УДК 517.925.51

Ю. А. Коняев, Д. В. Михайлов, М. Б. Ваkджира

Исследование неавтономных уравнений в теории гироскопов

Изучены малые колебания микромеханического гироскопа [4] с помощью неавтономного варианта метода расщепления [2], при наличии вибрирующего основания имеющие вид: $\ddot{\alpha} + 2\varepsilon\sigma\dot{\alpha} - \varepsilon b_1(t)\dot{\beta} + \omega^2\alpha = 0$ $\ddot{\beta} + 2\varepsilon\sigma\dot{\beta} - \varepsilon b_2(t)\dot{\alpha} + \omega^2\beta = 0$ $(b_j(t) = b_j(1 + b_0 \sin \nu t))$, где α, β – обобщенные координаты, описывающие положение чувствительного элемента относительно основания; ω – характерная частота собственных колебаний чувствительного элемента; σ определяется параметрами гироскопа; ν – частота колебаний основания; b_0 – амплитуда колебаний основания. Также изучены колебания тонкого кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа, описываемые системой ОДУ четвертого порядка с нормальной матрицей.

Ключевые слова: гироскоп, метод расщепления, метод унитарных преобразований, устойчивость.

Yu. A. Koniaev, D. V. Mikhailov, M. B. Vakjira

Study of Non-Autonomous Equations in the Theory of Gyroscopes

We study small oscillations of a micromechanical gyroscope [4] using non-autonomous version of the splitting method [2] in the presence of the vibrating base are the form: $\ddot{\alpha} + 2\varepsilon\sigma\dot{\alpha} - \varepsilon b_1(t)\dot{\beta} + \omega^2\alpha = 0$ $\ddot{\beta} + 2\varepsilon\sigma\dot{\beta} - \varepsilon b_2(t)\dot{\alpha} + \omega^2\beta = 0$ $(b_j(t) = b_j(1 + b_0 \sin \nu t))$, Where α, β the generalized coordinates describing the position of the sensor relative to the base; ω — characteristic frequency of the natural oscillations of the sensing element; σ — defined parameters of gyroscope; ν — oscillation frequency to the base; b_0 - amplitude oscillations of the base. Also were studied fluctuations of the thin ring resonator gyro wave solid-state described by the system of ODE of the fourth order with normal matrix.

Keywords: gyroscope, a splitting method, a method of unitary transformations, stability.

В работе изучены малые колебания микромеханического гироскопа [4] с помощью неавтономного варианта метода расщепления [2], которые при наличии вибрирующего основания имеют вид:

$$\begin{gathered} \ddot{\alpha} + 2\varepsilon\sigma\dot{\alpha} - \varepsilon b_1(t)\dot{\beta} + \omega^2\alpha = 0 \\ \ddot{\beta} + 2\varepsilon\sigma\dot{\beta} - \varepsilon b_2(t)\dot{\alpha} + \omega^2\beta = 0 \\ (b_j(t) = b_j(1 + b_0 \sin \nu t)), \end{gathered} \tag{1}$$

где α, β – обобщенные координаты, описывающие положение чувствительного элемента относительно основания; ω – характерная частота собственных колебаний чувствительного элемента; ν – частота колебаний основания; b_0 – амплитуда колебаний основания.

Запись (1) в векторной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1(t)\right)x = A(t,\varepsilon)x, \tag{2}$$

где $x = (\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})^T$; $A_0 = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{00} \end{pmatrix}$; $A_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sigma & 0 & b_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1(t) & 0 & -2\sigma \end{pmatrix},$$

и структура матрицы $A(t,\varepsilon)$ позволяет применить новый асимптотический вариант метода расщепления для неавтономных регулярно возмущенных систем [2].

Теорема 1. *Система*

$$\dot{x} = \big(A_0 + \varepsilon A_1(t)\big)x, \ \ (x \in R^n, \ A(t,\varepsilon) = A_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k, \ |\varepsilon| \le \varepsilon_0 \ll 1)$$

с Т-периодической матрицей $A(t,\varepsilon)$ *в случае, когда спектр* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ *матрицы* A_0 *удовлетворяет неравенствам:*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \ne 2\pi q T^{-1}, \quad \big(j,k = \overline{1,n};\ j \ne k;\ q = 0, \pm1, \pm2, \dots\big),$$

может быть с помощью невырожденной при $|\varepsilon| \ll 1)$ *Т-периодической замены*

$$x = S_0\big(E + \textstyle\sum_1^N H_k(t)\varepsilon^k\big)z \qquad (3)$$

[где $S^{-1}A_0 = \Lambda_0 = diag\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0k}\}$, *а* $H_k(t)$ *Т-периодические матрицы] преобразована в более простую:*

$$\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z, \ \ \Big(Q(t,\varepsilon) = \Lambda(\varepsilon) + \underline{\underline{O}}(\varepsilon^{N+1}), = \textstyle\sum_{k=0}^{N} \Lambda_k\,\varepsilon^N\Big), \qquad (4)$$

где постоянные диагональные матрицы Λ_k *и Т-периодические* $H_k(t)$ матрицы *однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.*

Теорема 2. *Если в условиях* теоремы 1 *вектор* $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ $j = \overline{1,n}$ *вспомогательной диагональной матрицы* $\Lambda(\varepsilon)$ *удовлетворяет условиям* $Re\lambda_j(\varepsilon) \le -\sigma\varepsilon^q$ $(q = \overline{0,N};\ \sigma > 0)$, *тогда решение системы (4) и эквивалентной ей системы (1) асимптотически устойчиво.* (*Доказательство* теорем 1 и 2 *проводится методами, изложенными в работе* [2].)

Следуя обобщенной теореме 1, с помощью замены вида (3) система (2) приводится к виду:

$$\dot{z} = \big(\Lambda_0 + \varepsilon N_1 + \underline{\underline{O}}(\varepsilon^3)\big)z \equiv Q(t,\varepsilon)z,$$

где $\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & 0 \\ 0 & \Lambda_{00} \end{pmatrix}$; $\Lambda_{00} = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix}$; $N_1 = \begin{pmatrix} \overline{N}_{11} & \overline{N}_{12} \\ \overline{N}_{21} & \overline{N}_{22} \end{pmatrix}$;

$$\overline{N}_{11} = -\sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{N}_{22};\ \overline{N}_{12} = \frac{b_1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \overline{N}_{21} = -\frac{b_1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и структура матрицы $Q(t,\varepsilon)$ позволяет получить с учетом теоремы 2 достаточные критерии устойчивости исходной системы (1).

При анализе нелинейной модельной системы, описывающей колебания тонкого кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа с системой поддерживающих торсионов следует воспользоваться другим конструктивным методом в теории устойчивости – методом унитарных преобразований.

Без учета демпфирования это приводит к системе ОДУ четвертого порядка:

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3\xi E & 4v-\xi X & 0 \\ 3\xi E & 0 & 0 & 4v-\xi X \\ -4v+\xi X & 0 & 0 & -3\xi E \\ 0 & -4v+\xi X & 3\xi E & 0 \end{pmatrix} z = \frac{\varepsilon}{9} B z \qquad (5)$$

где компоненты вектора $z = (q_1,\ p_1,\ q_2,\ p_2)^T$; $q_1,\ p_1,\ q_2, p_2$ – медленно изменяющиеся переменные, связанные с формой колебаний; ε – малый параметр; ξ – параметр, характеризующий нелинейную упругость материала резонатора; v – безразмерная угловая скорость основания гироскопа; $E = q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2$, $X = 2(p_2 q_1 - p_1 q_2)$ – функции, представляющие собой первые интегралы исходной системы.

Так как матрица $\mathbf{B}$ является нормальной $(\mathbf{B}^*\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{B}^*,\ \ \mathbf{B}^*$ – сопряженная матрица) и кососимметричной и в силу этого она имеет чисто мнимый спектр [3], то будет доказано, что решение системы (5) при любых начальных условиях будет устойчивым.

Теорема 3. *Для квадрата нормы решений системы*

$$\dot{z} = A(t)z, \qquad z \in R^n \qquad (6)$$

имеет место дифференциальное равенство $\frac{1}{2}\frac{d|z|^2}{dt} = Re(z^*A(t)z)$.

Доказательство.

◁ Из равенств $\dot{z} = A(t)z$ и $\dot{z}^* = z^*A(t)$, $z^*z = |z|^2$ имеем соотношение: $\frac{d|z|^2}{dt} = \dot{z}^*z + z^*\dot{z} = 2Re(z^*A(t)z)$ ▷

Теорема 4. *Если матрица* $A(t)$ *системы (6) является тождественно нормальной* $(A^*(t)A(t) \equiv A(t)A^*(t))$ *и ее спектр* $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ *удовлетворяет* $Re\lambda_j(t) \le \sigma(t)$, $(j = \overline{1,n};\ t \ge 0)$, *тогда для квадрата нормы решения системы (1) справедливы неравенства:* $\frac{d|z|^2}{dt} \le \sigma(t)|z|^2$,

$$|z(t)|^2 \le |z^0|e^{a(t)},\ a(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\,d\tau.$$

(причем равенство переходит в равенство)

В силу *теорем 3 и 4* для системы (6) имеет место тождество $\frac{d|z|^2}{dt} \equiv 0$, гарантирующее существование устойчивого решения.

Для определения более детальной структуры решения системы (6) найдем спектр матрицы $\mathbf{B}$ $\lambda_{1,2,3,4} - \pm i(a \pm b)$.

Так как с помощью некоторой унитарной замены $z = \mathbf{U}x$ система (6) всегда может быть преобразована к виду $\dot{z} - \Lambda x$, где $\Lambda - diag\big(i(a+b),\ \ i(a+b),\ \ i(a-b),\ \ i(a-b)\big)$, то общее решение исходной системы (1) будет иметь вид:

$$z = \mathbf{U}(\mathbf{C}_1 \cos(a+b)t + \\ + \mathbf{C}_2 \sin(a+b)t + \mathbf{C}_3 \cos(a-b)t + +\mathbf{C}_4 \sin(a-b)t,$$

где $\mathbf{C}_j$ $(j = \overline{1,4})$ – некоторые постоянные векторы, зависящие от начальных условий.

Заключение

Таким образом, показана эффективность двух новых методов (метода расщепления и метода унитарных преобразований [1, 2,]) при анализе реальных модельных систем в теории гироскопов.

Библиографический список

1. Коняев, Ю. А. Метод унитарных преобразований в теории устойчивости [Текст] / Ю. А. Конев // Издательство ВУЗ Математика. – 2002. – № 2. – С. 41–45.
2. Коняев, Ю. А. О некоторых методах исследования устойчивости [Текст] / Ю. А. Коняев // Математической сборник. – 2001. – Т. 192, № 3, – С. 65–82.
3. Ланкастер, П. Теория матриц [Текст] / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
4. Меркурьев, И. В., Подалков, В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов [Текст] / И. В. Меркурьев, В. В. Подалков. – М. : Физматлит, 2000. – 228 с.