$$

здесь $c_1, c_2, \omega_0 = const$. При этом кинетическая характеристика вихревого гравитационного поля ω, то есть его интенсивность, определяется формулой:

$$\omega = \frac{e^{\beta}(\beta' - \nu')}{2e^{\mu + \nu + \frac{\gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}}} \qquad (5)$$

Рассмотрим последние два интеграла системы (4): вычитая одно из другого, получим:

$$(\gamma' - \varphi')e^{\mu + \nu + \gamma + \varphi} = c_1 - c_2,$$

поскольку метрические коэффициенты γ, φ в рассматриваемой задаче зависят только от x и не зависят от z и x^4 соответственно и стоят при пространственных измерениях, они обладают одинаковым типом симметрии, и поэтому постоянные интегрирования c_1, c_2 для них без ограничения общности можно считать равными между собой: $c_1 = c_2 = c$. Тогда получаем, что $\gamma(x) = \varphi(x)$, а интенсивность гравитационного вихря (или угловая скорость вращения конгруэнций линий времени) принимает вид:

$$\omega = \frac{e^{\beta}(\beta' - \nu')}{2e^{\mu + \nu + \gamma}}, \qquad (6)$$

а учитывая первое соотношение системы (4), это выражение упростится до следующего:

$$\omega = \omega_0 e^{\mu + \gamma}. \qquad (7)$$

Сама же система (3) перепишется в виде:

$$\begin{aligned} &2\gamma'\mu' + 2\gamma'\nu' + \mu'\nu' - \gamma'^2 + 4\omega_0^2 e^{3\mu + \nu + 4\gamma} = 0; \\ &(\mu' + 2\gamma')' - (\mu' + \nu' + 2\gamma')(\mu' + 2\gamma') - 4\omega_0^2 e^{3\mu + \nu + 4\gamma} = 0; \\ &(\nu' + 2\gamma')' - (\mu' + \nu' + 2\gamma')(\nu' + 2\gamma') + 4\omega_0^2 e^{3\mu + \nu + 4\gamma} = 0; \\ &(\beta' - \nu')e^{\beta - 2\mu - \nu - 2\gamma} = 2\omega_0; \\ &(\mu' + \nu' - \gamma')e^{-(\mu + \nu + 2\gamma)} = c. \end{aligned} \qquad (8)$$

Складывая второе и третье уравнение полученной системы (8), имеем:

$$(\mu' + \nu' + 4\gamma')' - (\mu' + \nu' + 2\gamma')(\mu' + \nu' + 4\gamma') = 0;$$

откуда получаем еще один интеграл:

$$\mu' + \nu' + 4\gamma' = c_3 e^{\mu + \nu + 2\gamma}.$$

Учитывая этот интеграл и последнее уравнение системы (8), имеем:

$$5\gamma' = (c_3 - c)e^{\mu + \nu + 2\gamma}$$

С помощью этих выражений получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\mu' + \nu' = \frac{c_3 + 4c}{c_3 - c}\gamma'; \\ &\gamma' = \frac{c_3 - c}{5} e^{\frac{2c + 3c_3}{c_3 - c}\gamma}, \end{aligned} \qquad (9)$$

откуда

$$e^{-\gamma(-\frac{2c+3c_3}{c_3-c})} = -\frac{2c+3c_3}{c_3-c}x. \tag{10}$$

Тогда уравнение первого порядка системы (8) примет вид:

$$-\mu'^2 + \frac{c_3+4c}{c_3-c}\gamma'\mu' + \frac{9c+c_3}{c_3-c}\gamma'^2 + 4\omega_0^2\frac{5}{c_3-c}\gamma' e^{2\mu+2\gamma} = 0 \tag{11}$$

Для получения условий на константы интегрирования c, c_3, ω_0 с помощью оставшегося уравнения второго порядка системы (8), используя выведенные выше интегралы движения, получим еще одно уравнение первого порядка для коэффициентов γ, μ :

$$-\mu'^2 + \frac{(c_3+4c)^2}{20(c_3-c)}\gamma' e^{\frac{2c+3c_3}{c_3-c}\gamma} - \frac{(c_3+4c)^2}{4(c_3-c)^2}\gamma'^2 + \frac{20\omega_0(c_3+4c)}{2(2c+3c_3)(c_3-c)}\gamma' e^{2\mu+2\gamma} +$$
$$+\frac{9c+c_3}{5}\gamma' e^{\frac{2c+3c_3}{c_3-c}\gamma} + \frac{4\omega_0^2}{2(c_3-c)}e^{\frac{2c+3c_3}{c_3-c}\gamma}e^{2\mu+2\gamma} + \frac{20\omega_0^2}{2c+3c_3}\gamma' e^{2\mu+2\gamma} = 0,$$

которое должно быть эквивалентно уравнению (11) для них. Этого можно добиться при условии:

$$c_3 + 4c = 0. \tag{12}$$

В таком случае оба уравнения совпадут и запишутся в виде:

$$-\mu'^2 \frac{9c+c_3}{c_3-c}\gamma'^2 + \frac{20\omega_0^2}{c_3-c}\gamma' e^{2\mu+\gamma} = 0 \tag{13}$$

Поскольку γ' и e^{γ} уже известны (формулы (9)), это уравнение, учитывая соотношение между c_3 и c, окончательно примет вид:

$$\begin{gathered}\mu'^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2x^2}e^{2\mu} = -\frac{1}{4x^2},\\ \textit{при этом из } (10)\ e^{2\gamma} = \frac{1}{2cx};\\ 0 < x < \infty.\end{gathered} \tag{14}$$

Решая уравнение, получим:

$$e^{\mu} = \frac{c}{2\omega_0\cos(\ln(c_4\sqrt{x}))}. \tag{15}$$

Здесь $\cos(\ln(c_4\sqrt{x}))$ должен быть положительным, чтобы не менялась сигнатура, поэтому аргумент этого косинуса лежит в границах: $-\frac{\pi}{2} < \ln(c_4\sqrt{x}) < \frac{\pi}{2}$. На данном интервале e^{μ} нигде в нуль не обращается, а на его концах $e^{\mu} \to \infty$, то есть получаем решение, описывающее геометрию пространства-времени «кротовой норы». При этом радиус ее горловины r_0 будет равен $r_0 = \dfrac{c}{2\omega_0}$.

Полное решение исследуемой задачи, учитывая все полученное ранее, предстанет в следующем виде:

$$\begin{aligned} &e^{\mu} = \frac{c}{2\omega_0 \cos(\ln(c_4\sqrt{x}))}; \quad e^{\gamma} = e^{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2cx}}; \\ &e^{\nu} = \frac{2\omega_0 \cos(\ln(c_4\sqrt{x}))}{c}; \quad e^{\lambda} = \frac{1}{2cx}; \\ &\frac{e^{-\pi}}{c_4^2} < x < \frac{e^{\pi}}{c_4^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

В данном решении отсутствует плоская асимптотика.

Таким образом, получается, что вихревое гравитационное поле в пятимерном пространстве-времени может образовывать «кротовые норы» так же, как и в четырехмерном [1].

Библиографический список

1. Кречет, В. Г. Топологические и физические эффекты вращения и спина в общерелятивистской теории гравитации [Текст] / В. Г. Кречет // Известия вузов. Физика. – 2007. – №10.