УДК 517.929

О. А. Неволина

О разрешимости задачи Коши для одного уравнения нейтрального типа

Рассматривается дифференциальное уравнение нейтрального типа вида $a(t)x'(t)+b(t)x'(k_1t)+c(t)x'(1-k_2t)=f(t,(Tx)(t))$, где $0<k_1<1$ $0<k_2<1$ – константы. В работе используется теорема существования решения квазилинейного операторного уравнения без предположения обратимости линейного оператора. На основе этой теоремы доказывается достаточное условие разрешимости задачи Коши для анализируемого уравнения.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа, задача Коши, теоремы существования, квазилинейное операторное уравнение.

O. A. Nevolina

On Solvability of the Cauchy Problem for an Equation of the Neutral Type

We consider the differential equation of the neutral type of the form $a(t)x'(t)+b(t)x'(k_1t)+c(t)x'(1-k_2t)=f(t,(Tx)(t))$, where $0<k_1,k_2<1$ are constants. The present paper contains the existence theorem for a quasilinear operator equation without the assumption of invertibility of a linear operator. Using this theorem, we prove a sufficient condition for solvability of the Cauchy problem for the given equation.

Keywords: equation of the neutral type, the Cauchy problem, existence theorems, a quasilinear operator equation.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения нейтрального типа

$$\begin{cases} a(t)x'(t)+b(t)x'(k_1t)+c(t)x'(1-k_2t)=f(t,(Tx)(t)) & (1)\\ x(0)=\alpha, & (2)\end{cases}$$

где $t\in[0;1]$, $0<k_1<1$, $0<k_2<1$, функции $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$ предполагаются измеримыми и ограниченными в существенном, функция $f:[0,1]\times R^1\to R^1$ удовлетворяет условиям Каратеодори, T – линейный оператор.

Уравнения нейтрального типа [4, 6] могут обладать специфическими свойствами, связанными с отклонением аргумента. Актуальность изучения этих свойств отмечали такие известные ученые в области функционально-дифференциальных уравнений, как Н. В. Азбелев и А. Д. Мышкис.

В предлагаемой работе исследуется новый класс уравнений нейтрального типа, для которых главная линейная часть уравнения не является обратимым оператором. В этом смысле данная работа представляет собой продолжение [1].

Введем следующие обозначения. Положим $E=[0;1]\subset R^1=(-\infty,\infty)$ и определим банаховы функциональные пространства: $L_\infty=L_\infty[0;1]$ – пространство функций $x:[0;1]\to R^1$, измеримых (по Лебегу) и ограниченных в существенном, с нормой $\|x\|_\infty=\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in[0;1]}|x(t)|$; $L_p=L_p[0;1]$, $1<p<\infty$ – пространство функций $y:E\to R^1$, суммируемых в p-й степени (по Лебегу), с нормой

$\|y\|_p = \left(\int_E |y(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$; $D_p = D_p[0;1]$ – пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : E \to R^1$, что $x' \in L_p$, с нормой $\|x\|_{D_p} = |x(0)| + \|x'\|_p$.

Решение задачи $(1),(2)$ будем искать в пространстве D_p. Метод, применяемый в данной работе, основан на переходе от задачи $(1),(2)$ к квазилинейному операторному уравнению в пространстве L_p. Приведем сначала вспомогательные конструкции и утверждения, которые потребуются для доказательства теорем существования.

Найдем операторы, соответствующие левой части уравнения (1). Первому слагаемому соответствует оператор умножения $A : L_p \to L_p$, определенный равенством $(Ay)(t) = a(t)y(t)$. Второму и третьему слагаемым – операторы $S_1, S_2 : L_p \to L_p$, определенные равенствами

$$(S_1 y)(t) = b(t)y(k_1 t),\ (S_2 y)(t) = c(t)y(1 - k_2 t),\ 0 < k_1, k_2 < 1.$$

Операторы S_1 и S_2 являются операторами внутренней суперпозиции со специальными отклонениями аргумента [3]. Этой спецификой мы и воспользуемся в настоящей работе. Для удобства определим также оператор $S : L_p \to L_p$ $S = S_1 + S_2$. Введем в рассмотрение оператор $V_\alpha : L_p \to L_p$, определяемый равенством $V_\alpha y = T\left(\alpha + \int_0^t y(s)ds \right)$, и оператор $F : L_p \to L_p$, определяемый равенством $F(y) = f(t, V_\alpha y)$. Будем предполагать, что $T : L_p \to L_p$ – линейный ограниченный оператор.

При каждом фиксированном $\alpha \in R^1$ задача $(1),(2)$ эквивалентна уравнению

$$(A + S)y = Fy. \tag{3}$$

Действительно, если $y_0 \in L_p$ является решением (3), то функция $x_0(t) = \alpha + \int_0^t y(s)ds$, принадлежащая пространству D_p, удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2). Таким образом, для доказательства существования решения задачи (1), (2) достаточно обосновать существование хотя бы одного решения операторного уравнения (3).

Пусть X, Y – банаховы пространства, $L : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $F : X \to Y$ – непрерывный, необязательно линейный оператор. Нам потребуется следующая теорема [2].

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) существует константа q >0 такая, что неравенство $q\|\omega\| \le \|L^* \omega\|$ выполнено для всех $\omega \in Y^*$;

2) оператор $F : X \to Y$ вполне непрерывен, и существуют константы $c, d \ge 0$ такие, что $\|Fu\| \le c + d\|u\|$ для всех $u \in X$;

3) $d < q$.

Тогда уравнение $Lu = Fu$ имеет хотя бы одно решение.

Для применения теоремы 1 к уравнению (3) рассмотрим необходимые вспомогательные утверждения. Доказательство следующего утверждения не составляет труда.

Лемма 1. Если $a(\cdot) \in L_\infty$, то оператор $A : L_p \to L_p$ – ограничен, причем

$$\|A\|_p \le \|a\|_\infty = vrai\sup_{t \in E} |a(t)|.$$

Если $0 < a_0 \le |a(t)|$ почти всюду $t \in E$, то

$$a_0\|\omega\|_p \le \|A\omega\|_p .$$

Сопряженные с S_1 и S_2 операторы $S_1^*, S_2^* : L_q \to L_q$ имеют вид [5]:

$$S_1^*\omega = \begin{cases} k_1 b\left(\frac{1}{k_1}t\right)\omega\left(\frac{1}{k_1}t\right), & t\in[0;k_1], \\ 0, & t\notin[0;k_1]. \end{cases} \qquad S_2^*\omega = \begin{cases} k_2 c\left(\frac{1-t}{k_2}\right)\omega\left(\frac{1-t}{k_2}\right), & t\in[1-k_2;1], \\ 0, & t\notin[1-k_2;1]. \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия

1) $k_1 + k_2 \le 1$;

2) $0 < c_0^q \le vrai\inf\limits_{t\in E}\left(k_1^{1+q}|b(t)|^q + k_2^{1+q}|c(t)|^q\right).$

Тогда оператор $S : L_p \to L_p$, $S = S_1 + S_2$, сюръективен и выполняется неравенство

$$c_0\|\omega\|_q \le \|S^*\omega\|_q .$$

Доказательство. Оценим норму сопряженного оператора $S^* : L_q \to L_q$. Имеем

$$\|S^*\omega\|_q = \left(\int_E \left|\left(\left(S_1^* + S_2^*\right)\omega\right)(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_E \left|k_1 b\left(\frac{1}{k_1}t\right)\omega\left(\frac{1}{k_1}t\right) + k_2 c\left(\frac{1-t}{k_2}\right)\omega\left(\frac{1-t}{k_2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Условие 1) леммы обеспечивает возможность представления данного интеграла в виде суммы двух интегралов соответственно по непересекающимся множествам. При этом каждое из двух слагаемых под интегралом является ненулевым на непересекающихся отрезках $[0;k_1]$ и $[1-k_2;1]$, так как $k_1 + k_2 \le 1$. Поэтому

$$\|S^*\omega\|_q = \left(\int_0^{k_1} \left|k_1 b\left(\frac{1}{k_1}t\right)\omega\left(\frac{1}{k_1}t\right)\right|^q dt + \int_{1-k_2}^{1} \left|k_2 c\left(\frac{1-t}{k_2}\right)\omega\left(\frac{1-t}{k_2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Произведя замены переменных в интегралах, получим

$$\|S^*\omega\|_q = k_1^{1+q}\int_0^1 |b(\tau)\omega(\tau)|^q d\tau + k_2^{1+q}\int_0^1 |c(\tau)\omega(\tau)|^q d\tau .$$

Следовательно,

$$\|S^*\omega\|_q = \left(\int_0^1 \left(k_1^{1+q}|b(\tau)|^q + k_2^{1+q}|c(\tau)|^q\right)|\omega(\tau)|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \ge c_0\|\omega(\tau)\|_q .$$

Лемма доказана.

Лемма 3. В условиях леммы 2 справедливо неравенство $\left(c_0 - \|a\|_\infty\right)\|\omega\|_q \le \left\|(A+S)^*\omega\right\|_q$, $\omega\in L_q$. Если $0 < a_0 \le |a(t)|$ и $a_0 > s_0 = k_1^{-\frac{1}{p}}\|b\|_\infty + k_2^{-\frac{1}{p}}\|c\|_\infty$, то $\|(A+S)y\|_p \ge (a_0 - s_0)\|y\|_p$, $y\in L_p$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно воспользоваться утверждениями лемм 1 и 2 и следующим неравенством

$$\left\|(A+S)^*\omega\right\|_q \ge \|S^*\omega\|_q - \|A^*\omega\|_q \ge c_0\|\omega\|_q - \|A\|_q\|\omega\|_q \ge \left(c_0 - \|a\|_\infty\right)\|\omega\|_q .$$

Для доказательства второго утверждения предварительно оценим норму оператора $S : L_p \to L_p$. Имеем

$$\|S_1 y\|_p^p = \int_0^1 |b(t)y(k_1 t)|^p dt, \quad \|S_2 y\|_p^p = \int_0^1 |c(t)y(1-k_2 t)|^p dt.$$

Произведя соответствующие замены переменных в интегралах, получим следующие оценки

$$\|S_1 y\|_p^p \le \frac{1}{k_1}\|b\|_\infty^p \|y\|_p^p, \qquad \|S_2 y\|_p^p \le \frac{1}{k_2}\|c\|_\infty^p \|y\|_p^p.$$

Следовательно,

$$\|S\|_p \le k_1^{-\frac{1}{p}}\|b\|_\infty + k_2^{-\frac{1}{p}}\|c\|_\infty.$$

Теперь остается воспользоваться неравенством

$$\|(A+S)y\|_p \ge \|Sy\|_p - \|Ay\|_p \ge (a_0 - s_0)\|y\|_p.$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение позволяет оценить норму оператора $F(y) = f(t, V_\alpha y)$ при известной оценке на порождающую функцию f.

Лемма 4. Пусть существуют $\delta > 0,\ \gamma > 0$ такие, что неравенство $|f(t,u)| \le \delta + \gamma|u|$ выполнено при всех $u \in R^1$ и почти всюду $t \in E$. Тогда для оператора $F: L_p \to L_p$ справедлива оценка

$$\|Fy\|_p \le (\delta + |\alpha|\gamma\|T\|_p) + \gamma\|T\|_p \cdot \|y\|_p.$$

Доказательство. Так как $V_\alpha y = T\left(\alpha + \int_0^t y(s)ds\right)$ и $\left(\int_0^1 \left(\alpha + \int_0^t y(s)ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le |\alpha| + \|y\|_p$, то

$$\|Fy\|_p = \left(\int_0^1 |f(t, V_\alpha y)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^1 (\delta + \gamma|V_\alpha y|)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^1 \left(\delta + \gamma\left|T\left(\alpha + \int_0^t y(s)ds\right)\right|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \delta + \gamma\left(\int_0^1 \left|T\left(\alpha + \int_0^t y(s)ds\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \delta + |\alpha|\gamma\|T\|_p + \gamma\|T\|_p\|y\|_p.$$

Лемма доказана.

Сначала сформулируем теорему о разрешимости задачи $(1), (2)$, когда соответствующее линейное операторное уравнение $(A+S)y = g$ является разрешимым для всех $g \in L_p$, но при этом оператор $(A+S)$ не обратим. Это означает, что свойство разрешимости обеспечивается оператором внутренней суперпозиции (см. лемма 2). Напомним, что в этом утверждении и присутствует ситуация, связанная с нейтральностью, заявленной в начале статьи.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) $k_1 + k_2 \le 1$;

2) $0 < c_0^q \le vrai\inf_{t\in E}\left(k_1^{1+q}|b(t)|^q + k_2^{1+q}|c(t)|^q\right)$ почти всюду $t \in E$;

3) $|f(t,u)| \le \delta + \gamma|u|$ при всех $u \in R^1$, и почти всюду $t \in E$;

4) $\gamma\|T\| + \|a\|_\infty < c_0$.

Тогда задача $(1), (2)$ для произвольного $\alpha \in R^1$ имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение $(A+S)y = Fy$ при произвольно фиксированном α и проверим выполнение всех условий теоремы 1. Условие 1) данной теоремы справедливо с константой $q = c_0 - \|a\|_\infty$ в силу утверждений лемм 1 и 2. Из условия 3) теоремы 2 следует выполнение условия 2) теоремы 1 с $d = \gamma\|T\|_p$. И, наконец, условие 4) обеспечивает выполнение условия 3) теоремы 1:

$$\gamma\|T\|_p = d < q = c_0 - \|a\|_\infty .$$

Таким образом, существует хотя бы одно решение $y_0 \in L_p$, а в силу ранее сказанного, элемент $x_0 \in D$ вида $x_0(t) = \alpha + \int_0^t y(s)ds$ будет решением задачи $(1),(2)$. Теорема доказана.

Следующая теорема существования отличается от теоремы 2 тем, что соответствующий оператор $(A+S): L_p \to L_p$ обратим.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

1) $0 < a_0 \le |a(t)|$ почти всюду $t \in E$;

2) $|f(t,u)| \le \delta + \gamma|u|$ при всех $u \in R^1$, и почти всюду $t \in E$;

3) $\gamma\|T\| + s_0 < a_0$, где $s_0 = k_1^{-\frac{1}{p}}\|b\|_\infty + k_2^{-\frac{1}{p}}\|c\|_\infty$.

Тогда задача $(1),(2)$ для произвольного $\alpha \in R^1$ имеет хотя бы одно решение.

Доказательство проведем аналогично предыдущему, то есть покажем выполнение всех условий теоремы 1. Учитывая утверждения лемм 1 и 2, условие 1) теоремы 1 выполняется с константой $q = a_0 - s_0$. В силу утверждения леммы 4 и условий 2), 3) теоремы 3 оказываются выполненными, соответственно, условия 2), 3) теоремы 1.

Следовательно, существует хотя бы одно решение $y_0 \in L_p$ операторного уравнения (3) и решение $x_0 \in D$ задачи Коши $(1),(2)$. Теорема доказана.

Для иллюстрации утверждения теоремы 2 приведем пример задачи Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} tx'(t) + bx'(k_1 t) + cx'(1 - k_2 t) = f(t) \\ x(0) = \alpha, \end{cases} \tag{4}$$

где $t \in [0;1]$, $0 < k_1 < 1$, $0 < k_2 < 1$, $f \in L_2$ – линейная функция. При $b = c = 0$ эта задача не является разрешимой для любой функции $f \in L_2$. Это означает, что первое слагаемое в левой части уравнения не является «главным». Применение теоремы 2 дает следующее условие разрешимости: пусть выполнено условие

$$1 < \left(k_1^3 b^2 + k_2^3 c^2\right)^{1/2},$$

тогда задача Коши (4) имеет хотя бы одно решение для функции $f \in L_2$.

Библиографический список

1. Абдуллаев, А. Р. Задача Коши для квазилинейного дифференциального уравнения нейтрального типа [Текст] / А. Р. Абдуллаев, О. А. Неволина // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – № 3. – Том III (Естественные науки) – С. 7–12.
2. Абдуллаев, А. Р. Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач [Текст] / А. Р. Абдуллаев, А. Б. Бурмистрова // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 14–22.
3. Абдуллаев, А. Р. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций [Текст] / А. Р. Абдуллаев – М. : Изд-во ВИНИТИ, 1981. – № 981-81 Деп. – 20 с.
4. Азбелев, Н. В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. – М. : Наука, 1982. – 280 с.
5. Плехова, Э. В. О коэффициенте сюръективности одного класса операторов [Текст] / Э. В. Плехова, О. А. Неволина, О. В. Фукалова // Изв. научно-образовательного центра «Математика» : сб. научных трудов. – 2006. – Вып. 3. – С. 62–71.

6. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Хейл. – М. : Мир, 1984. – 422 с.