МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 517.982.2

Н. В. Ибадов

Об одном обобщении теоремы Бореля

В работе доказано, что оператор свертки M_F сюръективно действует из $C^\infty(K)$ – пространства бесконечно дифференцируемых функций на всем пространстве s, где s – пространство всевозможных числовых последовательностей. В целом новым методом обобщена теорема Бореля.

Ключевые слова: свертка, оператор, сюръективность, банаховы пространства, дифференцируемая функция, норма, предел, фундаментальная последовательность, индуктивный лимит, проективный лимит, теорема Бореля.

N. V. Ibadov

About one Generalization of Borel Theorem

In this paper, it is proved that the convolution operator M_F surjectively operates from $C^\infty(K)$, which is a space of infinitely differentiable functions in the entire space s, where s is a space of various number of sequences. By and large, the paper deals with a new method of extension of Borel theorem.

Keywords: convolution, an operator, surjectivity, banach spaces, a differentiated function, norm, limit, fundamental sequence, an inductive limit, a projective limit, Borel theorem.

Введение

В результате работы [2] возник вопрос: можно ли обобщить теорему Бореля (см. [6, с. 34], теорема 1.5.4.) новым методом так, что для любого задания постоянных c_α, зависящих от всевозможных наборов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ неотрицательных целых чисел, существует бесконечно дифференцируемая во всем пространстве функция f, которая имеет c_α своими тейлоровскими коэффициентами в какой-либо точке (или иначе, тем, что отображение из $C^\infty(\mathrm{P}^n)$ в кольце формальных степенных рядов сюръективно)?

Настоящая работа отвечает на этот вопрос положительно.

Пространство целых функций P_K

Пусть $K = [-a, a] \in \mathrm{P}$, где P – множество вещественных чисел, $\mathrm{X}-$ комплексная плоскость, $H(\mathrm{X})-$ пространство целых функций над полем X.

Через

$$P_K^n = \{f(z) : f(z) \in H(\mathrm{C})\} \tag{1}$$

обозначим нормированное пространство функций $f(z) \in H(\mathrm{X})$ с нормой

$$\| f \|_n = \sup_{z \in \mathrm{X}} \frac{|f(z)|}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} < \infty \quad , \tag{2}$$

то есть рассмотрим нормированное пространство

$$P_K^n = \{f(z) : f(z) \in H(\mathrm{X}), \| f \|_n = \sup_{z \in \mathrm{X}} \frac{|f(z)|}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} < \infty\}, \tag{3}$$

где опорная функция $K :_K (\varphi) -$ отрезка $K = [-a, a]$ равна a, то есть $K :_{[-a,a]} = a, \quad n = 1,2,...$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пространства* $P_K^n -$ *банаховы.*

Доказательство. При доказательстве этой леммы по определению банаховых пространств необходимо показать, что

1) число

$$\| f \|_n = \sup_{z \in X} \frac{| f(z) |}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} < \infty$$

есть норма на P_K^n.

Действительно, из определения $\| f \|_n$ имеем

$$a) \quad \| f \|_n = 0 \leftrightarrow f(z) = 0.$$

$$b) \quad \| f + g \|_n = \sup_{z \in X} \frac{| f(z) + g(z) |}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} \le \sup_{z \in X} \frac{| f(z) |}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} +$$

$$\sup_{z \in X} \frac{| g(z) |}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} = \| f \|_n + \| g \|_n .$$

$$c) \quad \| \alpha f \|_n = \sup_{z \in X} \frac{| \alpha f(z) |}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} + | \alpha \| f \|_n, \quad \alpha \in X.$$

Итак, $P_K^n -$ нормированное пространство.

2) P_K^n – полное пространство, то есть каждая фундаментальная последовательность в P_K^n сходится к элементу этого же пространства.

Докажем, что $P_K^n -$ полно. Это равносильно тому, что в $P_K^n -$ каждая фундаментальная последовательность функций $f_m(z)$ сходится к элементу этого же пространства. Возьмем фундаментальную последовательность функций $\{f_m(z)\}$ из P_K^n, где n фиксировано. Для этой последовательности имеем

$$\| f_{m'} - f_{m''} \|_n = \sup_{z \in X} \frac{| f_{m'}(z) - f_{m''}(z) |}{e^{a|Imz| + n\ln(|z|+1)}} \to 0,$$

когда $m', m'' \to \infty$.

Рассмотрим множество целых функций

$$P_K = \{ f(z) : f(z) \in H(X), | f(z) | \le C^1(f) e^{a|Imz| + C^2(f)\ln(|z|+1)} \}. \tag{4}$$

Множество P_K^n является множеством преобразования Лапласа с носителем, лежащим в компакте K.

Рассмотрим последовательность пространств в виде (3)

$$P_K^1, P_K^2, ..., P_K^n, ... \quad (5)$$

Для последовательности (5) справедливы непрерывные включения

$$P_K^1 \subset P_K^2 \subset ... \subset P_K^n \subset ...(6)$$

Тогда множество P_K совпадает с объединением пространств P_K^n, то есть

$$P_K = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_K^n .$$

И в этом объединении можно определить топологию индуктивного предела, то есть

$$P_K = \lim_{n \mapsto \infty} ind P_K^n.$$

Пространство бесконечных дифференцируемых функций $C^\infty(\Omega_m)$

Введем систему открытых множеств Ω_m. Пусть Ω_m есть интервал в Р , содержащий K в себе. Например, допустим, что

$$\Omega_m = (-a - \frac{1}{m}, \quad a + \frac{1}{m}).$$

Системы открытых множеств Ω_m содержат следующие условия:

1) $K \subset \Omega_m$, справедливо для любого положительного числа m.

2) $\Omega_m \supset \Omega_{m+1}$,

$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m = K.$

Рассмотрим пространство $C^\infty(\Omega_m)$ как пространство бесконечно дифференцируемых функций на Ω_m.

Для последовательности открытых множеств

$$\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n, ...$$

справедливо включение

$$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset ... \supset \Omega_n \supset ...$$

Тогда для последовательности пространств

$$C^\infty(\Omega_1), C^\infty(\Omega_2), ..., C^\infty(\Omega_m), ...$$

справедливо включение

$$C^\infty(\Omega_1) \subset C^\infty(\Omega_2) \subset ... \subset C^\infty(\Omega_m) \subset ...$$

Объединение пространства $C^\infty(\Omega_m)$ совпадает с $C^\infty(K)$ – пространством бесконечно дифференцируемых функций на K, то есть

$$C^\infty(K) = \bigcup_{m=1}^{\infty} C^\infty(\Omega_m).$$

В этом объединении рассмотрим топологию индуктивного предела

$$C^\infty(K) = \lim_{n \to \infty} ind\, C^\infty(\Omega_m).$$

Через $[C^\infty(\Omega_m)]^*$ обозначим сопряженное к $C^\infty(\Omega_m)$ пространство, в котором введена сильная топология, а через $[C^\infty(K)]^*$ обозначим сопряженное к $C^\infty(K)$ пространство.

Последовательность пространств

$$[C^\infty(\Omega_1)]^*, [C^\infty(\Omega_2)]^*, ..., [C^\infty(\Omega_m)]^*, ...$$

имеет включение

$$[C^\infty(\Omega_1)]^* \supset [C^\infty(\Omega_2)]^* \supset ... \supset [C^\infty(\Omega_m)]^* \supset ...$$

Поэтому $[C^\infty(K)]^*$ совпадает с пересечением

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [C^\infty(\Omega_m)]^*.$$

В этом пересечении можно рассмотреть топологию проективного предела, то есть

$$[C^\infty(K)]^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} [C^\infty(\Omega_m)]^*,$$

$$[C^{\infty}(K)]^{*} = \lim_{n\to\infty} pr[C^{\infty}(\Omega_m)]^{*}.$$

Лемма 2. $[C^{\infty}(\Omega_m)]^{*}$ *совпадает с множеством обобщенных функций конечного порядка, носитель которых содержится в* K.

Доказательство. Пусть $F \in [C^{\infty}(\Omega_m)]^{*}$. В силу равенства

$$[C^{\infty}(K)]^{*} = \bigcap_{m=1}^{\infty} [C^{\infty}(\Omega_m)]^{*}$$

функционал F принадлежит каждому $[C^{\infty}(\Omega_m)]^{*}$. И поэтому $suppF \in \Omega_m$ и $suppF$ компактно принадлежит $\bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_m$. Значит, $suppF$ компактно принадлежит множеству K. Лемма доказана.

Рассмотрим преобразование Лапласа функционалов $F \in [C^{\infty}(K)]^{*}$, то есть $\tilde{F}(\lambda) = (F, e^{\lambda z})$.

Лемма 3. *Преобразование Лапласа функционалов из* $[C^{\infty}(K)]^{*}$ *совпадает с функцией из множества* P_K.

Доказательство леммы вытекает из теоремы Пэли – Винера – Щварца (см. [6, с. 112]).

Лемма 4. P_K *является пространством типа* (LN^{*}).

Обоснование леммы 4 осуществляется по схеме доказательства леммы 4 в работе [3], где (LN^{*}) – пространство, представимое в виде внутренного индуктивного предела последовательности нормированных пространств $P_K^n, n = 1,2,...$, каждое из которых вложено в последующее вполне непрерывно.

Лемма 5. $C^{\infty}(K)$ *есть пространство типа* (LN^{*}).

Рассмотрим произвольную обобщенную функцию F, носитель в которой совпадает в K. Преобразование Лапласа функционала F принадлежит P_K, то есть $\tilde{F}(\lambda) \in P_K$.

Предположим, что $\tilde{F}(\lambda)$ удовлетворяет условию делимости, то есть если отношение $\frac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)} \in H(\mathrm{X})$, то $\frac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)} \in P_K$, где $\psi(\lambda) \in P_K$

Замечание. Если $\tilde{F}(\lambda)$ – условие делимости, то в нашем случае отношение $\frac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)}$, по теореме «О сложении носителей обобщенных функций», является преобразованием Лапласа и производной некоторых функций конечного порядка.

В работе [3] для ограниченной выпуклой области $D \subset \mathrm{X}$ определено пространство

$$Q_n = \left\{ f(z) \in H(D) : \| f \|_n = \sup_{z\in D} \left\{ | f(z) | \exp\left[-B_n \frac{1}{(d(z))^p} \right] \right\} < \infty \right\},$$

$$B_n \downarrow 0, \quad n = 1,2,... \quad .$$

и показано, что $H(p, D)$, $p > 0$, – пространство функций аналитических в $D \subset \mathrm{X}$, имеющих определенный рост вблизи границы (см. [3]), – есть проективный предел последовательности пространств Q_n ,то есть $H(p,D) = \lim_{n\to\infty} PrQ_n$. Далее для конечных систем неоднородных уравнений свертки доказано, что каждая функция $\varphi \in E_{[q,0]}$ ($E_{q,0}$ – пространство целых функций порядка q и нулевого типа.) в силу теоремы 1.2 из работы [3] порождает некоторый функционал $\mu \in H^*(p,D)$. Если $\varphi \in E_{[q,0]}$, тогда она определяет некоторый оператор свертки

$$M_\varphi : H(p,D) \to H(p,D),$$

где $H^*(p,D)$ – сопряженные пространства к пространствам $H(p,D)$, $p > 0$, и в [3] дано описание пространства $H^*(p,D)$ в терминах преобразования Лапласа.

Если μ – это функционал, принадлежащий $H^*(p,D)$ как преобразованию Лапласа, которое совпадает с φ, то есть $\hat{\mu}(\lambda) = \varphi(\lambda)$, тогда оператор M_φ имеет вид

$$M_\varphi[f] = M_\varphi * f = \int f(z+t)d\mu.$$

Определение оператора свертки в пространстве $C^\infty(K)$

Пусть $s = \{(a_0, a_1, ..., a_n, ...)\}$ – совокупность всех числовых последовательностей. Топологию в пространстве s можно вести с помощью счетных систем полунорм (см. [2]):

$$\| a \|_n = \sup\{| a_0 |, | a_1 |, ..., | a_n |, \quad n = 1,2,...\} \quad .$$

Функционал F порождает некоторый оператор M_F, действующий из $C^\infty(K)$ в пространстве s. По правилу, если $f(x) \in C^\infty(K)$, то

$$M_F[f] = \{(F, f^{(k)}(x))\}_{k=0}^\infty \in s.$$

Лемма 6. *Оператор M_F линейно и непрерывно действует из пространства $C^\infty(K)$ в s, то есть*

$$M_F : C^\infty(K) \to s.$$

Возникает вопрос о сюръективности оператора M_F, то есть действует ли оператор M_F из пространства $C^\infty(K)$ на все пространства s.

Рассмотрим сопряженное отображение $M_F{}^*$ к отображению M_F, действующее по правилам:

$$M_F^* : s^* \to [C^\infty(K)]^*,$$

где s^* – сопряженное пространство к пространству s.

Лемма 7. *Операция умножения на фиксированный многочлен $P(\lambda)$ непрерывно действует из пространства P_K в P_K.*

Пусть $P(\lambda)$ – многочлен, $\hat{F}(\lambda)$ – характеристическая функция функционала $F \in [C^\infty(K)]^*$.

Рассмотрим оператор свертки

$$\left(F * P : \left(\frac{d}{dz}\right)\right) f(z) = \left(F, P : \frac{d}{dz}[f(z)]\right).$$

Если вместе с функцией $f(z)$ возьмем функцию $e^{\lambda z}$, то получим,

$$\left(F * P : \left(\frac{d}{dz}\right)\right) e^{\lambda z} = \left(F, P : \left(\frac{d}{dz}\right)[e^{\lambda z}]\right) = P : (\lambda) \hat{F}(\lambda).$$

Используя представление $(F, f^{(k)}(z)), k = 1,2,...$, получим следующее равенство:

$$\left(F * P : \left(\frac{d}{dz}\right), f^{(k)}(z)\right) = \left(F, P : \left(\frac{d}{dz}\right)[f^{(k)}(z)]\right) =$$

$$\sum_{p=0}^{m_0} b_p \left(F, \frac{d^n}{dz^n} f^{(k)}(z) \right) = \sum_{p=0}^{m_0} b_p (F, f^{(k+p)}(z)) = \sum_{p=0}^{m_0} b_p a_{k+p}, \quad k = 1,2,... \quad ,(7)$$

где

$$P : \left(\frac{d}{dz} \right) = b_0 + b_1 \frac{d}{dz} + b_2 \frac{d^2}{dz^2} + \dots + b_{m_0} \frac{d^{m_0}}{dz^{m_0}}.$$

В работе [2] в лемме 5 доказано, что множество всех преобразований Лапласа $\tilde{s}^*$ совпадает с множеством многочленов, то есть $\tilde{s}^* = \{P(\lambda)\}$, где $P(\lambda) -$ многочлен.

Тогда преобразование Лапласа функционала M_F^* действует по правилам

$$\tilde{M}_F^* : \{P(\lambda)\} \to \{\tilde{M}_F^* P(\lambda)\}.$$

Теорема 1. *Образ оператора* $\tilde{M}_F^*$ *замкнут, то есть*

$$Im\,\tilde{M}_F^* = \overline{Im\,\tilde{M}_F^*}.$$

Доказательство. По теореме Дьедонне – Шварца, образ оператора M_F будет замкнутым тогда и только тогда, когда образ оператора $\tilde{M}_F^*$ будет замкнутым в пространстве P_K.

Найдем образ $Im\,\tilde{M}_F^*$. Оператор $M_F^* -$ это оператор умножения на многочлен функции $\tilde{F}(\lambda)$, то есть

$$Im\,\tilde{M}_F^* = \{P : (\lambda)\,\tilde{F}(\lambda)\},$$

где $P(\lambda) -$ многочлен.

Покажем, что это множество замкнуто в топологии $P(K)$, то есть

$$\{P(\lambda)\,\tilde{F}(\lambda)\} = \overline{\{P(\lambda)\,\tilde{F}(\lambda)\}}.$$

Возьмем предельную функцию $\psi(\lambda) \in P_K$ множества $\{P(\lambda)\,\tilde{F}(\lambda)\}$. Это означает, что

$$\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} P_n(\lambda)\,\tilde{F}(\lambda).$$

Из этого отношения вытекает, что нулевая функция $\psi(\lambda)$ содержит в себе нулевое множество $\tilde{F}(\lambda)$. Более того, класс целых функций с вышеуказанными нулями не пустой. Кратность нулей $\psi(\lambda)$ не ниже кратности соответствующих нулей $\tilde{F}(\lambda)$. Поэтому функция $\psi(\lambda)$ делится на функцию $\tilde{F}(\lambda)$, то есть $\dfrac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)} -$ целая функция.

Оценим это отношение:

Пусть

$$K := \bigcup_{j=1}^{\infty} K:_j,$$

$|\lambda| > C_1 -$ некоторое достаточно большое число. Так как $\psi(\lambda) \in P_K$, то

$$|\psi(\lambda)| \le C_1(f) e^{a|Im\lambda| + C_2(f) ln(|\lambda|+1)}.$$

Для $\lambda \notin K:$ мы имеем

$$|\tilde{F}(\lambda)| \ge C_3(f) e^{a|Im\lambda| + C_4(f) ln(|\lambda|+1)}.$$

Тогда получим, что

$$\left|\frac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)}\right| \le \frac{C_1(f) e^{a|Im\lambda| + C_2(f) ln(|\lambda|+1)}}{C_3(f) e^{a|Im\lambda| + C_4(f) ln(|\lambda|+1)}} =$$

$$\frac{C_1(f)}{C_3(f)} \frac{e^{a|Im\lambda|}}{e^{a|Im\lambda|}} \frac{e^{C_2(f) ln(|\lambda|+1)}}{e^{C_4(f) ln(|\lambda|+1)}} = C(f) e^{C_2(f) - C_4(f) ln(|\lambda|+1)} = C(f)(|\lambda|+1)^{C_5(f)}.$$

Итак, получим

$$\left|\frac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)}\right| \le C(f)(|\lambda|+1)^{C_5(f)},$$

где $C(f) = \dfrac{C_1(f)}{C_3(f)}, \quad C_5(f) = C_2(f) - C_4(f).$

Отметим, что эта оценка справедлива вне $K:$. Последнюю оценку продолжим и на множество $K:$.

Возьмем произвольную точку λ^*, принадлежащую какому-то кружку $K:_{e_0} \subset K:$ для некоторого $e_0 > m -$ целого числа. Поскольку $\dfrac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)} -$ целое, то по принципу максимума модуля имеем

$$\left|\frac{\psi(\lambda^*)}{\tilde{F}(\lambda^*)}\right| \le \sup_{\partial K_{e_0}} \left|\frac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)}\right|.$$

Тогда существует такое $\lambda^0 \in \partial K_{e_0}$, что справедливо неравенство

$$\left|\frac{\psi(\lambda^*)}{\tilde{F}(\lambda^*)}\right| \le \left|\frac{\psi(\lambda^0)}{\tilde{F}(\lambda^0)}\right| \le C(f)(|\lambda|+1)^{C_5(f)} \le C(f)(|\lambda^*|+1)^{C_5(f)}.$$

По теореме Луивилля, $\dfrac{\psi(\lambda)}{\tilde{F}(\lambda)}$ – некоторый многочлен $P_0(\lambda)$.

Таким образом,

$$\psi(\lambda) = \breve{F}(\lambda) P_0(\lambda).$$

Поэтому функция $\psi(\lambda)$ лежит в образе $Im\,\breve{M}_F^* = \{P:(\lambda)\,\breve{F}(\lambda)\}$. Это означает, что

$$Im\,\breve{M}_F^* = \{P:(\lambda)\,\breve{F}(\lambda)\} = \overline{\{P:(\lambda)\,\breve{F}(\lambda)\}},$$

то есть

$$Im\,\breve{M}_F^* = \overline{Im\,\breve{M}_F^*}.$$

Таким образом, множество $Im\,\breve{M}_F^*$ замкнуто в P_K, и, следовательно, множество ImM_F является замкнутым множеством в s.

Для доказательства теоремы осталось показать, что множество ImM_F всюду плотно в s. Возьмем в качестве $f(x)$ семейство функций $\{e^{\lambda x}\}, \quad \lambda \in \mathrm{X}$.

Пусть $\bar{a} = (a_0, a_1, ..., a_k, ...) \in s$. Для каждого вектора $\bar{a} \in s$ мы можем определить числа $\exists b_0, b_1, ...b_k$, такие, что

$$\sum_{j=0}^{k} b_j (1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^k) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_k) \quad \lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k.$$

В последнем равенстве вектор $(1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^k)$ получается с помощью вычисления производной порядка k функции $f(x) = e^{\lambda x}$ в нуле, то есть

$$f(0) = e\lambda 0 = 1, f'(0) = \lambda e^{\lambda o} = \lambda, f''(0) = \lambda^2 e^{\lambda 0} = \lambda^2, ..., f^{(k)}(0) = \lambda^k.$$

Так как $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k)$, то $\lambda^2 = (\lambda_0^2, \lambda_1^2, ..., \lambda_k^2), ..., \lambda^k = (\lambda_0^k, \lambda_1^k, ..., \lambda_k^k)$.

Отсюда можем написать следующее уравнение

$$\begin{cases} b_0 & + & b_1 & + & \dots & + & b_k & = & a_0 \\ b_0\lambda_0 & + & b_1\lambda_1 & + & \dots & + & b_k\lambda_k & = & a_1 \\ b_0\lambda_0^2 & + & b_1\lambda_1^2 & + & \dots & + & b_k\lambda_k^2 & = & a_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ b_0\lambda_0^k & + & b_1\lambda_1^k & + & \dots & + & b_k\lambda_k^k & = & a_k. \end{cases}$$

Эта система имеет решение, если определитель Ван-Дер-Монда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^k & \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{vmatrix} \neq 0$$

и $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$.

Так как ImM_F всюду плотно в s, и в то же время оно – замкнутое множество, то $ImM_F = s$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике [Текст] / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979.
2. Ибадов, Н. В. Задача о разрешимости уравнения свертки [Текст] / Н. В. Ибадов // Материалы научной конференции «Вопросы функционального анализа и математической физики». – БГУ-80. – Баку, 1999. – С. 274–276.
3. Ибадов, Н. В. Пространство $H^{\infty}(D)$ для ограниченной области [Текст] / Н. В. Ибадов // Док. АН. Азербайджана. – 1999. – Том LV N 1–2. – С. 19–26.
4. Леонтьев, А. Ф. Целые фукции. Ряды экспонент [Текст] / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1983. – 176 с.
5. Мальгранж, Б. Идеалы дифференцируемых функций [Текст] / Б. Мальгранж. – М., 1968.
6. Нарасимхан, Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях [Текст] / Р. Нарасимхан. – М. : Мир, 1971. – 232 с.
7. Рудин, У. Функциональный анализ [Текст] / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 447 с.
8. Шилов, Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс [Текст] / Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1965.
9. Rudin (Rudin W.) Real and complekx Analysis, MeGraw-Hill, New York, 1966.