УДК 796.389

В. В. Афанасьев, И. Н. Непряев, С. В. Алаев, Е. А. Смирнов

Цепи Маркова в спортивных соревнованиях

В статье предлагаются новые вероятностные модели эстафетных гонок и стрельбы в биатлоне и арчери-биатлоне, игра на «больше-меньше» в настольном теннисе и определение победителя в серии буллитов в хоккее.

Ключевые слова: вероятность, цепи Маркова, вектор начальных вероятностей, граф и матрица перехода цепей Маркова, биатлон, арчери-биатлон, буллиты в хоккее.

V. V. Afanasiev, I. N. Nepryaev, S. V. Alaev, E. A. Smirnov

Markov Chains in Sports Competitions

In the article new probabilistic models of go-ahead races and firing in biathlon and archeri-biathlon, game on "more-less" in table tennis and definition of the winner in a series of bullets in hockey are offered.

Keywords: probability, Markov chains, a vector of initial probabilities, columns and a matrix of transition of Markov chains, biathlon, archeri-biathlon, bullets in hockey.

Процесс обучения будущих учителей по физической культуре и тренеров предполагает овладение рядом вероятностно-статистических компетенций и формирование вероятностно-статистического мышления. Данные положения необходимы учителю по физической культуре и тренеру для осуществления грамотного учебного и тренировочного процесса, для анализа и прогноза результатов ученика, спортсмена. В области физической культуры и спорта вероятностно-статистический подход изучается в рамках научной дисциплины «Спортивная метрология».

Современное состояние спортивной метрологии изложено В. М. Зациорским [5] и М. А. Годиком [4] в учебниках «Спортивная метрология» для институтов физической культуры.

В этом ряду работ достойное место занимает и учебное пособие ярославских ученых [2], в котором нашли отражение последние разработки авторов в математическом обеспечении метрологического контроля, статистических критериев в спорте и корреляционном анализе, интегральной оценке спортивных результатов и тестов.

Цель данного исследования – научить студентов факультета физической культуры определять и количественно измерять случай, случайность, мерой которой является вероятность, на моделях цепей Маркова в спортивных соревнованиях.

Для примера рассмотрим такую спортивную ситуацию, как эстафетная гонка по арчери-биатлону, в которой спортсмен выполняет пять основных выстрелов по пяти мишеням и имеет возможность сделать один дополнительный выстрел, что позволяет ему при одном промахе основными стрелами уйти на дистанцию без штрафа.

Вероятность попадания в мишень при одном выстреле примем за p ($0 < p < 1$) и будем считать ее постоянной для данного спортсмена. Рассмотрим вероятности возможных исходов с использованием основных и дополнительных стрел.

Примем за состояние цепи Маркова E_i = {число i попаданий основными стрелами}. (i = 0;1;2;3;4;5)

Свойство однородных цепей полностью определяется вектором начальных вероятностей и матрицей $\mathbf{P} = (p_{ij})$ вероятностей перехода. В некоторых случаях вместо матрицы **P** используют ориентированный граф, вершинами которого являются состояния цепи, а стрелка, идущая из состояния E_i в состояние E_j с числом p_{ij} рядом с ней, показывает, что из состояния E_i возможен переход в состояние E_j с вероятностью p_{ij}. В случае цепей Маркова с вектором начальных вероятностей

© Афанасьев В. В., Непряев И. Н., Алаев С. В., Смирнов Е. А., 2012

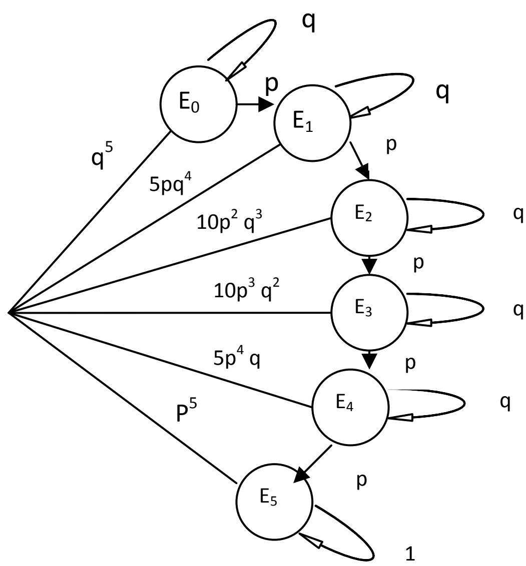
$\vec{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$ предлагается [1, с. 71–76] введение еще одной вершины графа, которая соединяется с состоянием E_i ребром с числом a_i рядом с ним.

Переход из одного состояния в другое в нашем случае зададим по результату попадания (или непопадания) дополнительной стрелой, а вектор начальных вероятностей определяется вероятностями всевозможных попаданий основными стрелами.

Для нахождения координат вектора ā используем формулу Бернулли для конечной серии из *n* повторных независимых испытаний $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где *m* – число «успехов», а *p* – вероятность «успеха» в одном испытании. В нашем случае *n* = 5. Получим вектор начальных вероятностей:

$\vec{a}\left(q^5, 5pq^4, 10p^2q^3, 10p^3q^2, 5p^4q, p^5\right)$.

Тогда граф данной цепи Маркова с учетом вектора начальных вероятностей выглядит следующим образом:



А матрица перехода –

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Покажем, как, используя матрицу и, особенно, граф цепей Маркова, можно достаточно просто получить многие вероятностные результаты при анализе соревнований в арчери-биатлоне.

Пример 1. Найти вероятности того, что спортсмен закроет:

а) все мишени;

б) четыре мишени;

в) по крайней мере, три мишени.

Решение. В матричном виде ответ записывается координатами вектора $\overline{a} \cdot P$.

Проще и нагляднее выглядит вероятность нахождения состояний по графу:

а) Вероятность оказаться в состоянии E_5 находится как сумма вероятностей попадания основными стрелами и четырех попаданий основными и одной дополнительной то есть: $p(E_5) = p^5 \cdot 1 + 5p^4 \cdot q \cdot p = p^5(1+5q)$;

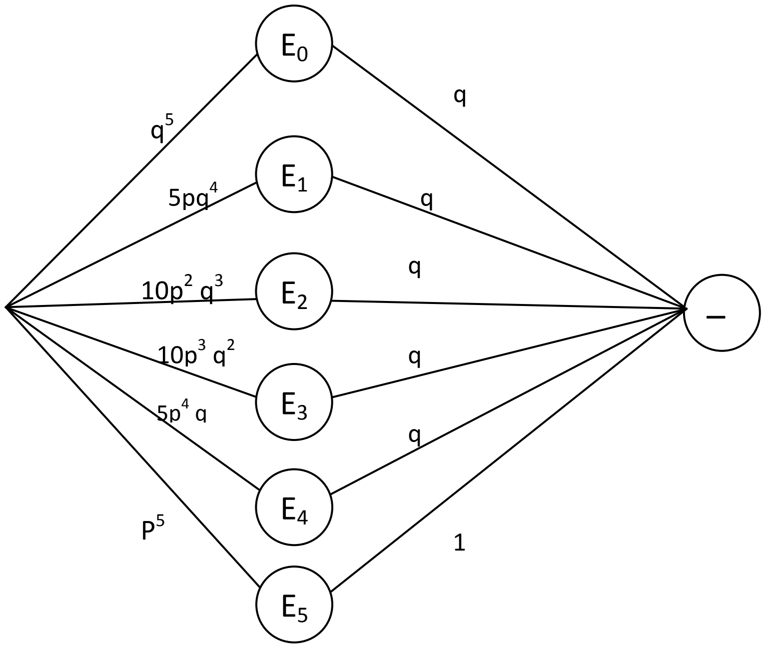
б) Аналогично находим $p(E_4) = (5p^4q) \cdot q + (10p^3q^2)p = 15p^4 \cdot q^2$;

в) вероятность того, что спортсмен закроет, по крайней мере, три мишени равна сумме трех вероятностей

$$p(E_3) + p(E_4) + p(E_5) = (10p^2q^3)p + (10p^3q^2) \cdot q + 15p^4q^2 + p^5(1+5q) =$$
$$= 20p^3 \cdot q^3 + 15p^4 \cdot q^2 + p^5(1+5q) = 15p^3q^2(q+p) + 5p^3q^3 + p^5(1+5q) =$$
$$= 5p^3q^2(3+q) + p^5(1+5q)$$

Пример 2. Найти вероятность того, что спортсмен и с дополнительной стрелой не улучшит свой результат стрельбы.

Решение. Используя интерпретацию на графе формулы полной вероятности (см. [1, с. 48]), получаем граф с гипотезами:



Искомую вероятность $P(-)$ находим как вес всего графа с гипотезами:

$$\mathrm{P}(-) = q^5 \cdot q + 5pq^4 \cdot q + 10p^2q^3q + 10p^3q^2q + 5p^4q \cdot q + p^5 \cdot 1 =$$
$$= (q+p)^5 \cdot q + p^5 - p^5 \cdot q = 1 \cdot q + p^5(1-q) = q + p^6$$

Пример 3. Найти вероятность $P(+)$ того, что спортсмен, используя дополнительную стрелу в эстафетной гонке в арчери-биатлоне, улучшит свой результат.

Решение. Как и в предыдущем случае, вероятности гипотез будут находиться как координаты вектора начальных вероятностей ā, а условную вероятность q заменим на p, а 1 – на 0. Тогда искомая вероятность вычисляется следующим образом:

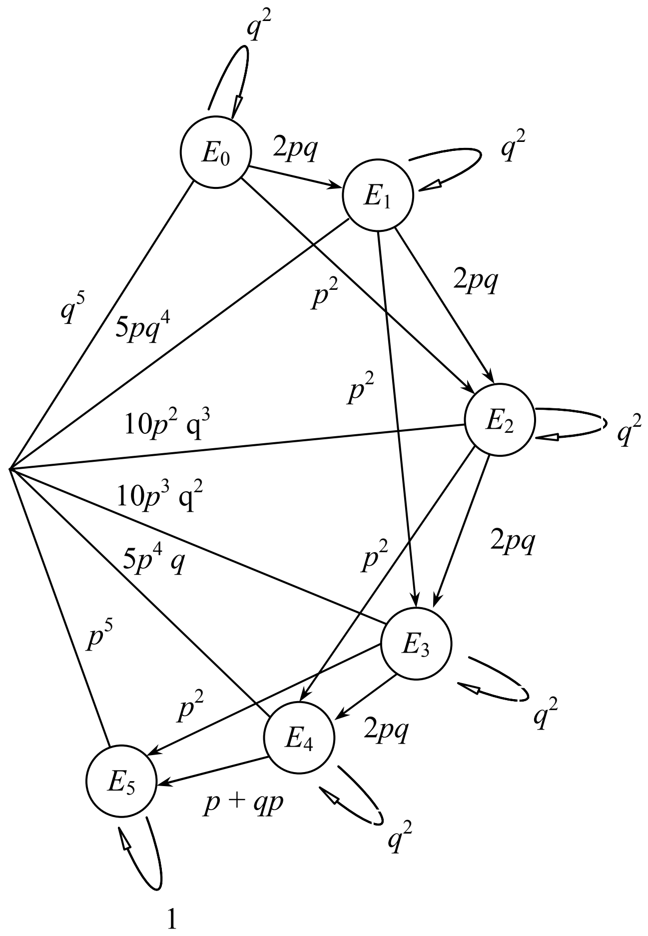
$$P(+) = q^5 \cdot p + 5p^4q \cdot p + 10p^2q^3p + 10p^3q^2p + 5pq^4 \cdot p + p^5 \cdot 0 =$$
$$= p(q+p)^5 - p^6 = p \cdot 1 - p^6 = p(1-p^5) = p(1-p)(1+p+p^2+p^3+p^4) =$$
$$= p \cdot q(1+p+p^2+p^3+p^4) = pq \cdot \frac{1-p^5}{1-p} = p \cdot (1-p^5)$$

Рассмотрим эстафетную гонку в биатлоне, которая включает в себя передвижение на лыжах и стрельбу из винтовки. На каждом огневом рубеже спортсмену необходимо поразить пять мишеней пятью выстрелами, а в коммерческих стартах спортсмену дается 5 основных и 2 дополнительных патрона.

Пример 4. Найти вероятность того, что спортсмен, используя два дополнительных патрона в коммерческих стартах, улучшит свой результат.

Решение. Как и в арчери-биатлоне, построим граф цепи Маркова, состояния которой определяются числом попаданий основными патронами, а переход задается результатами стрельбы двумя дополнительными патронами.

Биатлонист не улучшит свой результат, если дважды промахнется с вероятностью q^2, но улучшит, если два или один раз попадет в цель. Заметим, что при четырех закрытых мишенях этого возможно добиться первым дополнительным патроном, а при промахе – вторым.



$$P(+) = q^2\left(2pq + p^2\right) + 5pq\left(2pq + p^2\right) + 10p^2q^3\left(2pq + p^2\right) + 10p^3q^2\left(2pq + p^2\right) +$$

$$+ 5p^4q(p + pq) + p^5 \cdot 1 = \left(2pq + p^2\right)\cdot 1 - 5p^4q\left(2pq + p^2\right) - p^5\left(2pq + p^2\right) +$$

$$+ 5p^4q\left(pq + p^2\right) + p^5 = \left(2pq + p^2\right) - 5p^4q \cdot pq - p^5\left(p^2 + 2pq - 1\right) =$$

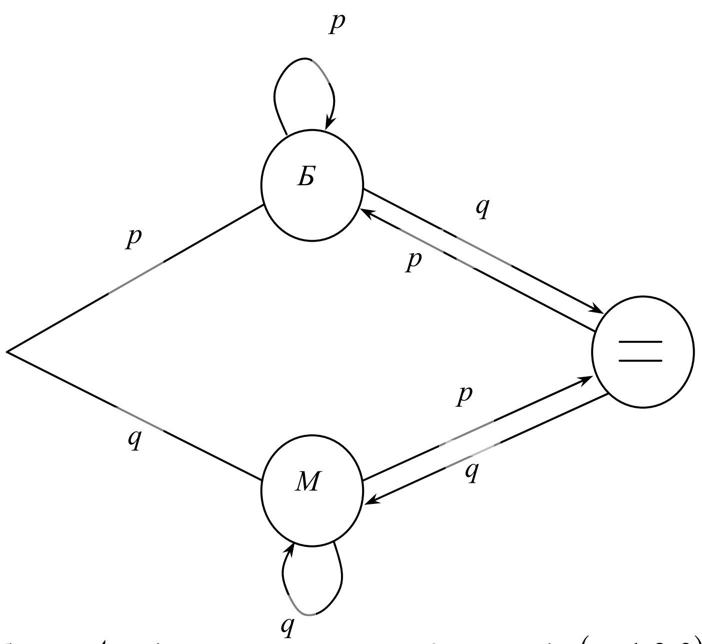
$$= 2pq + p^2 - 5p^5q^2 - p^5\left[(p+q)^2 - 1 - q^2\right] = 2pq + p^2 - 4p^2q^2 =$$

$$= (p+q)^2 - q^2 - 4p^2q^2 = 1 - q^2\left(1 + 4p^2\right).$$

Построением модели игры на примере большого тенниса занимались Садовские [6]. Предложим использование цепей Маркова в настольном теннисе. В настольном теннисе партию выигрывает игрок, первым набравший одиннадцать очков. Если по завершении партии спортсмены набрали одинаковое количество очков по десять, то партия продолжается до того момента, пока один из спортсменов не наберет на два очка больше соперника – это так называемая игра на «больше-меньше».

Пример 5. Найти вероятность того, что партия в настольном теннисе закончится на «больше-меньше» за две, четыре или шесть подач.

Решение. После каждой подачи возможны три исхода: «больше» (Б), «меньше» (М) и равно (=), которые и примем за состояния цепи Маркова. Обозначим вероятность выигрыша подачи первым игроком p, тогда вероятность выигрыша подачи вторым игроком будет q, (и $p+q=1$). Построим граф цепи Маркова с вектором начальных вероятностей $\vec{a}(p,q)$.



Примем за событие $A_i = \{$закончить партию за $2i$ подачи$\}$, $(i = 1, 2, 3)$.

Тогда искомые вероятности победы одного из игроков находим по построенному графу:

$P(A_1) = p \cdot p + q \cdot q = p^2 + q^2$;

$P(A_2) = (p \cdot q) \cdot p \cdot p + (p \cdot q) \cdot q \cdot q = p \cdot q \cdot (p^2 + q^2)$;

$P(A_3) = p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot p + p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q = p^2 \cdot q^2 \cdot (p^2 + q^2)$.

Пример 6. Найти условную вероятность победы первого игрока при условии, что достаточно будет двух подач и при $p = 0{,}6$.

Решение. Поскольку $P\left(A/B\right) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$, то

$$P_1 = \frac{p \cdot p}{p \cdot p + q \cdot q} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}6}{0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}36}{0{,}36 + 0{,}16} \approx 0{,}7 .$$

В современном хоккее в каждом матче определяется победитель, в случае ничейного счета в основное время проводится овер-тайм до первого гола, а в случае ничейного счета и после овер-тайма команды пробивают штрафные броски (буллиты). В начале обе команды по очереди производят по три буллита, а в случае ничейного счета результата соперничество продолжается поочередно до победы одной из команд.

Пример 7. Предложим вероятностную модель исполнения буллитов.

Решение. Вероятность результативного буллита каждой команды примем за p_1 и p_2 соответственно, тогда вероятность успешных действий вратарей и промаха бросающего будут находиться как q_1 и q_2, причем $p_i + q_i = 1$ $(i = 1; 2)$.

Примем за состояния цепи Маркова:

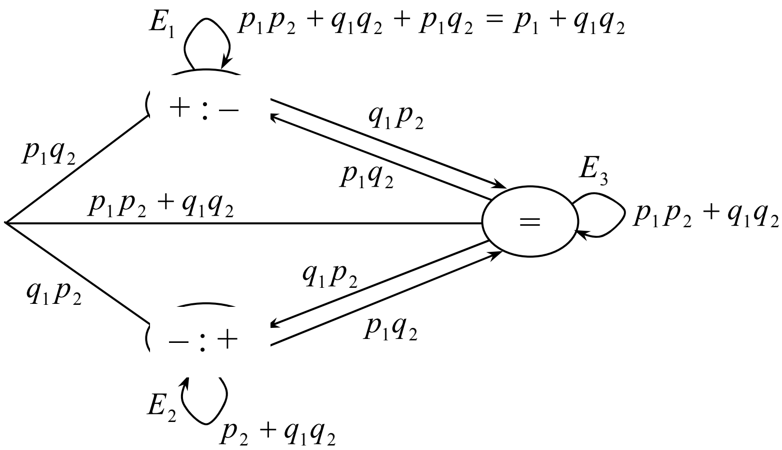
E_1 ={лидирует после пары буллитов I команда} = + : –

E_2 ={лидирует после пары буллитов II команда} = – : +

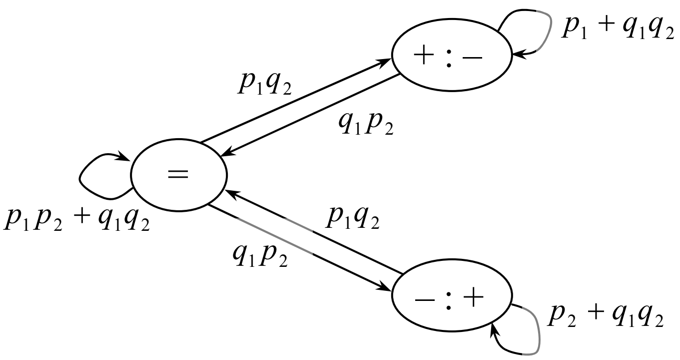
E_3 ={равенство результатов действий команд} = =

Переход из одного состояния в другое в нашем случае зададим по результату выполнения пары буллитов, а вектор начальных вероятностей – вероятностями выполнения первой пары буллитов.

Тогда граф данной цепи Маркова с учетом вектора начальных вероятностей выглядит следующим образом:



Возможна интерпретация результатов действий команд при реализации буллитов и просто на графе цепи Маркова без вектора начальных вероятностей. В этом случае граф и матрица перехода выглядят следующим образом:



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 + q_1q_2 & 0 & q_1p_2 \\ 0 & p_2 + q_1q_2 & p_1q_2 \\ p_1q_2 & q_1p_2 & p_1p_2 + q_1q_2 \end{bmatrix}$$

Пример 8. Найти вероятность окончания матча в первой серии штрафных бросков.

Решение. Пусть событие A = {матч закончится в первой серии штрафных бросков}.

Заметим, что в этом случае система за три шага должна оказаться в состоянии E_1 или E_2. Тогда искомая вероятность

$$P(A) = p_1q_2\left[(p_1 + q_1q_2)^2 + (q_1p_2)\cdot(p_1q_2) + (q_1p_2)\cdot(q_1p_2)\right] +$$
$$+ q_1p_2\left[(p_2 + q_1q_2)^2 + (p_1q_2)\cdot(q_1p_2) + (p_1q_2)^2\right] +$$
$$+ (p_1p_2 + q_1q_2)\left[(p_1p_2 + q_1q_2)\cdot(q_1p_2 + p_1q_2) + (p_1q_2)\cdot(p_1 + q_1q_2) + q_1p_2(p_2 + q_1q_2)\right].$$

Например, при $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$, что соответствует равенству сил встречающихся команд, проявившемуся ничейным результатом в основное время,

$$P(A) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right]\cdot 2 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\left[\frac{9}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{11}{16}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{10}{16}\right] = \frac{21}{32} \approx \frac{2}{3}.$$

Далее найдем вероятность победы одной из команд в первой серии бросков.

Пусть $A_1 = \{$матч закончится победой I-й команды в первой серии$\}$.

$$P(A_1) = p_1q_2\left[(p_1 + q_1q_2)^2 + (q_1p_2)\cdot(p_1q_2)\right] + (q_1p_2)\cdot(p_1q_2)\cdot(p_1q_2) +$$

$$+ (p_1p_2 + q_1q_2)\left[(p_1p_2 + q_1q_2)p_1q_2 + (p_1q_2)(p_1 + q_1q_2)\right].$$

При $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$.

$$P(A_1) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right] = \frac{21}{64} \approx \frac{1}{3}.$$

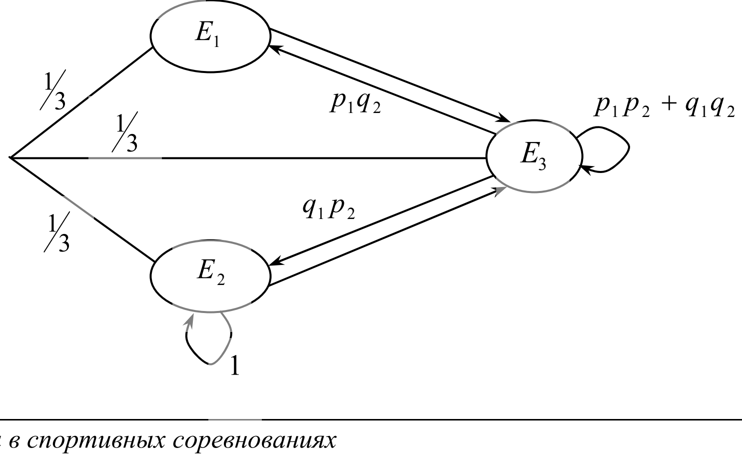
Рассмотрим случай $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{3}$, тогда $q_1 = q_2 = \dfrac{2}{3}$ (см. статистику).

$$P(A_1) = \frac{2}{9}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\right] + \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} + \left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)\left[\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{49}{81}+\frac{4}{81}\right)+\frac{8}{81\cdot 9}+\frac{5}{9}\left[\frac{10}{81}+\frac{14}{81}\right] = \frac{78}{243} \approx \frac{1}{3}.$$

Следовательно, победа каждой команды в первой серии буллитов, как и продолжения серии, оказались равновероятными.

Полученные данные позволяют предложить цепь Маркова с новым вектором начальных вероятностей, заданным вероятностями выбора каждого из трех состояний системы по результатам выполнения первой серии трех буллитов каждой командой.



Пример 9. Найти вероятность того, что серия буллитов закончится на четвертом броске.

Решение. Заметим, что выбор после окончания первой серии буллитов состояний E_1 или E_2 означает победу первой или второй команды соответственно.

По построенному графу найдем вероятность того, что серия закончится на четвертом броске:

$$P_4 = \frac{1}{3}\left[p_1 q_2 + q_1 p_2\right] = \frac{1}{3}\left[p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2\right] = \frac{1}{3}\left[p_1 + p_2 - 2p_1 p_2\right].$$

При $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ получаем, что $P_4 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$.

Заметим, что данные теоретические результаты хорошо согласуются с реальной статистикой исполнения буллитов в континентальной хоккейной лиге. Так, в сезоне 2011–2012 гг. 95 хоккейных матчей регулярного сезона закончились и с учетом дополнительного времени вничью. В этом случае победитель определялся по результатам поочередного исполнения командами трех буллитов (первая серия), а в случае сохранения ничейного результата – до первой победной шайбы. 31 поединок не закончился в первой серии, то есть относительная частота такого результата составила $\frac{31}{95} \approx 0{,}326$, что только на 0,007 (!) отличается от полученного в статье результата. 16 серий завершились после четвертого дополнительного броска, в этом случае относительная частота составляет $\frac{16}{95} \approx 0{,}168$. И этот реальный результат только на 0,001 отличается от теоретически найденного в настоящей работе.

Таким образом, сравнение полученных вероятностных оценок спортивных результатов в данном исследовании хорошо согласуется с их реальной статистикой.

Библиографический список

1. Афанасьев, В. В. Теория вероятностей: учебное пособие для студ. вузов, обучающихся по специальности «Математика» [Текст] / В. В. Афанасьев. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. – 350 с. – (Учебник для вузов).
2. Афанасьев, В. В. Спортивная метрология [Текст] : учебное пособие / В. В. Афанасьев, А. В. Муравьев, И. А. Осетров, П. В. Михайлов ; под ред. В. В. Афанасьева. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2009. – 242 с.
3. Вентцель, Е. С. Исследование операций : задачи, принципы, методология [Текст] / Е. С. Вентцель. − М. : Наука, 1980.
4. Годик, М. А. Спортивная метрология [Текст] / М. А. Годик. – М. : Физкультура и спорт, 1988. – 192 с.
5. Зациорский, В. М. Спортивная метрология [Текст] : учебник для ин-тов физ. культуры / В. М. Зациорский, В. Л. Уткин, Б. А. Суслаков ; под общ. ред. В. М. Зациорского. – М. : Физкультура и спорт, 1982. – 256 с.
6. Начинская, С. В. Спортивная метрология [Текст] : учебное пособие для студентов высших учебных заведений. Физическая культура / С. В. Начинская. – М. : AKADEMIA, 2005. – 238 с.