УДК 514

М. Е. Колоскова

О курсе геометрии в школе имени А. Н. Колмогорова

В настоящей статье описываются основные аспекты построения курса геометрии в 10-х и 11-х физико-математических классах школы им. А. Н. Колмогорова. В статье рассмотрены главные отличительные особенности структуры и содержания курса, а также системы обучения геометрии.

Ключевые слова: коллоквиум, математический практикум, научное исследование, программа, система обучения геометрии, школа им. А. Н. Колмогорова.

M. E.Koloskova

About Geometry Course at the School named after A. N. Kolmogorov

This paper deals with the basic principles of the structure of Geometry course for the students of the 10-th and 11-th grades applied in physical-mathematical classes of Kolmogorov's school. The main distinctive features of the course structure and contents, and the whole educational process in Geometry, are presented in the article.

Keywords: a colloquium, a mathematical practical training session, a scientific research, a programme (curriculum), an educational process in Geometry, the school named after A. N. Kolmogorov.

Школа имени А. Н. Колмогорова при МГУ им. М. В. Ломоносова была открыта 2 декабря 1963 года, и задумывалась она, прежде всего, как *школа научного творчества* для молодежи [7]. Набор в нее проводится на конкурсной основе и, тем самым, в этой школе обучают ребят, которые уже проявили стойкий интерес к углубленному изучению той или иной дисциплины. В настоящее время в школе организованы только десятые и одиннадцатые классы, при этом имеется как двухгодичный, так и одногодичный циклы обучения.

Обучение в школе ведется по четырем основным специализациям: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая и биологическая. Система обучения является лекционно-семинарской и приближена к вузовской.

В настоящей статье мы опишем основные особенности построения курса геометрии в 10-х и 11-х классах двухгодичного физико-математического потока школы им. А. Н. Колмогорова. Этому курсу в учебном плане посвящено три часа в неделю, один из которых отводится на лекцию.

Сложившаяся система геометрического образования включает: лекции, семинарские занятия, зачеты и экзамены, коллоквиумы, практикумы, факультативные курсы, исследовательские работы школьников. Выстраивание этой системы и формирование содержания курса геометрии начиналось под руководством Андрея Николаевича Колмогорова, основателя школы, считавшего, что полноценное специализированное образование школьников невозможно без понимания основных принципов построения научных теорий, и, как следствие этого, содержание его геометрических курсов в школе отличали научность, систематичность и логическая строгость. Такие курсы он читал в разные годы в ФМШ при МГУ (так называлась школа в момент ее создания). Его курс в 1970–72 годы заметно выделялся среди других тем, что в нем строго и последовательно изучались аксиоматики аффинной и проективной плоскостей и пространства и те следствия, которые из них можно получить (вплоть до возможности определения структуры векторного пространства). Стоит напомнить, что в конце 60-х годов А. Н. Колмогоров вместе с единомышленниками начал работу над созданием геометрического курса для массовой школы в рамках начавшейся тогда реформы всего школьного математического образования. Созданный им учебник по геометрии (совместно с А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым) выдержал четыре издания в 1979–1982 гг. и, несомненно, основывался на том опыте преподавания геометрии, который был накоплен А. Н. Колмогоровым и его коллегами в ФМШ при МГУ.

Нужно иметь в виду, что в 10-м классе школы им. А. Н. Колмогорова собираются учащиеся из разных школ, поэтому уровень знаний, умений и навыков учеников различен. Это обстоятельство требует по меньшей мере наличия в наших учебных программах материалов повторительного характера по планиметрии.

Сложившаяся сейчас структура курса геометрии в двухгодичном потоке нашей школы отлична от принятой в старших классах других средних общеобразовательных и специализированных школ. Главное отличие состоит в том, что в курсе геометрии десятого класса учащиеся не только повторяют, но и продолжают изучать планиметрию (иногда этот курс планиметрии заканчивается в конце третьей четверти). При этом данный курс охватывает все наиболее важные темы, входящие в официальную программу курсов геометрии в 7–9-х классах общеобразовательных и специализированных школ [9]. Кроме того, программа включает в себя дополнительные главы, нацеленные на качественно иной уровень геометрических знаний и представлений. Эти главы не являются фиксированными и могут меняться в зависимости от предпочтений лектора и уровня подготовки учеников. Основная цель – расширение математического кругозора, раскрытие творческого потенциала учащихся и приобретение ими навыков ведения научно-исследовательской работы.

Приведем тематику лекций [1], которые в разные годы читались в школе. Их выбор (или добавление новых) на конкретный учебный год осуществляется каждый раз заново при формировании тематических планов курса.

Планиметрия: Логические основы геометрии. Теоремы Пифагора, Евклида и Паппа. Теоремы Эйлера о замечательных точках треугольника. Лемма Архимеда и формула Герона. Длина окружности и приближенные формулы Архимеда и Гюйгенса. Задача Дидоны (основное изопериметрическое неравенство). Преобразования плоскости и их классификация. Инверсия и задача Аполлония о касающихся окружностях. Принцип математической индукции; неравенство Успенского. Триангуляции многоугольника и комбинаторная формула Эйлера. Теорема Бояйи – Гервина о равносоставленности многоугольников. Правильные многоугольники на решетках. Формула Пика. Плоские мозаики на плоскости. Геометрические свойства параболы, эллипса и гиперболы. Треугольник Архимеда и площадь параболического сегмента. Геометрия масс. Момент инерции и формулы Лагранжа и Якоби. Проективные теоремы Паппа и Брианшона.

Стереометрия: Взаимное расположение прямых и плоскостей. Теорема Дезарга. Две проекции. Изображения пространственных фигур. Сечения многогранников. Замечательные точки тетраэдра. Прямая и сферы Эйлера для тетраэдра. Признаки равенства трехгранных углов. Теоремы синусов и косинусов для трехгранных углов. Площадь сферического треугольника. Объем тетраэдра и 3-я проблема Гильберта. Сферы и тетраэдр. Принцип Кавальери и теорема Архимеда об объемах шара и цилиндра. Преобразования пространства. Формула Эйлера и правильные многогранники. Мозаики на сфере.

Заметим, что не все читаемые лекции находят свое подкрепление на семинарских занятиях (однако таких не очень много); некоторые из них направлены на расширение кругозора и математической культуры, прививают интерес к математическим исследованиям. Поурочные планы семинарских занятий содержат перечни задач, которые разрабатываются преподавателями, но не являются фиксированными, а постоянно обновляются год от года в зависимости от уровня подготовки учеников и корректировки учебных программ. В эти списки включены задачи вычислительного и теоретического характера, доказательства некоторых важных теорем, задачи для самостоятельных исследований. Примерами некоторых тем семинарских занятий могут служить следующие (подчеркнем, что здесь мы приводим названия тем, а не классных занятий; изучение одной темы может быть разнесено довольно значительно по времени и даже по годам обучения): построения циркулем и линейкой (основные методы). Правильные многоугольники и их построения при помощи циркуля и линейки (точные и приближенные методы). Построение одной линейкой и задачи Штейнера. Построение одним циркулем. Задачи на клетчатой бумаге. Пропорциональные отрезки в треугольнике и четырехугольнике. Площадь многоугольника; теоремы Вариньона и Евклида. Площадь круга и его частей. Пропорциональные отрезки в круге. Радикальная ось двух окружностей; теорема о бабочке. Преобразования плоскости и их классификация. Скалярное и векторное произведение векторов. Метод координат на плоскости и в пространстве. Применение векторов при решении задач. Инверсия и инверсоры. Задача Аполлония. Теорема о трех центрах подобия. Применение комплексных чисел в геометрии. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Скрещивающиеся прямые и расстояние между ними. Проекции многоугольников и окружностей. Замечательные точки и линии тетраэдра. Объем многогранника. Объем шара и его частей. Конические сечения и др.

Контрольные работы, зачеты и экзамены проходят в соответствии с учебными планами. Экзаменационные программы содержат не только тот материал, который излагался на лекциях, но и многое из того, что изучалось на семинарских занятиях или было включено в коллоквиумы.

В процесс обучения в школе входит проведение тематических коллоквиумов, которые носят не только контролирующий, но и обучающий характер. Эта обучающая составляющая довольно значительна [2, 3, 5]. Задачные материалы коллоквиумов выдаются ученикам заранее, и на подготовку к коллоквиуму отводится 10–14 дней; при этом взаимные консультации учеников не запрещаются. Каждый ученик обязан записать решения задач с полной аргументацией и аккуратно выполненными рисунками. Сдача коллоквиума проходит в форме беседы с каждым учеником по решенным задачам. Как правило, мы организуем 1–2 коллоквиума в семестр. В качестве примеров тем геометрических коллоквиумов отметим такие, как: «Задачи на построение (при помощи различных наборов инструментов)», «Основные математические принципы и методы (индукция, принцип Дирихле, принцип включения-исключения)» [6, 8], «Геометрия тетраэдра (ортоцентрические, полуправильные и каркасные тетраэдры)».

Одной из отличительных особенностей школы имени А. Н. Колмогорова является наличие так называемого математического практикума, состоящего из отдельных заданий, когда от ученика (или группы учеников) требуется изготовить модель, составить таблицу, построить графики, провести вычисления и пр. [3]. Задания индивидуализированы и выполняются вне рамок основного учебного времени.

В течение первых тридцати лет работы школы в учебном плане (и в расписании занятий) присутствовала специальная дисциплина, которая так и называлась «Математический практикум». Инициатором введения такой специальной дисциплины и составителем многих заданий матпрактикума был А. Н. Колмогоров. В дальнейшем этот матпрактикум естественным образом превратился в вычислительный практикум, где многие из старых заданий получили дальнейшее развитие в связи с широкими возможностями применения современных технологий. В настоящее время в рамках различных математических дисциплин мы предлагаем ученикам задания практикума. Так, например, в результате выполнения практикумов «Оригами» и «Модели многогранников» школьники не только знакомятся с геометрией «квадратного листа бумаги» и основами теории многогранников, но и создают коллекции елочных игрушек (которые ежегодно используются по назначению) и бумажных моделей многогранников. Задание практикума «Инверсия» предполагает, что ученик сам создает фигуру, состоящую из отрезков дуг окружностей, а затем при помощи циркуля и линейки строит ее инверсный образ относительно выбранной окружности (основные построения выполняются только одним циркулем). При выполнении практикума «Орнаменты на плоскости» каждый ученик должен создать свой собственный орнамент, но с заданной группой самосовмещений. Практикум «Две проекции» предлагает изготовить центральную проекцию одного из правильных паркетов на плоскости или изучить центральные проекции пучков окружностей.

Программа обучения по геометрии позволяет, не выходя далеко за ее рамки, предложить ученикам темы для проведения самостоятельных исследований (конечно, под руководством учителя) и подготовки докладов для участия в научных конференциях школьников [4]. В геометрии такие задачи наглядны, доступны по исходным формулировкам и, как правило, не требуют от школьников больших усилий по изучению учебной и научной литературы. Конечно, при подборе задач творческого характера многое зависит от уровня образования преподавателя и его личного опыта проведения научных исследований, а также от его временных возможностей и желания руководить научно-исследовательскими работами учеников, требующими больших трудозатрат. В том случае, когда задачи творческого характера возникают прямо на семинарских занятиях (или тесно примыкают к их тематике), интерес школьников к ним заметно выше. Поэтому постановкам задач исследовательского характера на семинарских занятиях мы отводим часть учебного времени (когда это возможно и уместно). Как правило, сами эти задачи создаются учителями и продумываются ими в домашней стадии подготовки к урокам. Иногда такие задачи возникают спонтанно прямо на уроках после обсуждений уже решенной задачи или с попытками ее обобщений.

Так, при обсуждении основных признаков равенства треугольников возник вопрос о существовании других признаков. Частичный ответ на него был получен прямо на занятиях. Достаточно полный ответ на этот вопрос привел к ряду интересных и красивых теорем (и построений при помощи циркуля и линейки); в частности, появились признаки равенства треугольников по трем медианам, по трем высотам, по трем биссектрисам и др.

При изучении темы «Замечательные точки треугольника» учащимся была предложена следующая задача на построение (восходящая к Эйлеру): на плоскости заданы три различные точки O, H и A. При помощи циркуля и линейки построить треугольник ABC, для которого O является центром описанной окружности, а H – ортоцентром. Вопрос о том, где можно выбрать вершину A (при заданных O и H), привел к широким научным исследованиям (и не только в плоскости), к постановке новых (обратных) задач подобного типа из геометрии треугольника, которые еще предстоит решить.

Тема «Пропорциональные отрезки в треугольнике и четырехугольнике» для изучения на уроках была спланирована так, что привела к постановке творческой задачи, получившей название «Косоугольная клетчатая доска». В этой задаче две противоположные стороны данного выпуклого четырехугольника разделены на n равных частей, а две другие его стороны разделены на m равных частей. Точки деления противоположных сторон соединены так, чтобы получилась «клетчатая доска», состоящая из mn четырехугольных «клеток». Требуется выяснить: 1) Где могут находиться «клетки» с наибольшими и наименьшими площадями? и 2) Какое минимальное число площадей «клеток» нужно задать, чтобы найти площади всех остальных «клеток»? В дальнейшем эта тема получила развитие в стереометрии и была рассмотрена (с видоизменениями) для тетраэдров и призм.

В курсе планиметрии на семинарских занятиях часто предлагаются задачи на построение. Задача о построении отрезка, длина которого в n раз больше заданного отрезка привела к задачам сравнения «сложностей» алгоритмов построений при трех разных наборах инструментов: циркуля и линейки, только циркуля, только линейки. Одна из задач подобного типа предлагалась в задачнике журнала «Квант».

Теорема о том, что любой простой многоугольник на плоскости имеет внутреннюю диагональ, привела к исследовательскому проекту «Триангуляции многоугольников», который включал в себя широкие исследования в основном комбинаторного характера. В частности, изучение вопроса о том, какие многоугольники (и сколько?) могут получиться, если провести все внутренние диагонали многоугольника. Эта тема исследований в дальнейшем получила продолжение при изучении вопроса о наличии внутренней диагонали у многогранников; здесь были построены модели многогранников (и их разверток), у которых нет ни одной внутренней диагонали, а также доказана теорема о том, что при любом $n \geq 4$ существует многогранник с n вершинами, не имеющий внутренних диагоналей. Более серьезное продолжение эта тема получила в работе ученицы, которая показала, что комбинаторная лемма Шпернера (о раскраске всех вершин триангуляции треугольника) эквивалентна чисто топологической теореме Брауэра о неподвижной точке.

При анализе системы аксиом аффинной группы на лекциях и семинарских занятиях были рассмотрены некоторые модели аффинных и проективных плоскостей и пространства, содержащих лишь конечное число точек. Это довольно широкое поле для исследований вызывало и продолжает вызывать неподдельный интерес у многих школьников: здесь рассматривались вопросы существования таких плоскостей и пространств (вплоть до теоремы о пополнении любой аффинной плоскости или пространства до проективных) и комбинаторные вопросы (число прямых, число пучков параллельных прямых и др.). Некоторые из учеников в рамках этой темы занимались построениями полных наборов так называемых латинских ортогональных квадратов данного размера.

Довольно богаты на задачи исследовательского типа темы «Многоугольники и окружности на решетках» и «Плоские мозаики». Решеткой на плоскости называются вершины всех параллелограммов, получающихся при разбиении плоскости на равные параллелограммы (например, «клетчатая бумага»). Мозаика – это разбиение плоскости на правильные многоугольники с однотипным строением вокруг каждой вершины любого многоугольника. Выше был описан круг вопросов, который входит в обязательную программу обучения по указанным темам; отметим, что первоначально задачи, связанные с разбиениями плоскости на правильные многоугольники рассматривались А. Н. Колмогоровым на занятиях математического кружка. В рамках этих двух тем нами предлагались не только конкретные задачи, но и целые направления исследований: какие полуправильные многоугольники можно расположить на решетках (мозаиках) так, чтобы их вершины находились в узлах решетки (мозаики)? Существует ли при любом заданном n окружность, которая содержит ровно n узлов мозаики? Сколько различных изображений имеет круг данного радиуса на экране монитора?

Сложившаяся целостная система преподавания геометрии в школе имени А. Н. Колмогорова эффективно решает поставленные задачи обучения и способствует развитию творческих способностей учеников.

Библиографический список

1. Вавилов, В. В. Геометрия-10 (тезисы лекций) [Текст] / В. В. Вавилов. – М. : СУНЦ МГУ, 2008. – 38 с.
2. Вавилов, В. В. Математические коллоквиумы [Текст]. В 2 частях / В. В. Вавилов, П. М. Красников. – М. : Школа им. А. Н. Колмогорова, 2006.
3. Вавилов, В. В. Математический практикум в школе им. А. Н. Колмогорова МГУ им. М. В. Ломоносова [Текст] / В. В. Вавилов // Вторые научные Колмогоровские чтения : сборник трудов конференции. – Ярославль, 2004. – С. 251
4. Вавилов, В. В. О математических исследованиях учащихся школы им. А. Н. Колмогорова [Текст] / В. В. Вавилов // Четвертые Колмогоровские чтения : сборник научных трудов. – Ярославль, 2006. – С. 46–58.
5. Вавилов, В. В. Основные математические принципы и методы [Текст] / В. В. Вавилов, М. Е. Колоскова. – М. : СУНЦ МГУ, 2009. – 51 с.
6. Вавилов, В. В. Принцип включения-исключения [Текст] / В. В. Вавилов, М. Е. Колоскова // Потенциал. – 2008. – №2. – С. 57–65.
7. Вавилов, В. В. Школа математического творчества [Текст] / В. В. Вавилов. – М. : РОХОС, 2004. – 72 с.
8. Колоскова, М. Е. Основные математические принципы в курсе математики школы им. А. Н. Колмогорова [Текст] / М. Е. Колоскова // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – №2. – С. 126–132.
9. Министерство образования Российской Федерации. Среднее (полное) общее образование. Программа [Текст] / Министерство образования Российской Федерации. – М. : Институт новых образовательных систем, 2004. – С. 72–92.