УДК 517.9

В. Ш. Ройтенберг

О грубости уравнений Абеля с периодическими коэффициентами

В работе доказаны необходимые и достаточные условия грубости дифференциальных уравнений Абеля с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: уравнения Абеля с периодическими коэффициентами, грубые дифференциальные уравнения.

V. Sh. Roitenberg

On Structural Stability of Abel Equations with Periodical Coefficients

In the paper are proved necessary and sufficient conditions of structural stability of Abel equations with periodic coefficients.

Keywords: Abel equations with periodic coefficients, structurally stable differential equations.

Обозначим $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ двухточечную компактификацию $\mathbf{R}$. Превратим $\overline{\mathbf{R}}$ в одномерное C^∞-многообразие с краем, взяв в качестве карт $(\mathbf{R}, h_1)$, $h_1(x) = x$, $((0,+\infty], h_2)$, $h_2(x) = 1/x$ при $x \in (0,+\infty)$, $h_2(+\infty) = 0$ и $[-\infty, 0), h_3)$, $h_3(x) = 1/x$ при $x \in (-\infty, 0)$, $h_3(-\infty) = 0$.

Дифференциальное уравнение Абеля

$$\dot{x} = a(x,t),\ a(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$$

с 1-периодическими коэффициентами $a_k(t)$, $k = 0,1,2,3$ определяет автономную систему S: $\dot{x} = a(x,s),\ \dot{s} = 1$ на цилиндре $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. В координатах (y,s) $y = 1/x$ в областях $x > 0$ и $x < 0$ траектории системы S задаются, соответственно, системами уравнений S^+ и S^-, где

$$\mathrm{S}^\pm:\ \dot{y} = \mp a_3(s) \mp a_2(s)y \mp a_1(s)y^2 \mp a_0(s)y^3,\ \dot{s} = y,$$

определенные и при $y = 0$. В результате получаем на $\overline{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ одномерное ориентируемое слоение с особенностями, для которого пересечение слоев с $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ совпадает с траекториями системы S, а пересечение слоев с $(0,+\infty] \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ и $[-\infty, 0) \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ – с траекториями, соответственно, систем S^+ и S^-. Слои этого слоения будем называть *траекториями уравнения* (1) в $\overline{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Обозначим A_r – множество уравнений Абеля с 1-периодическими коэффициентами $a_i \in C^r$ $(r \geq 1)$. Уравнение $a \in \mathrm{A}_r$ будем коротко записывать в виде $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. Будем рассматривать A_r как банахово пространство с нормой $\|a\|_r = \max\limits_{0 \le m \le 3} \max\limits_{k=0,1,\dots,r} \max\limits_t \left| a_m^{(k)}(t) \right|$ для $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathrm{A}_r$.

Уравнения a и $\tilde{a}$ из A_r назовем *топологически эквивалентными* в $\overline{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, если существует гомеоморфизм $h_{\tilde{a}}$ пространства $\overline{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, переводящий траектории уравнения $\tilde{a}$ в траектории уравнения a. Уравнение $a \in \mathrm{A}_r$ назовем *грубым,* если найдется такая его окрестность $U(a)$, что любое уравнение $\tilde{a} \in U(a)$ топологически эквивалентно уравнению a.

Пусть s_0 – простой нуль функции $a_3(\cdot)$. Тогда $(0,s_0)$ – особая точка системы S^+ (S^-) с характеристическим уравнением $\lambda^2 \pm a_2(s_0)\lambda + a_3'(s_0) = 0$.

Обозначим $D(a,s_0) = a_2^2(s_0) - 4a_3'(s_0)$. Если $a_3'(s_0) > 0$ и $D(a,s_0) < 0$, то корни характеристического уравнения комплексные. Для уравнения a будем называть $S_0 = (+\infty, s_0)$ ($S_0 = (-\infty, s_0)$) *срезанным фокусом.* Траектории a, проходящие через точки достаточно малой окрестности S_0, и при возрастании, и при убывании времени кончаются в точках дуги $\{+\infty\} \times \mathbf{R/Z}$ ($\{-\infty\} \times \mathbf{R/Z}$).

Если $a_3'(s_0) > 0$ и $D(a,s_0) > 0$, то корни характеристического уравнения действительные и различные и $(0,s_0)$ – узел системы ($\mathrm{S}^\pm$). Для системы (S^+) он устойчив (неустойчив) при $a_2(s_0) > 0$ (< 0), а для системы (S^-) он устойчив (неустойчив) при $a_2(s_0) < 0$ (> 0). Для уравнения a будем называть особую точку S_0 *устойчивым* (*неустойчивым*) *срезанным узлом*. В этом случае существует единственная траектория уравнения a, входящая в S_0 при возрастании (убывании) времени по неведущему направлению – соответствующему корню характеристического уравнения с наибольшей абсолютной величиной [1, 2]. Назовем ее *входящей* (*выходящей*) *сепаратрисой* точки S_0. Если (x', s') – точка, лежащая на входящей (выходящей) сепаратрисе в достаточно малой окрестности S_0, то при некотором $\delta > 0$ траектории, начинающиеся в точках (x', s), $s \in (s' - \delta, s']$ (соответственно, $s \in [s', s' + \delta)$), $\omega(\alpha)$-предельны к S_0, а траектории, начинающиеся в точках (x', s), $s \in (s', s' + \delta)$ (соответственно, $s \in (s' - \delta, s')$), при возрастании (соответственно, убывании) времени кончаются в точках дуги $\{+\infty\} \times \mathbf{R/Z}$ (соответственно, $\{-\infty\} \times \mathbf{R/Z}$).

Если $a_3'(s_0) < 0$, то $(0,s_0)$ – седло систем S^+ и S^-. Будем говорить, что S_0 – *срезанное седло* уравнения a. У седла $(0,s_0)$ есть одна входящая сепаратриса и одна выходящая сепаратриса, лежащие в области $y > 0$ ($y < 0$). Соответствующие траектории уравнения $a \in \mathrm{A}_r$ назовем *входящей* и *выходящей сепаратрисой срезанного седла* S_0.

Траекторию уравнения $a \in \mathrm{A}_r$ назовем *двойной сепаратрисой*, если она является и входящей, и выходящей сепаратрисой некоторых особых точек.

Обозначим $\Sigma^0\mathrm{A}_r$ подмножество A_r, состоящее из уравнений, удовлетворяющих следующим условиям: 1) все его замкнутые траектории гиперболические; 2) если $a_3(s_0) = 0$, то $a_3'(s_0) \neq 0$ и $D(a,s_0) \neq 0$; 3) нет двойных сепаратрис.

Теорема. *1) $\Sigma^0\mathrm{A}_r$ открыто и всюду плотно в A_r. 2) Уравнение $a \in \mathrm{A}_r$ является грубым тогда и только тогда, когда оно принадлежит $\Sigma^0\mathrm{A}_r$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\Sigma^0\mathrm{A}_r$ всюду плотно. Пусть $a \in \mathrm{A}_r$. Зададим произвольное $\delta > 0$ и найдем $\tilde{a} \in \Sigma^0\mathrm{A}_r$, для которого $\|\tilde{a} - a\|_r < \delta$. Очевидно, что в A_r всюду плотны уравнения, для которых выполняется условие 2). Поэтому можно считать, что условие 2) выполняется уже для уравнения a.

Рассмотрим уравнение $a^{\mu}=(a_0,a_1,a_2+\mu,a_3)\in \mathrm{A}_r$, имеющее при малых $\mu>0$ те же особые точки и того же типа, что и уравнение a. При достаточно малом $\mu_*>0$ $\left\|a^{\mu}-a\right\|_r<\delta/2$, если $\mu\in(0,\mu_*)$.

Покажем, что найдется $\mu\in(0,\mu_*)$, при котором уравнение a^{μ} не имеет двойных сепаратрис. Далее, будет удобно рассматривать уравнение a^{μ} на $\overline{\mathbf{R}}\times\mathbf{R}$. Если $S_0=(\pm\infty,s_0)$ – особая точка типа срезанное седло или устойчивый (неустойчивый) срезанный узел уравнения a^{μ}, $\mu\in[0,\mu_*)$, то при достаточно малом μ_* и некотором $\varepsilon>0$ ее входящая (выходящая) сепаратриса задается в некоторой окрестности точки S_0 в координатах (y,s) уравнением вида $y=w^{+}_{S_0}(s,\mu)$, $s\in(s_0-\varepsilon,s_0)$ ($y=w^{-}_{S_0}(s,\mu)$, $s\in(s_0,s_0+\varepsilon)$), где $w^{\pm}_{S_0}(\cdot,\cdot)\in C^r$ [1]. Покажем, что если $S_0=(+\infty,s_0)$, то $w^{+}_{S_0}(s,\cdot)-$ возрастающая функция. Предположим, что это не так, то есть $w^{+}_{S_0}(\overline{s},\mu)\le w^{+}_{S_0}(\overline{s},\mu_0)$ при некоторых $\overline{s}$ и $\mu>\mu_0$. Рассмотрим область $D=\{(y,s):\overline{s}<s<s_0, 0<y<w^{+}_{S_0}(s,\mu_0)\}$. В точках (y,s), $y=w^{+}_{S_0}(s,\mu_0)$, $s\in(s_0-\varepsilon,s_0)$, ее границы траектории уравнения a^{μ} направлены внутрь D. Поэтому дуга $y=w^{+}_{S_0}(s,\mu)$, $\overline{s}<s<s_0$ целиком лежит в D, то есть $w^{+}_{S_0}(s,\mu)<w^{+}_{S_0}(s,\mu_0)$ для $\overline{s}<s<s_0$. Обозначим

$$D'=\{(y,s):\overline{s}<s<s_0, w^{+}_{S_0}(s,\mu)<s<w^{+}_{S_0}(s,\mu_0)\}.$$

Положительная полутраектория уравнения a^{μ}, начинающаяся в любой точке D' из D', не выходит и потому ω-предельна S_0. Поскольку $y=w^{+}_{S_0}(s,\mu)$, $\overline{s}<s<s_0$ – дуга входящей сепаратрисы, то это невозможно не только, если S_0- срезанное седло, но и если S_0- срезанный узел. Из полученного противоречия следует, что $w^{+}_{S_0}(s,\cdot)-$ возрастающая функция. Аналогично доказывается, что если $S_0=(-\infty,s_0)$, то $w^{+}_{S_0}(s,\cdot)-$ также возрастающая функция на интервале $(0,\mu_*)$, а если $S_0=(\pm\infty,s_0)$, то $w^{-}_{S_0}(s,\cdot)$ – убывающая функция на $(0,\mu_*)$.

Пусть существует двойная сепаратриса L: $x=l(s)$, $s\in(s_1,s_2)$ $s_1<s<s_2$, уравнения a^{μ_0}, $\mu_0\in(0,\mu_*)$, соединяющая особые точки $S_1=(\pm\infty,s_1)$ и $S_2=(\pm\infty,s_2)$. Тогда $y=w^{-}_{S_1}(s,\mu_0)$ ($y=w^{+}_{S_2}(s,\mu_0)$) – уравнение отрицательной (положительной) полутраектории L в координатах (y,s) и $w^{-}_{S_1}(s,\mu_0)=1/l(s)$, $w^{+}_{S_2}(s,\mu_0)=1/l(s)$. Обозначим G^{+} (соответственно, G^{-}) множество точек (x,s) из $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, для которых $s\in(s_1,s_2)$, $x>l(s)$ (соответственно, $x<l(s)$).

Пусть сначала $S_1=(+\infty,s_1)$. Так как при $\mu\in(\mu_0,\mu_*)$ и некотором $\varepsilon>0$ для всех $s\in(s_1,s_1+\varepsilon]$ $w^{-}_{S_1}(s,\mu)<w^{-}_{S_1}(s,\mu_0)$, то есть некоторая отрицательная полутраектория выходящей сепаратрисы точки S_1 уравнения a^{μ} принадлежит G^{+}. Точно так же получаем, что при неко-

тором $v > 0$ для всех $s \in [s_2 - v, s_2)$ $w^+_{S_2}(s,\mu) > w^+_{S_2}(s,\mu_0)$, то есть некоторая положительная полутраектория входящей сепаратрисы точки S_2 уравнения a^μ принадлежит G^-. В точках L траектории a^μ при $\mu \in (\mu_0, \mu_*)$ направлены внутрь G^+. Поэтому точки входящей сепаратрисы S_2 либо принадлежат G^-, либо лежат в области $s \le s_1$; при $S_2 = (+\infty, s_2)$ все точки выходящей сепаратрисы S_1 принадлежат G^+, а при $S_2 = (-\infty, s_2)$ либо принадлежат G^+, либо лежат в области $s \ge s_2$. Следовательно, a^μ не имеет сепаратрисы, идущей из S_1 в S_2. При $\mu \in (0, \mu_0)$ некоторая отрицательная (положительная) полутраектория выходящей (входящей) сепаратрисы точки S_1 (S_2) принадлежит G^- (G^+). Так как в этом случае в точках L траектории a^μ направлены внутрь G^-, то точки выходящей сепаратрисы S_1 принадлежат G^-, если $S_2 = (-\infty, s_2)$, и принадлежат G^- или области $s \ge s_2$, если $S_2 = (+\infty, s_2)$. При этом все точки входящей сепаратрисы S_2 принадлежат G^+. Следовательно, эти сепаратрисы не совпадают. При $S_1 = (-\infty, s_1)$ рассуждения аналогичны со сменой ролей G^+ и G^-. Таким образом, пара особых точек уравнения a^μ, рассматриваемого на $\overline{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$, может иметь общую сепаратрису не более чем при одном значении $\mu \in (0, \mu_*)$. Так как особых точек у a^μ на $\overline{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$ счетное множество, то и значений $\mu_0 \in (0, \mu')$, при которых a^{μ_0} имеет двойную сепаратрису, не более чем счетное множество. Поэтому существует $\mu \in (0, \mu')$, для которого уравнение $\hat{a} = a^\mu$ не имеет двойных сепаратрис и $\|\hat{a} - a\|_r < \delta/2$.

Рассмотрим уравнение $\hat{a}^v = (a_0 + v, a_1, a_2 + \mu, a_3) \in \mathrm{A}_r$, где $v-$ постоянная. Решение этого уравнения $x(t,u,v)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0,u,v) = u$, является аналитической функцией от (u,v). Поэтому функция последования $P(\cdot, v) = x(1,\cdot,v)$ может обладать только конечным числом неподвижных точек, и они имеют конечную кратность. Предположим, что уравнение $\hat{a} = \hat{a}^0$ характеризуется замкнутыми траекториями. Тогда $P(\cdot,0)$ принадлежат неподвижные точки; пусть u_0 – одна из них. Производная $x'_v(t,u_0,0)$ удовлетворяет уравнению в вариациях, имеющему вид $(x'_v)'_t = b(t)x'_v + 1$, где $b(t)$ – 1-периодическая функция, и начальному условию $x'_v(0,u_0,0) = 0$. Следовательно,

$$P'_v(u_0,0) = x'_v(1,u_0,0) = \int_0^1 \exp\int_s^1 b(t)dtds > 0 .$$

Согласно леммам 2 и 3 из [1, с. 404] отсюда следует, что найдется сколь угодно близкое к нулю число $v \ne 0$ такое, что у уравнения $\hat{a}^v$ есть хотя бы одна замкнутая траектория и все они гиперболические. Если v достаточно мало, то условия 2) и 3) выполняются и для уравнения $\hat{a}^v$. Поэтому $\hat{a}^v \in \Sigma^0 \mathrm{A}_r$, и можно считать, что $\|\hat{a}^v - a\|_r < \delta$. Если уравнение $\hat{a}$ не имеет замкнутых траекторий, то уже $\hat{a} \in \Sigma^0 \mathrm{A}_r$.

Нетрудно убедиться, что особые точки типов срезанный фокус, срезанное седло и срезанный узел грубые: для такой точки S_0 существуют окрестность U и V и число $\delta > 0$ такие, что для любого уравнения $\tilde{a} \in \mathrm{A}_r$, $\|\tilde{a} - a\|_r < \delta$, найдутся окрестность V точки S_0 и гомеоморфизм $h: U \to V$, $h(S_0) = S_0$, переводящий связные компоненты пересечений U с траекториями a в связные компоненты пересечений V с траекториями $\tilde{a}$. Поэтому доказательство того, что уравнение $a \in \Sigma^0 \mathrm{A}_r$ является грубым, аналогично доказательству достаточных условий грубости на плоскости [1].

Пусть уравнение a − грубое. Докажем, что $a \in \Sigma^0 \mathrm{A}_r$.

Так как $\Sigma^0 \mathrm{A}_r$ всюду плотно в A_r, то существует уравнение $\tilde{a} \in \Sigma^0 \mathrm{A}_r$ и гомеоморфизм $h_{\tilde{a}}$ пространства $\overline{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, переводящий траектории уравнения $\tilde{a}$ в траектории уравнения a. Так как $h_{\tilde{a}}$ и $h_{\tilde{a}}^{-1}$ переводит особые точки в особые точки, то $a_3(\cdot)$ имеет конечное число нулей. Если какой-нибудь нуль не является простым, то существует сколь угодно близкая к $a_3(\cdot)$ функция $\overline{a}_3(\cdot)$ с большим числом нулей. Но тогда уравнение a не может быть топологически эквивалентно уравнению $\overline{a} = (a_0, a_1, a_2, \overline{a}_3)$, в противоречие с грубостью. Поэтому все нули $a_3(\cdot)$ простые. Пусть $a_3(s_0) = 0$ и $D(a, s_0) = 0$. Выберем окрестность $Q(s_0)$ точки s_0 в $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, не содержащую нулей $a_3(\cdot)$ отличных от s_0, и такую C^∞-функцию $q : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to [0, +\infty)$, что $q(s_0) = 1$, а $q(s) = 0$ для $s \notin Q(s_0)$. Уравнение $a^\mu = (a_0, a_1, a_2 + \mu q, a_3) \in \mathrm{A}_r$ имеет те же особые точки, что и уравнение a; его траектории в некоторых окрестностях особых точек, отличных от $(\pm\infty, s_0)$, те же, что и у уравнения a. В точке $(\pm\infty, s_0)$ имеем $a_2(s_0) \neq 0$, $D(a^\mu, s_0) = 2\mu a_2(s_0) + \mu^2$. Поэтому мы можем выбрать сколь угодно близкие к нулю числа μ_1 и μ_2 так, чтобы $D(a^{\mu_1}, s_0) < 0$, а $D(a^{\mu_2}, s_0) > 0$. Тогда точки $(\pm\infty, s_0)$ для уравнения a^{μ_1} − срезанные фокусы, а для уравнения a^{μ_2} − срезанные узлы. Поэтому у уравнения a^{μ_1} срезанных фокусов больше, чем у уравнения a^{μ_2}. Если μ_1 и μ_2 достаточно близки к нулю, то a^{μ_1} и a^{μ_2} топологически эквивалентны. Так как для срезанного узла есть траектория $\alpha(\omega)$-предельная к нему, а для срезанного фокуса такой траектории нет, то у a^{μ_1} и a^{μ_2} должно быть одинаковое число срезанных фокусов. Получаем противоречие, из которого следует, что на самом деле $D(a, s_0) \neq 0$.

Предположим, что a имеет двойную сепаратрису L, идущую из особой точки S_1 в особую точку S_2. Пусть точка $z \in L$. Среди положительных (отрицательных) полутраекторий уравнения a, проходящих через любую окрестность точки z, есть как полутраектории $\omega(\alpha)$ - предельные к S_2 (S_1), так и траектории, кончающиеся в точке из $\{+\infty\} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ($\{-\infty\} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$). Тогда и среди положительных (отрицательных) полутраекторий уравнения $\tilde{a} \in \Sigma^0 \mathrm{A}_r$, проходящих через любую окрестность точки $h_{\tilde{a}}^{-1}(z)$, есть как полутраектории $\omega(\alpha)$-предельные к $h_{\tilde{a}}^{-1}(S_2)$ ($h_{\tilde{a}}^{-1}(S_1)$), так и траектории, кончающиеся в точке из $\{+\infty\} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ($\{-\infty\} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$). Но это может быть только, если $\tilde{L} = h_{\tilde{a}}^{-1}(L)$ двойная сепаратриса. Поскольку у $\tilde{a} \in \Sigma^0 \mathrm{A}_r$ двойных сепаратрис нет, то предположение неверно и у a тоже нет двойных сепаратрис.

Так как грубое уравнение a топологически эквивалентно уравнению из $\Sigma^0 \mathrm{A}_r$, то его замкнутые траектории имеют нечетную кратность. Предположим, что уравнение имеет негиперболическую замкнутую траекторию Γ: $x = g(t)$. Для определенности, пусть она устойчива. Выберем ее окрестность $U(\Gamma)$, не содержащую других замкнутых траекторий, с границей $\partial U(\Gamma)$, состоящей из двух замкнутых кривых, трансверсальных траекториям уравнения. Замена $G : x \mapsto y = x - g(t)$ индуцирует гомеоморфизм $G^*: A_r \to A_r$, переводящий уравнение a в уравнение, которое обозначим $G^*(a) = (0, a_1^*, a_2^*, a_3^*)$. Для этого уравнения $y \equiv 0$ – замкнутая траектория с характеристическим показателем $\int_0^1 a_1^*(t)dt = 0$. Рассмотрим уравнение $a^{*\varepsilon} = (0, a_1^* + \varepsilon, a_2^*, a_3^*)$, зависящее от параметра $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Уравнение $a^\varepsilon = (G^*)^{-1}(a^{*\varepsilon})$ имеет замкнутую траекторию $x = g(t)$ с характеристическим показателем $\int_0^1 (a_1^*(t) + \varepsilon)dt = \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда Γ – неустойчивая гиперболическая замкнутая траектория уравнения a^ε. При ε, достаточно близком к нулю, траектории уравнения a^ε в точках $\partial U(\Gamma)$, как и траектории уравнения a, будут направлены внутрь $U(\Gamma)$. Поэтому уравнение a^ε имеет в $U(\Gamma)$ не менее трех замкнутых траекторий, а вне $U(\Gamma)$ число его траекторий не меньше, чем у уравнения a. Следовательно, у a^ε больше замкнутых траекторий, чем у a. Но это противоречит тому, что при ε, достаточно близком к нулю, эти уравнения должны быть топологически эквивалентными. Если Γ неустойчива, то противоречие получаем при $\varepsilon < 0$. Таким образом, грубое уравнение a имеет только гиперболические замкнутые траектории.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Андронов, А. А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости [Текст] / А. А. Андронов [и др.]. — М. : Наука, 1967. — 488 с.

2. Шильников, Л. П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 [Текст] / Л. П. Шильников [и др.]. — М. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. — 416 с.