

А. В. Бородин

Бариоперационный метод решения нелинейных эволюционных уравнений

В работе методами бариоперационного исчисления нелинейное эволюционное уравнение (на примере модельного уравнения Кортевега – де Фриза) редуцировано в бесконечномерную нелинейную автономную динамическую систему уравнений, получено решение этой системы, а с его помощью – периодическое решение исходного уравнения.

Ключевые слова: спектральная алгебра, спектральный базис, гиперболическая бариалгебра, бариэлемент, спектральная функция, спектральное разложение, ряд Фурье, уравнение КдФ, динамическая система, решение динамической системы, периодическое решение КдФ.

A. V. Borodin

The Barioperation Method to Solve Non-Linear Evolution Equations

In the work by means of methods of barioperatsion calculation the nonlinear evolutionary equation (on the example of the modeling equation of Korteweg–de Vries) is reduced into the infinite-dimensional nonlinear independent dynamic system of equations, a solution of this system is received, and with its help the periodic solution of the initial equation..

Keywords: spectral algebra, a spectral basis, hyperbolic bari-algebra, a barielement, a spectral function, spectral decomposition, Fourier number, KdV equation, a dynamic system, solution of the dynamic system, a periodic solution of KdV.

Следуя работам [2, 3], рассмотрим бесконечномерную гиперболическую бариалгебру $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ ($\mathbf{A}$ – спектральная B^+ -алгебра над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$), элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности вида

$$\langle x \rangle = \langle \dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0; x_1, x_2, \dots \rangle = \langle \dots, x^{-2} / x^{-1}, x^{-1} / x^0; x^0; x^1 / x^0, x^2 / x^1, \dots \rangle, \quad (1)$$

при условии, что

$$\|\langle x \rangle\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|x^k\| < +\infty, \quad (2)$$

где $x_k \in \mathbf{A}$ – компонента k -го порядка,

$$x^k = \mu^k(\langle x \rangle) = \prod_{j=0}^k x_j$$

– барикомпонента (или момент) k -го порядка бариэлемента (БЭЛ) $\langle x \rangle$. При этом

$$\langle y \rangle = \langle x \rangle \Leftrightarrow y^k = x^k \quad (\forall k \in \mathbf{Z}).$$

Подробное описание ГБА $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ дано в [3]. Приведем лишь определения основных четырех алгебраических операций над элементами (1) этой алгебры:

- 1) $\mu^k(\lambda \langle x \rangle) = \lambda \mu^k(\langle x \rangle)$ (умножение на скаляр $\lambda \in \mathbf{A}$);
- 2) $\mu^k(\langle x \rangle + \langle y \rangle) = \mu^k(\langle x \rangle) + \mu^k(\langle y \rangle)$ (сложение $\langle x \rangle + \langle y \rangle$);
- 3) $\mu^k(\langle x \rangle \langle y \rangle) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mu^\alpha(\langle x \rangle) \mu^{k-\alpha}(\langle y \rangle)$ (умножение $\langle x \rangle \langle y \rangle$);
- 4) $\mu^k(\langle x \rangle^*) = (\mu^{-k}(\langle x \rangle))^*$ (инволюция $\langle x \rangle^*$),

а также определения спектральной алгебры и B^+ -алгебры.

Алгебра $\mathbf{A}$ над полем $\mathbf{C}$ называется *спектральной*, если в ней существует *спектральный базис*

$$e_1, e_2, \dots, e_m, \quad (3)$$

то есть базис, элементы которого обладают *спектральными свойствами*:

$$e_k e_{k'} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq k', \\ e_k, & \text{если } k = k', \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^m e_k = e,$$

где $e \in \mathbf{A}$ – единичный элемент. Если $a \in \mathbf{A}$ и

$$a = \sum_{k=1}^m a^k e_k \quad (a^k \in \mathbf{C}),$$

то

$$a e_k = a^k e_k \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

то есть элементы спектрального базиса (3) являются собственными для всех $a \in \mathbf{A}$, а спектральные координаты a^k ($k = 1, 2, \dots, m$) – собственными значениями для элемента $a \in \mathbf{A}$. Поэтому если комплекснозначная функция f определена на спектре $\sigma(a) = \{a^k\}_{k=1}^m$ элемента $a \in \mathbf{A}$, то

$$f(a) = \sum_{k=1}^m f(a^k) e_k.$$

К числу спектральных алгебр относятся конечномерные гиперболические $\langle \mathbf{A} \rangle_h^{n_{\pm}}$ и эллиптические $\langle \mathbf{A} \rangle_e^{n_{\pm}}$ алгебры, построенные и исследованные в работах [3, 4].

Банахова алгебра $\mathbf{A}$ называется B^+ -алгеброй, если для каждого элемента $a \in \mathbf{A}$

$$a a^* = \|a\|^2 e.$$

Заметим, что B^+ -алгебра является B^* -алгеброй [4], но обратное, вообще говоря, неверно. Примерами B^+ -алгебр являются множества комплексных чисел $\mathbf{C} \cong \langle \mathbf{R} \rangle_e^{1_{\pm}}$, кватернионов $\mathbf{H} \cong \langle \mathbf{C} \rangle_e^{1_{\pm}}$, октав $\mathbf{Ca} \cong \langle \mathbf{H} \rangle_e^{1_{\pm}}$ (последние две представляют собой некоммутативные B^+ -алгебры [4, 6]).

Относительно бесконечномерной гиперболической бариалгебры $\langle \mathbf{A} \rangle_1^{\infty}$ справедливы следующие утверждения [3].

Теорема 1. Если $\mathbf{A}$ – конечномерная спектральная алгебра над полем $\mathbf{C}$, то для каждого БЭЛ $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^{\infty}$ имеет место равенство

$$\langle x \rangle \langle \xi \rangle = \lambda(\langle x \rangle) \langle \xi \rangle, \quad (4)$$

где

$$\langle \xi \rangle = \langle \xi \rangle_{\theta} = \langle \dots, e^{-i\theta}, \dots, e^{-i\theta}; e; e^{i\theta}, \dots, e^{i\theta}, \dots \rangle, \quad (5)$$

$$\lambda_{\theta}(\langle x \rangle) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\theta} x^k \quad (6)$$

$$\left(\theta = \sum_{k=1}^m \theta^k e_k \in \text{Re}(\mathbf{A}) = \{a \in \mathbf{A} : a = \sum_{k=1}^m a^k e_k, a^k \in \mathbf{R}\} \right)$$

и, следовательно, (5) – собственные обобщенные бариэлементы, а (6) – соответствующие обобщенные собственные значения БЭЛ $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^{\infty}$.

БЭЛ (4) имеет приставку «обобщенный», поскольку он не содержится в $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ и его следует понимать как линейный непрерывный функционал на $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$, то есть как элемент банахова пространства $\langle \mathbf{A} \rangle_\infty^\infty$ ограниченных последовательностей с нормой [3, 7]

$$\|\langle x \rangle\|_\infty = \sup_{k \in \mathbf{Z}} \|x^k\| < +\infty.$$

При этом и равенство (4) надо понимать в обобщенном смысле (в смысле теории распределений [7, 9]), а именно,

$$\langle x \rangle \langle \xi \rangle = \lambda(\langle x \rangle) \langle \xi \rangle \Leftrightarrow \langle \langle a \rangle, \langle x \rangle \langle \xi \rangle \rangle = \langle \langle a \rangle, \lambda(\langle x \rangle) \langle \xi \rangle \rangle \quad (\forall \langle a \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty),$$

где внешние треугольные скобки « $\langle \dots, \dots \rangle$ » обозначают обобщенное барискалярное произведение с присущими ему стандартными свойствами [3] (или, что то же самое, действие функционала справа от запятой на элемент слева от нее [9]).

Дальше, выражение (6) как функция переменной $\theta \in \mathbf{A}$ со значениями в $\mathbf{A}$ ($\lambda_\theta(\langle x \rangle) \in \mathbf{A}$) называется *спектральной барифункцией* (СБФ) бариеlementa $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$.

Теорема 2. Если $\mathbf{A}$ – конечномерная спектральная алгебра над полем $\mathbf{C}$, то СБФ (6) БЭЛ $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ является над $\mathbf{A}$ суммой ряда Фурье с коэффициентами Фурье, равными моментам $x^k = \mu^k(\langle x \rangle)$ ($k \in \mathbf{Z}$) БЭЛ $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$.

Теорема 3. Если $\mathbf{A}$ – конечномерная спектральная алгебра над полем $\mathbf{C}$, то $\lambda_\theta(\langle x \rangle)$ как функция переменной $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ есть мультипликативный функционал на банаховой барисалгебре $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ и, следовательно, является гомоморфизмом алгебр $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ и $\mathbf{A}$.

Теорема 4. Если $\mathbf{A}$ – конечномерная спектральная алгебра над полем $\mathbf{C}$, то ГБА $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ с обобщенным скалярным произведением

$$\langle \langle x \rangle, \langle y \rangle \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^k (y^k)^*$$

изометрически изоморфна алгебре Λ_1^∞ СБФ (6) со скалярным произведением

$$(\lambda_\theta(\langle x \rangle), \lambda_\theta(\langle y \rangle)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda_\theta(\langle x \rangle) (\lambda_\theta(\langle y \rangle))^* d\theta.$$

Теорема 5 (спектральная). Для каждого БЭЛ $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty$ имеет место спектральное бариразложение

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda_\theta(\langle x \rangle) \langle \xi \rangle_\theta d\theta. \quad (7)$$

Доказательства этих и других утверждений даны в работе [3]. Мы же, следуя схеме, изложенной в [2, 3], применим теоремы 1–5 к анализу и решению ненормированного уравнения КдФ [8]

$$\partial_t^1 u(\theta, t) - 6a u(\theta, t) \partial_\theta^1 u(\theta, t) + b \partial_\theta^3 u(\theta, t) = 0 \quad (a, b \in \mathbf{C}) \quad (8)$$

и схожих с ним нелинейных дифференциальных уравнений (см. также [1]). Будем искать 2π -периодические (по $\theta \in \text{Re}(\mathbf{A})$) решения ДУ (8) в виде СБФ (6) некоторого БЭЛ (1), (2), то есть в виде

$$u(\theta, t) = \lambda_\theta(\langle x(t) \rangle) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^k(t) e^{-ik\theta}, \quad (9)$$

где

$$\langle x(t) \rangle = \langle \dots, x^{-2}(t)/x^{-1}(t), x^{-1}(t)/x^0(t); x^0(t); x^1(t)/x^0(t), x^2(t)/x^1(t), \dots \rangle \quad (10)$$

– неизвестный БЭЛ, подлежащий определению.

Дальше для простоты будем считать, что $\mathbf{A} = \mathbf{C}$, и, следовательно, $\langle \mathbf{A} \rangle_1^\infty = \langle \mathbf{C} \rangle_1^\infty$, $\theta \in \mathbf{R}$. Согласно теоремам 1–5, моменты $x^k = x^k(t)$ БЭЛ (10) удовлетворяют бесконечномерной автономной динамической системе (ДС)

$$i \partial_t^1 x^k(t) = 3ak \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x^\alpha(t) x^{k-\alpha}(t) + bk^3 x^k(t) \quad (k \in \mathbf{Z}), \quad (11)$$

или

$$i \partial_t^1 x^k(t) = k(bk^2 + 6ax^0) x^k(t) + 3ak \sum_{\alpha \in \mathbf{Z} \setminus \{0, k\}} x^\alpha(t) x^{k-\alpha}(t) \quad (k \in \mathbf{Z}), \quad (11')$$

причем при $k = 0$ имеем

$$i \partial_t^1 x^0(t) = 0, \text{ то есть } x^0(t) = c^0,$$

где $c^0 \in \mathbf{C}$ – произвольная постоянная.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Для того чтобы СБФ (9) была решением КдФ (8), необходимо и достаточно, чтобы БЭЛ (10) был решением ДС (11) (или (11')).

Найдем часть решений этой системы при условии, что

$$x^k = x^k(t) = 0 \quad (\forall k \in \mathbf{Z} : k < 0). \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что условие (12) согласуется с ДС (11') и упрощает ее до вида

$$i \partial_t^1 x^k(t) = k(bk^2 + 6ac^0) x^k(t) + 3ak \sum_{\alpha=1}^{k-1} x^\alpha(t) x^{k-\alpha}(t) \quad (k \geq 2), \quad (13)$$

причем при $k = 1$ имеем

$$i \partial_t^1 x^1(t) = (b + 6ac^0) x^1(t), \text{ то есть } x^1(t) = c^1 \exp(-i(b + 6ac^0)t),$$

где $c^0, c^1 \in \mathbf{C}$ – произвольные постоянные. Следовательно, ДС (13) имеет рекуррентную форму, позволяющую каждое следующее решение $x^k(t)$ ($k \geq 2$) этой системы выражать через предыдущие $x^\alpha(t)$ ($\alpha = 0, 1, \dots, k-1$) по формуле общего решения линейного ДУ первого порядка:

$$x^k(t) = \exp(-i(bk^3 + 6akc^0)t) \left(c^k + 3ak \int_0^t \left(\sum_{\alpha=1}^{k-1} x^\alpha(\tau) x^{k-\alpha}(\tau) \right) \exp(i(bk^3 + 6akc^0)\tau) d\tau \right), \quad (14)$$

где $c^k = x^k(0) \in \mathbf{C}$ – произвольная постоянная (начальное значение). Остается подставить (14) в (9), чтобы при условии (12) получить комплекснозначные решения уравнения (8).

Однако формула общего решения (14) ДС (13) достаточно сложна для своего анализа. Поэтому рассмотрим частные решения этой системы, а именно, решения вида

$$x^k(t) = C^k (x^1(t))^k = C^k (c^1)^k \exp(-ik(b + 6ac^0)t) \quad (\forall k \in \mathbf{Z} : k \geq 2), \quad (15)$$

где $C^k \in \mathbf{C}$ – постоянные, подлежащие нахождению. Подставляя (15) в (13), найдем, что при $b \neq 0$

$$C^k = \frac{3a}{b(1-k^2)} \sum_{\alpha=1}^{k-1} C^\alpha C^{k-\alpha} \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \quad (16)$$

Отсюда последовательно получаем

$$\begin{aligned} C^2 &= -\frac{a}{b} (C^1)^2, \quad C^3 = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{b} \right)^2 (C^1)^2, \quad C^4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^3 (C^1)^2, \quad C^5 = \frac{5}{16} \left(\frac{a}{b} \right)^4 (C^1)^2, \\ C^6 &= -\frac{87}{280} \left(\frac{a}{b} \right)^5 (C^1)^2, \quad \dots, \quad C^k = (-1)^{k-1} D^k \left(\frac{a}{b} \right)^{k-1} (C^1)^2, \quad \dots \end{aligned} \quad (17)$$

где $C^1 \in \mathbf{C}$ – любое допустимое число, D^k ($k \in \mathbf{N}$) – числа, определяемые рекуррентным образом, согласно соотношению (16) (первые шесть из них выписаны в (17) в явном виде). Нетрудно показать, что

$$|D^k| \leq 3 / (k + 1) \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Отсюда

$$|C^k| \leq \frac{3}{k+1} \left| \frac{a}{b} \right|^{k-1} |C^1|^2 \quad (18)$$

Следует заметить, что оценку (18) можно улучшить. Действительно, из (16) на основании (18) сначала получаем

$$|C^k| \leq \frac{27}{(k^2 - 1)} \left| \frac{a}{b} \right|^{k+1} |C^1|^4 \sum_{\alpha=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{k-\alpha+1} \quad (k = 2, 3, 4, \dots),$$

а затем, согласно неравенству Коши – Буняковского [6] и равенству $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha^{-2} = \pi^2/6$,

$$|C^k| \leq \frac{27}{(k^2 - 1)} \left| \frac{a}{b} \right|^{k+1} |C^1|^4 \sum_{\alpha=1}^{k-1} \frac{1}{(\alpha+1)^2} \leq 27 \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) |C^1|^4 \left| \frac{a}{b} \right|^{k+1} \frac{1}{k^2 - 1} \quad (k = 2, 3, 4, \dots) \quad (19)$$

Тем самым формула (15) дает более простое по форме, чем (14), решение ДС (13). Подставляя (12) и (15) в (9), получим решение уравнения КдФ (8) в форме неполного ряда Фурье по переменной $\theta \in \mathbf{R}$:

$$u(\theta, t) = c^0 + c^1 \exp(-i(b + 6a c^0)t) e^{-i\theta} + \sum_{k=2}^{+\infty} C^k (c^1)^k \exp(-ik(b + 6a c^0)t) e^{-ik\theta}, \quad (20)$$

где $C^k \in \mathbf{C}$ ($k = 2, 3, \dots$), определены по формулам (17) (с оценкой (19)), c^0 – любая, а $c^1 \in \mathbf{C}$ – допустимая постоянная.

За счет выбора параметра c^1 в (20) (либо ввиду (19) параметров a и b в (8)) можно добиться равномерной сходимости функционального ряда (20) и всех его производных и тем самым получить классическое решение ДУ КдВ (8).

Понятно, что решение (20) является комплекснозначным. Это следствие условия (12), приведшего к неполному ряду Фурье. Условие же (12) продиктовано соответствующей простотой решения бесконечномерной ДС (11). Но даже в этом частном случае вещественная $u_r(\theta, t) = \operatorname{Re}(u(\theta, t))$ и мнимая $u_i(\theta, t) = \operatorname{Im}(u(\theta, t))$ части решения (20) являются при $a = a_r + ia_i$, $b = b_r + ib_i$ вещественными 2π -периодическими (по $\theta \in \mathbf{R}$) решениями непрстой нелинейной системы ДУ

$$\begin{aligned} \partial_t^1 u_r - 6a_r u_r \partial_\theta^1 u_r + b_r \partial_\theta^3 u_r + 6a_i u_i \partial_\theta^1 u_r + 6a_i \partial_\theta^1 u_i u_r &= -6a_r u_i \partial_\theta^1 u_i + b_i \partial_\theta^3 u_i, \\ \partial_t^1 u_i + 6a_i u_i \partial_\theta^1 u_i + b_r \partial_\theta^3 u_i - 6a_r u_r \partial_\theta^1 u_i - 6a_r \partial_\theta^1 u_r u_i &= 6a_i u_r \partial_\theta^1 u_r - b_i \partial_\theta^3 u_r, \end{aligned} \quad (21)$$

где первое (относительно $u_i(\theta, t)$) и второе (относительно $u_r(\theta, t)$) – неоднородные уравнения КдФ.

Отметим, что, когда $a, b \in \mathbf{R}$ (то есть $a_i = 0$, $b_i = 0$), система (21) имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t^1 u_r - 6a_r u_r \partial_\theta^1 u_r + b_r \partial_\theta^3 u_r &= -6a_r u_i \partial_\theta^1 u_i, \\ \partial_t^1 u_i + b_r \partial_\theta^3 u_i - 6a_r u_r \partial_\theta^1 u_i - 6a_r \partial_\theta^1 u_r u_i &= 0, \end{aligned} \quad (21')$$

Понятно, что возможны и другие комбинации вещественной и мнимой частей комплексных параметров $a = a_r + ia_i$ и $b = b_r + ib_i$ ДУ (8).

Далее, решение общей ДС (11) можно (как и в ее частном случае (13)) искать в форме (15), точнее, в форме

$$x^k(t) = C^k (c^1)^k \exp(-ik C_0 t) \quad (k \in \mathbf{Z}), \quad (22)$$

где $C^k \in \mathbf{C}$ – постоянные (кроме $C^0 = c^0$), подлежащие нахождению; $c^1 \in \mathbf{C}$ и $C_0 \in \mathbf{C}$ – допустимые условием (2) постоянные. Подставляя (22) в (11) или (11'), получаем для определения постоянных C^k ($k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$) бесконечную квадратичную алгебраическую систему уравнений типа свертки:

$$C^k = \frac{3a}{C_0 - bk^2} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} C^\alpha C^{k-\alpha} \quad (k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}) \quad (23)$$

или

$$C^k = \frac{3a}{C_0 - 6ac^0 - bk^2} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z} \setminus \{0, k\}} C^\alpha C^{k-\alpha} \quad (k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}). \quad (23')$$

Зная решение системы (23), можно по формулам (22) и (9) получить часть 2π -периодических (по θ) решений исходного ДУ (8). В связи с этим отметим, что в работе [5], в силу применяемого там метода, решаются только линейные алгебраические системы уравнений типа свертки.

В нашем же случае важно заметить, что задачу поиска решения $u(\theta, t)$ ДУ (8) можно обратить, а именно, зная 2π -периодическое (по θ) решение $u(\theta, t)$ ДУ (8), можно по формуле (7), где $\lambda_\theta(\langle x(t) \rangle) = u(\theta, t)$, получить решение (10) ДС (11) и тем самым свести решение бесконечномерной автономной квадратичной динамической системы (11) к решению нелинейного эволюционного уравнения третьего порядка (8).

Понятно, что таким методом можно получить решения достаточно широкого класса линейных и нелинейных конечных и бесконечных алгебраических систем уравнений типа свертки. В частности, возвращаясь к системе (23), можно заключить, что для ее решения достаточно уметь решать нелинейное ДУ второго порядка

$$by''(\theta) + 3ay^2(\theta) - C_0 y(\theta) + c^0 = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) (при $a = b = 1$) рассмотрено, например, в работе [8] в связи с частными (типа бегущих волн) решениями уравнения КдФ. При условии, что

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3, \quad y_2 = 0$$

– действительные корни кубического уравнения

$$y^3 - \frac{1}{2}C_0 y^2 + C_1 y = y(y - y_1)(y - y_3) = 0$$

($C_0 = 2(y_1 + y_3)$, $C_1 = y_1 y_3 \in \mathbf{R}$ – любые обеспечивающие это условие постоянные), приведено T -периодическое решение ДУ (24) ($a = b = 1$):

$$y(\theta) = y_1 \operatorname{cn}^2\left(\sqrt{(y_1 - y_3)/2}(\theta - \theta_0), \kappa\right), \quad (25)$$

$$T = 2\sqrt{2/(y_1 - y_3)} K(\kappa) = \sqrt{8/(y_1 - y_3)} \int_0^1 \left((1 - \xi^2)(1 - \kappa^2 \xi^2)\right)^{-1/2} d\xi,$$

где $\operatorname{cn}(z, \kappa)$ – эллиптическая функция Якоби с модулем

$$\kappa = \sqrt{y_1/(y_1 - y_3)}.$$

Пусть $C_0, C_1 \in \mathbf{R}$ (или $y_1 > 0, y_3 \leq 0$) такие, что период функции (25) $T = 2\pi$, то есть

$$K(\kappa) = \pi \sqrt{y_1/2} \kappa^{-1}. \quad (26)$$

Сравнивая график функции $K(y_3) = K(\kappa(y_3))$ (см. [10]) с графиком функции $\varphi(y_3) = \pi \sqrt{y_1/2} \kappa^{-1}(y_3)$ (при любом фиксированном $y_1 > 0$), нетрудно убедиться, что уравнение (26) имеет единственное решение

$$y_3 = \psi(y_1) \leq 0 \quad (\forall y_1 > 0), \quad (27)$$

при котором функция (25) является (2π) – периодическим решением ДУ (24) ($a = b = 1$).

Следовательно, решение системы (23) определяется по формуле (7):

$$C^k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) e^{ik\theta} d\theta \quad (k \in \mathbf{Z}), \quad (28)$$

где ввиду (25) и (27)

$$y(\theta) = y_1 \operatorname{cn}^2\left(\sqrt{(y_1 - \psi(y_1))/2} (\theta - \theta_0), \kappa(y_1)\right) \quad (\kappa(y_1) = \sqrt{y_1/(y_1 - \psi(y_1))}). \quad (29)$$

Подставляя (29) в (22)

$$x^k(t) = (c^1)^k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) e^{ik\theta} d\theta \right) \exp(-ik C_0 t) \quad (k \in \mathbf{Z}), \quad (30)$$

а затем полученный результат в (9), находим 2π -периодическое решение ДУ (8):

$$u(\theta, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c^1)^k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) e^{ik\theta} d\theta \right) e^{-ik(\theta + C_0 t)}, \quad (31)$$

где $c^1 \in \mathbf{C}$ и $C_0 \in \mathbf{R}$ – допустимые постоянные. При этом знак «скорости»

$$C_0 = 2(y_1 + \psi(y_1))$$

зависит от $y_1 > 0$ и функции (27). Таким образом, величина $y_1 > 0$ является важнейшим «скрытым» параметром 2π -периодического решения (31). Явный же параметр $c^1 \in \mathbf{C}$ определяет многообразие 2π -периодических решений ДУ (8), получаемых описанным бариоперационным методом.

Остается заметить, что функция (29) – аналитическая, поэтому проблем с выполнением условия (2) для (30) и сходимостью ряда (31) (вместе со всеми его частными производными из ДУ (8)) при условии, что $|c^1| = 1$ не существует. Случаи, когда $|c^1| \neq 1$, требуют дополнительного исследования.

В заключение работы отметим, что изложенный метод нахождения периодического решения уравнения КдФ (8) применим к достаточно широкому классу линейных и нелинейных эволюционных уравнений. Причем в случае более общей конечномерной спектральной алгебры $\mathbf{A}$ (над полем $\mathbf{C}$) – к системам таких уравнений. Но об этом в последующей работе.

Библиографический список

1. Бородин, А. В. Барианализ точных решений нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / А. В. Бородин // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – №3 (52). – С. 72–78.
2. Бородин, А. В. Бариоперационный метод решения нелинейного эволюционного уравнения [Текст] / А. В. Бородин // Сб. тр. МНК ММТТ-23. – Т. 1. – Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 2010. – С. 61–63.
3. Бородин, А. В. Многомерный барианализ и его приложения. Часть I. [Текст] / А. В. Бородин. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2005. – 432 с.
4. Бородин, А. В. Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера [Текст] / А. В. Бородин. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 1997. – 177 с.
5. Гахов, Ф. Д. Уравнения типа свертки [Текст] / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М. : Наука, 1978. – 296 с.
6. Кантор, И. Л., Солодовников, А. С. Гиперкомплексные числа [Текст] / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – М. : Наука, 1973. – 144 с.
7. Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 543 с.
8. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / Н. А. Кудряшов. – М.-И. : Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.
9. Рудин, У. Функциональный анализ [Текст] / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 443 с.
10. Янке, Е. Специальные функции [Текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1977. – 344 с.