

Н. В. Смирнов

Математическое моделирование процесса биологической очистки сточных вод

Исследования проводились при поддержке гранта ОМН.

Работа поддержана в рамках реализации стратегического развития ПетрГУ.

Решается задача стабилизации процесса биологической очистки воды. Предложена математическая модель динамики концентрации видов загрязнителя и микроорганизмов активного ила, учитывающая конкуренцию микроорганизмов.

Ключевые слова: биологическая очистка воды, стабилизация процесса.

N. V. Smirnov

Mathematical Modeling of the Biological Wastewater Treatment Process

The problem of the stabilizing biological wastewater treatment process is solved. A mathematical model of dynamics of the concentration of the pollutant and the activated sludge microorganisms taking into account competing microorganisms is proposed.

Keywords: biological wastewater treatment, a stabilizing process.

Введение

Водообеспеченность в мире в расчете на одного человека уменьшается. В то же время требования к качеству питьевой воды повышаются. В результате проблема очистки сточных вод приобретает первостепенное значение. Вследствие усиления антропогенной нагрузки на окружающую среду количество загрязнителя, попадающего в стоки, увеличивается. В результате в сточной воде содержится его более высокая концентрация.

Очистные сооружения, рассчитанные на меньшие концентрации загрязнителя, не всегда в достаточной мере справляются с процессом очистки сточных вод и, в частности, с нитрификацией. Это приводит к повышенным выбросам в экосистему азота в аммонийной форме.

Статья состоит из двух частей. В первой решается задача стабилизации известной математической модели процесса биологической очистки воды [2]. Во второй предложена математическая модель динамики концентрации видов загрязнителя и микроорганизмов активного ила. Учитывается конкуренция микроорганизмов.

Постановка задачи

Активный ил – это сообщество микроорганизмов. Их питательной средой являются вещества, содержащиеся в сточных водах. На этом основан метод биологической очистки сточных вод.

В процессе биологической очистки концентрации загрязнителя и биомассы активного ила изменяются. Так как по окончании очистки концентрация загрязнителя должна быть достаточно мала, а утилизация избыточного активного ила требует существенных затрат, то существует проблема поддержания концентрации активного ила и загрязнителя в определенных границах. Пусть s_{\max} и x_{\max} – это максимально допустимые концентрации загрязнителя и микроорганизмов соответственно. Тогда задача стабилизации состоит в том, чтобы поддерживать эти концентрации в допустимых пределах:

$$\begin{cases} s(t) \leq s_{\max} \\ x(t) \leq x_{\max} \end{cases}$$

Решение задачи стабилизации

Процесс биоочистки может быть описан следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t)a_1 + \mu_0 \frac{x(t)s(t)}{k + s(t)} - (b + u(t))x(t), \\ \dot{s}(t) = ba_2 - \frac{\mu_0}{Y} \frac{x(t)s(t)}{k + s(t)} - (b + u(t))s(t), \\ t \in [0; T], \quad x(0) = x_0 > 0, \quad s(0) = s_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $s(t), x(t)$ – концентрации субстрата-загрязнителя и микроорганизмов в момент времени t ; $u(t), a_1$ – скорость и концентрация биомассы в возвратном потоке; b, a_2 – скорость и концентрация субстрата на входе; μ_0 – максимальная удельная скорость роста биомассы; Y – коэффициент перехода загрязнителя в биомассу микроорганизмов; k – константа полунасыщения.

Будем полагать, что скорость рециркуляции ила $u = u(t)$ постоянна. Также будем считать $k \gg s(t)$, что не умоляет общности, так как обычно пытаются сохранить отношение массы субстрата и биомассы достаточно малым [3]. В таком случае система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ua_1 + \mu x(t)s(t) - (b + u)x(t), \\ \dot{s}(t) = ba_2 - \frac{\mu}{Y} x(t)s(t) - (b + u)s(t), \\ t \in [0; T], \quad x(0) = x_0 > 0, \quad s(0) = s_0 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Сделаем в (2) замену переменных $x = n_1 \xi$, $s = n_2 \eta$, $t = n_3 \tau$, где $n_1 = \frac{Y(b+u)}{\mu}$, $n_2 = \frac{ba_2}{b+u}$,

$n_3 = \frac{1}{b+u}$, получим:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = A + B\xi\eta - \xi, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = 1 - \xi\eta - \eta, \\ \tau \in [0; (b+u)T], \quad \xi(0) = \xi_0 > 0, \quad \eta(0) = \eta_0 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $A = \frac{ua_1\mu}{Y(b+u)^2}$, $B = \frac{uba_2}{(b+u)^2}$.

Введем обозначения: $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{d\tau}$, $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau}$, $\tau = t$. Сложив первое уравнение системы (3) со вторым, умноженным на B , получим: $\dot{z} = A + B - z$, где $z = \xi + B\eta$. Решение этого уравнения примет вид: $z(t) = \xi(t) + B\eta(t) = (\xi_0 + B\eta_0 - A - B)e^{t_0-t} + (A+B) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A+B$, то есть при $t \rightarrow +\infty$ фазовые траектории будут стремиться к прямой $l_0 = \{(\xi, \eta) : \xi + B\eta = A + B\}$, являющейся интегральным притягивающим множеством системы (3).

Поскольку $s(t) \geq 0$, $x(t) \geq 0$, то при построении фазового портрета рассматриваем первую координатную четверть, в которой существует единственное положение равновесия (ξ^*, η^*) :

$$\xi^* = \frac{A+B-1 + \sqrt{(A+B-1)^2 + 4A}}{2} \geq 0, \quad \eta^* = \frac{A+B+1 + \sqrt{(A+B-1)^2 + 4A}}{2B} \geq 0$$

Это положение равновесия находится на прямой l_0 . По теореме Пуанкаре – Бендиксона точка (ξ^*, η^*) будет предельным множеством всех траекторий, тогда положение равновесия (ξ^*, η^*) будет асимптотически устойчиво.

Так как $\dot{\xi} = A > 0$ при $\xi = 0$, то фазовые траектории входят в первую четверть через прямую $\xi = 0$. Аналогично $\dot{\eta} = 1 > 0$ при $\eta = 0$, тогда фазовые траектории входят в первую четверть слева через прямую $\eta = 0$. С помощью уравнения изоклин $\eta_2 = \frac{1}{B} - \frac{A}{B\xi}$, $\eta_1 = \frac{1}{1+\xi}$ получен фазовый портрет, на котором выделен прямоугольник $\Pi = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq \xi_{\max}, 0 \leq \eta \leq \eta_{\max}\}$.

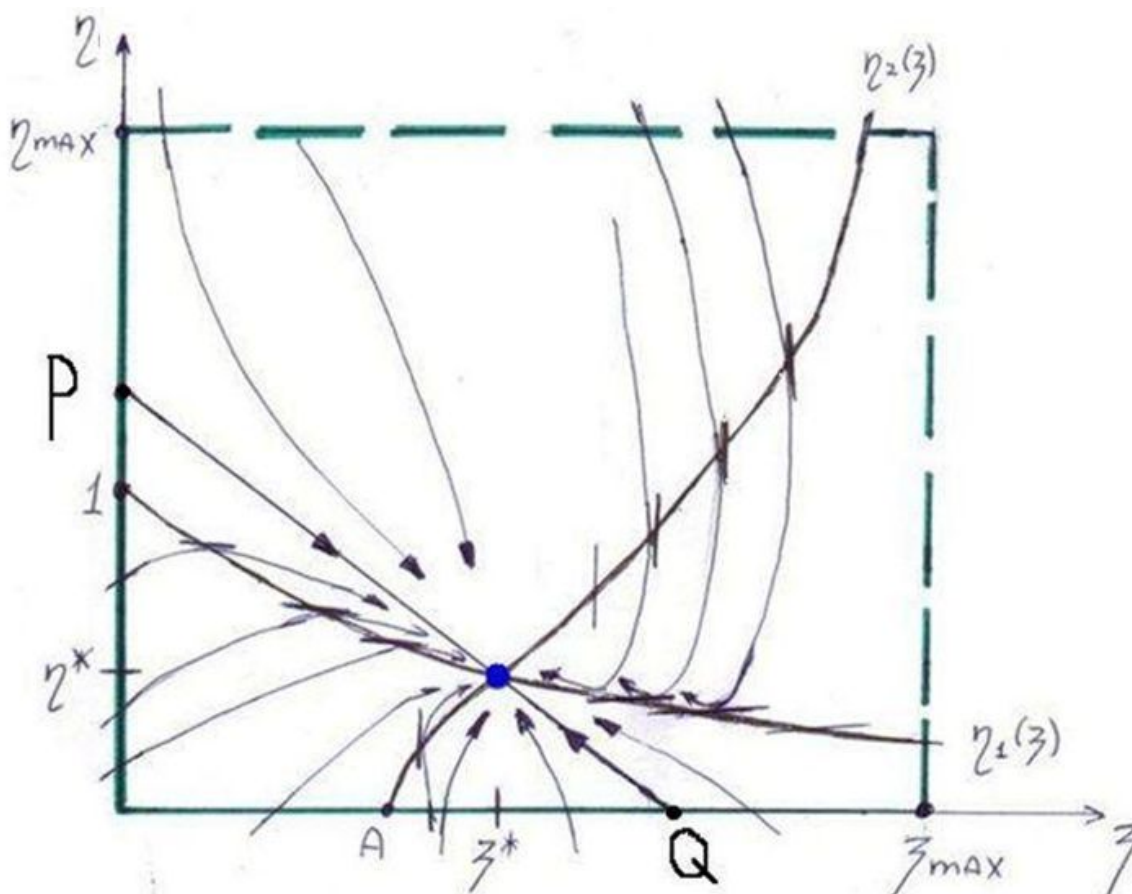


Рис. 1. Фазовый портрет

Изменяя скорость рециркуляции ила, можно управлять положением отрезка $[P, Q]$, где $P = (0, 1 + \frac{A}{B})$, $Q = (A + B, 0)$, выбирать η_{\max} и ξ_{\max} так, чтобы выполнялись условия: $\eta_{\max} \geq 1 + \frac{A}{B}$, $\xi_{\max} > A + B$. При этом значение ξ_{\max} должно соответствовать абсциссе точки пересечения прямой $\eta = \eta_{\max}$ и изоклины $\eta_2 = \frac{1}{B} - \frac{A}{B\xi}$ или абсциссе точки, лежащей правее точки пересечения на этой прямой.

Утверждение 1. Прямоугольник $\Pi = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq \xi_{\max}, 0 \leq \eta \leq \eta_{\max}\}$ является инвариантным множеством системы (3).

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что траектория с течением времени покидает Π через его правую сторону. Из фазового портрета следует, что в момент выхода t^- траектории из прямоугольника справа $\dot{\xi}(t^-) > 0$ (рис. 2). Так как положение равновесия, находящееся в Π , асимптотически устойчиво, то траектория вернется в этот прямоугольник. В момент входа t^+ : $\dot{\xi}(t^+) < 0$. Так как траектория непрерывна, то по теореме Больцано – Коши существует $t^* \in [t^-, t^+]$ такое, что $\dot{\xi}(t^*) = 0$. Из этого следует, что точка M^* разворота траектории принадлежит вертикальной изоклине, которая лежит левее правой границы прямоугольника. Таким образом, получается противоречие, а следовательно, предположение о выходе траектории за правую границу Π не верно. Аналогичным образом доказывается утверждение для границы сверху. Как было указано ранее, через нижнюю и левую границы прямоугольника траектории могут только входить и т. д.

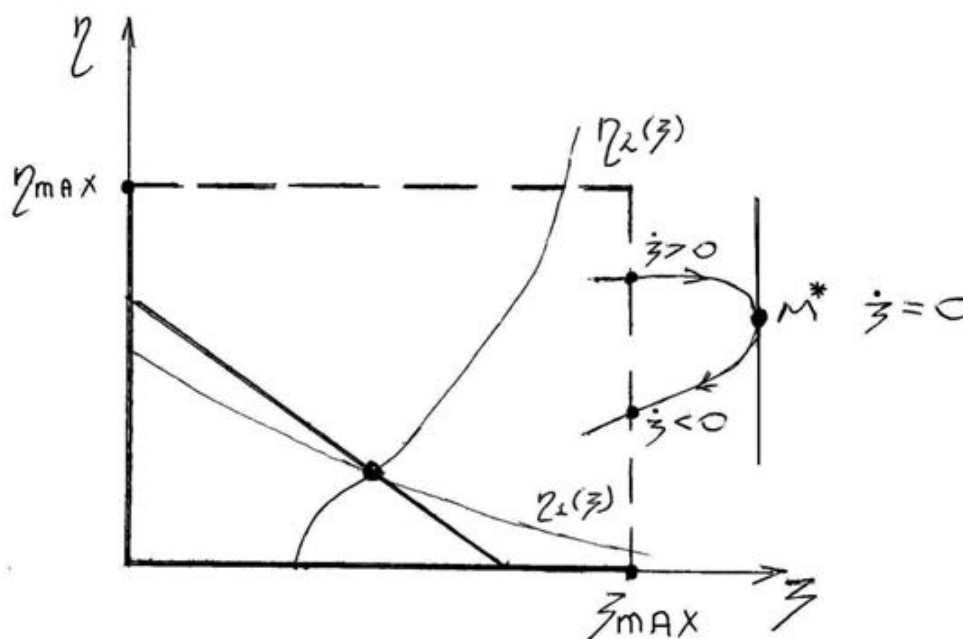


Рис. 2. Невозможная траектория

Легко вернуться к исходным переменным. При этом все свойства сохраняются. Таким образом, все траектории, попавшие во множество $P = \{(x, s) : 0 < x < x_{\max}, 0 < s < s_{\max}\}$, останутся в нем.

Построение модели

Группой исследователей, возглавляемой М. Henze [4], был предложен ряд моделей для описания процесса биоочистки. Их подход носит методологический характер и указывает направления для получения конкретных моделей. Используя методы, разработанные этой группой, построена модель, учитывающая динамику концентраций углеродосодержащего загрязнителя, азота в аммонийной форме и микроорганизмов, окисляющих эти загрязнители. При построении уравнений использована зависимость Моно.

$$\dot{S}_C = Q(S_C^{in} - S_C) - \frac{\mu_C}{Y_C} f(S_C, K_C) f(S_O, K_{C,O}) X_C$$

$$\dot{S}_N = Q(S_N^{in} - S_N) - \frac{\mu_N}{Y_N} f(S_N, K_N) f(S_O, K_{N,O}) X_N$$

$$\dot{X}_C = Q(X_C^{in} - X_C) + (\mu_C f(S_C, K_C) f(S_O, K_{C,O}) - b_C (1 + f(X_N, K_1))) X_C$$

$$\dot{X}_N = Q(X_N^{in} - X_N) + (\mu_N f(S_N, K_N) f(S_O, K_{N,O}) - b_N (1 + f(X_C, K_2))) X_N$$

$$\dot{S}_O = Q(S_O^{in} - S_O) + u_O - \frac{1 - Y_C}{Y_C} \mu_C f(S_C, K_C) f(S_O, K_{C,O}) X_C -$$

$$\frac{4,57 - Y_N}{Y_N} \mu_N f(S_N, K_N) f(S_O, K_{N,O}) X_N$$

где $f(X, K) = \frac{X}{X + K}$.

Концентрации на входе и выходе участка аэротенка соответственно:

S_O^{in} , S_O – растворенного кислорода;

S_C^{in} , S_C – растворенных органических веществ;

S_N^{in} , $S_N = S_{NH}$ – растворенного азота в аммонийной форме;

X_C^{in} , $X_C = X_H$ – гетеротрофных микроорганизмов, окисляющих органические вещества;

X_N^{in} , $X_N = X_A$ – автотрофных микроорганизмов, окисляющих азот в аммонийной форме.

Константы:

$K_N = K_{NH}$ – коэффициент полунасыщения автотрофов аммонием;

$K_C = K_{C,H}$ – коэффициент полунасыщения гетеротрофов органикой;

$K_{N,O} = K_{O,A}$ – коэффициент полунасыщения автотрофов кислородом;

$K_{C,O} = K_{O,H}$ – коэффициент полунасыщения гетеротрофов кислородом;

K_1 , K_2 – коэффициенты конкуренции автотрофных и гетеротрофных организмов соответственно;

$Y_C = Y_H$ – коэффициент перехода массы углеродосодержащего загрязнителя в биомассу гетеротрофных организмов;

$Y_N = Y_A$ – коэффициент перехода массы загрязнителя, содержащего аммоний азота, в массу автотрофных организмов;

$b_N = b_A$ – коэффициент скорости распада автотрофных организмов;

$b_C = b_H$ – коэффициент скорости распада гетеротрофных организмов;

$\mu_N = \mu_{\max,A}$ – максимальная удельная скорость роста автотрофных организмов;

$\mu_C = \mu_{\max,H}$ – максимальная удельная скорость роста гетеротрофных организмов.

Управляющий параметр:

u_O – скорость подаваемого в аэротенк кислорода.

Посредством управления скоростью подачи кислорода, предполагается придавать концентрациям требуемые значения.

Выводы

- 1) Построено инвариантное множество системы (2) $P = \{(x, s) : 0 < x < x_{\max}, 0 < s < s_{\max}\}$.
- 2) Управление скоростью рециркуляции u оказывает влияние на границы инвариантного множества.
- 3) Предложен подход к решению задачи стабилизации процесса биоочистки.
- 4) Предложена математическая модель, решающая задачу достижения достаточного уровня нитрификации. Для модели будет произведен численный анализ.

Библиографический список

1. Немыцкий, В. В., Степанов, В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений [Текст] / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
2. Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environmental Technology, 6:11. 1985. P. 467–476.
3. Grigorieva. V., Khalov E. N. Optimal control of a waste water cleaning plant // Eighth Mississippi State – UAB Conference on Differential Equations and Computational, Simulations. Electronic Journal of Differential Equations, Conf. 19. 2010. P. 161–175.
4. Henze M., Guer W., Matsuo T., Van Loosdrecht M. Activated Sludge Models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3 // Scientific and Technical Reports. IWA Publishing, London, UK. 2000.