УДК 512.7

С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, Е. А. Рузанов

О многообразиях модулей $M_{P^3}(2;0,10)$ и $M_{P^3}(2;0,11)$ стабильных 2-расслоений с классами Черна $c_1=0$, $c_2=10$ и 11 на комплексном проективном пространстве

В данной статье мы находим число компонент Эйна в многообразиях модулей $M_{P^3}(2;0,10)$ и $M_{P^3}(2;0,11)$, вычисляем их размерности и устанавливаем соответствие этих компонент спектрам стабильных расслоений.

Ключевые слова: векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна, многообразие модулей.

S. A. Tikhomirov, A. P. Lyapin, E. A. Ruzanov

On Varities of Moduli $M_{P^3}(2;0,10)$ and $M_{P^3}(2;0,11)$ of Stable 2-Bundles with Chern's Classes $c_1=0$, $c_2=10$ and 11 on Complex Projective Space

In this article we find the number of Ein's components in varieties of moduli $M_{P^3}(2;0,10)$ and $M_{P^3}(2;0,11)$, calculate their dimensions and establish the correspondence of this components to spectra of stable bundles.

Keywords: vector bundle, stable bundle, Chern's classes, variety of moduli.

Для стабильного векторного расслоения ранга 2 на P^3 с $c_1=0$ и наперед заданным c_2 понятие спектра в характеристике 0 было дано В. Бартом и Г. Эленцвайгом в статье [6]. В случае произвольной характеристики понятие спектра было введено Р. Хартсхорном в [8]. В дальнейшем через χ_E будем обозначать спектр расслоения E. Все возможные значения для спектров расслоений и типы монад, когомологическими пучками которых они являются. Эти расслоения при $1\le c_2\le 8$ были перечислены Р. Хартсхорном и А. П. Рао в статье [9]. Л. Эйн в работе [7] рассмотрел специальный класс стабильных векторных расслоений ранга 2 на P^3 – класс так называемых обобщенных нуль-корреляционных расслоений E_2, являющихся когомологическими пучками монад типа

$$0\to O_{P^3}(-c)\to O_{P^3}(-b)\oplus O_{P^3}(-a)\oplus O_{P^\#}(a)\oplus O_{P^\#}(b)\to O_{P^3}(c)\to 0, \qquad (1)$$

где a,b и c – целые числа, удовлетворяющие условию

$$c>b\ge a\ge 0. \qquad (2)$$

В этом случае, как нетрудно вычислить, $c_1(E_2)=0$, $c_2(E_2)=c^2-a^2-b^2$. Более того, Л. Эйн показал, что такие расслоения стабильны тогда и только тогда, когда

$$c>a+b, \qquad (3)$$

и из утверждения (a) теоремы 3.1 работы [7] следует, что пространство (многообразие) модулей $M_{P^3}(2;0,c^2-a^2-b^2)$ стабильных 2-расслоений с $c_1=0$ и $c_2=c^2-a^2-b^2$ на P^3 над комплексным полем C имеет гладкую неприводимую компоненту $N(a,b,c)$, общая точка которой соответствует классу расслоений, являющихся когомологическими пучками монад типа (1). Такие компоненты будем называть *компонентами Эйна*.

Далее, В. Барт, обозначая левый крайний член монады через A, средний – через B, а правый крайний – через C соответственно, предъявил в работе [5] формулу, по которой в случае, когда A, B и C –

фиксированные прямые суммы линейных расслоений и $Hom_{O_{P^3}}(C,B)=0$, можно вычислять размерности μ множеств локально замкнутых в $M_{P^3}(2;0,n)$ классов стабильных 2-расслоений на P^3 с классами Черна $c_1=0$ и $c_2=n$:

$$\mu=\dim Hom_{o_{p^3}}(B,C)-h^0(\Lambda^2 C)-\dim GL(C)-h^0(S^2B). \qquad (4)$$

Напомним некоторые результаты, касающиеся компонент Эйна (см. также [10]).

1. В пространствах $M_{P^3}(2;0,1)$, $M_{P^3}(2;0,2)$ *и* $M_{P^3}(2;0,6)$ *нет компонент Эйна.*

2. В пространстве $M_{P^3}(2;0,3)$ *имеется единственная компонента Эйна: классы расслоений, обладающих спектром* $(-1,0,1)$ *и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-2)\to O_{P^3}(-1)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(1)\to O_{P^3}(2)\to 0$, *образуют компоненту Эйна размерности 21.*

3. В пространстве $M_{P^3}(2;0,4)$ *имеется единственная компонента Эйна: классы расслоений, обладающих спектром* $(-1,0,0,1)$ *и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-2)\to \oplus 4O_{P^3}\to O_{P^3}(2)\to 0$, *образуют компоненту Эйна размерности 29.*

4. В пространстве $M_{P^3}(2;0,5)$ *имеется единственная компонента Эйна: классы расслоений, обладающих спектром* $(-2,-1,0,1,2)$ *и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-3)\to O_{P^3}(-2)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(2)\to O_{P^3}(3)\to 0$, *образуют компоненту Эйна размерности 40.*

5. В пространстве $M_{P^3}(2;0,7)$ *имеются 2 компоненты Эйна: компонента размерности 55, содержащая классы расслоений, обладающих спектром (-2,-1,-1,0,1,1,2) и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-3)\to 2O_{P^3}(-1)\oplus 2O_{P^3}(1)\to O_{P^3}(3)\to 0$, *и компонента размерности 65, содержащая классы расслоений, имеющих спектр (-3,-2,-1,0,1,2,3) и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-4)\to O_{P^3}(-3)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(3)\to O_{P^3}(4)\to 0$.

6. В пространстве $M_{P^3}(2;0,8)$ *имеется единственная компонента Эйна размерности 62, содержащая классы расслоений, обладающих спектром (-2,-1,-1,0,0,1,1,2) и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-3)\to O_{P^3}(-1)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(1)\to O_{P^3}(3)\to 0$.

7. В пространстве $M_{P^3}(2;0,9)$ *имеются 2 компоненты Эйна: компонента размерности 69, содержащая классы расслоений, обладающих спектром (-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2) и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-3)\to 4O_{P^3}\to O_{P^3}(3)\to 0$, *и компонента размерности 96, содержащая классы расслоений, имеющих спектр (-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4) и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-5)\to O_{P^3}(-4)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(4)\to O_{P^3}(5)\to 0$ $0\to O_{P^3}(-3)\to 4O_{P^3}\to O_{P^3}(3)\to 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *В пространстве* $M_{P^3}(2;0,10)$ *нет компонент Эйна. В пространстве* $M_{P^3}(2;0,11)$ *имеются 2 компоненты Эйна: компонента размерности 98, содержащая классы расслоений, обладающих спектром (-3,-2-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3) и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-4)\to O_{P^3}(-2)\oplus O_{P^3}(-1)\oplus O_{P^3}(1)\oplus O_{P^3}(2)\to O_{P^3}(4)\to 0$, *и компонента размерности 133, содержащая классы расслоений, имеющих спектр (-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5) и задаваемых монадой типа* $0\to O_{P^3}(-6)\to O_{P^3}(-5)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(5)\to O_{P^3}(6)\to 0$.

Доказательство. В силу условий (2) и (3) имеем: b=a+r, c=2a+r+1+q, где r,q≥ 0, тогда $c_2(E_2)=(2a+r+1+q)^2-(a+r)^2-a^2=(2a+r)^2+(1+q)^2+2(2a+r)(1+q)-2a^2-2ar-r^2=4a^2+4ar+r^2+1+2q+q^2+4a+4aq+2r+2rq-2a^2-2ar-r^2=2a^2+2ar+4a+4aq+2r+2rq+1+2q+q^2$, и поскольку a, r и q – неотрицательные целые числа, а само выражение представляет собой сумму единицы и произведений этих трех переменных в неотрицательных степенях, то мы получаем возрастающую функцию от трех переменных, принимающую натуральные значения при подстановке конкретных значений a,r и q (фиксируя любые две из трех переменных, легко проверяем, что получается возрастающая функция от оставшейся переменной). Анализируя данную функцию, мы элементарными вычислениями получаем: при $a \geq 2$ $c_2(E_2) \geq 17$, что нас не устраивает; при a=0, r=5, q=0 (тем самым, b=5 и c=6) $c_2(E_2)=11$; при a=1, r=1, q=0 (тем самым, b=2 и c=4) $c_2(E_2)=11$ и других подходящих троек нет. Таким образом, в пространстве $M_{P^3}(2;0,10)$ нет компонент Эйна, а в пространстве $M_{P^3}(2;0,11)$ имеются в точности 2 компоненты Эйна. Установим соответствие этих компонент спектрам стабильных 2-расслоений на P^3 с $c_1=0$ и $c_2=11$ и найдем их размерности.

В работе [4] было указано точное количество реализуемых спектров стабильных расслоений ранга 2 на P^3 с классами Черна $c_1 = 0$ и $1 \leq c_2 \leq 19$. В частности, было показано, что для $c_2=11$ имеется 19 реализуемых спектров. Перечислим эти спектры:

1. (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0); 2. (-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1); 3. (-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,1); 4. (-2,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,2); 5. (-1,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,1); 6. (-2,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,2); 7. (-3,-2,-1,0,0,0,0,0,1,2,3); 8. (-1,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,1); 9. (-2,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,2); 10. (-2,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2,2); 11. (-3,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2,3); 12. (-4,-3,-2,-1,0,0,0,1,2,3,4); 13. (-1,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,1); 14. (-2,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,2); 15. (-2,-2,-1,-1,-1,0,1,1,1,2,2); 16. (-3,-2,-1,-1,-1,0,1,1,1,2,3); 17. (-3,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3); 18. (-4,-3,-2,-1,-1,0,1,1,2,3,4); 19. (-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5).

I. Рассмотрим случай a=0, b=5, c=6. Тогда монада (1) имеет вид:

$0 \to O_{P^3}(-6) \to O_{P^3}(-5) \oplus 2O_{P^3} \oplus O_{P^3}(5) \to O_{P^3}(6) \to 0$. Соответственно, дисплей монады имеет вид:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-6) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-6) \arrow[r] & O_{P^3}(-5) \oplus 2O_{P^3} \oplus O_{P^3}(5) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & & O_{P^3}(6) \arrow[r, equal] \arrow[d] & O_{P^3}(6) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

где L и Q – некоторые пучки. Тем самым для $E_2(-1)$ диаграмма имеет вид:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-7) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{L}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}_2(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-7) \arrow[r] & O_{P^3}(-6) \oplus 2O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(4) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Q}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & & O_{P^3}(5) \arrow[r, equal] \arrow[d] & O_{P^3}(5) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

откуда с учетом стабильности E_2 легко получаем равенство $h^1E_2(-1)=21$. Аналогично для $E_2(-2)$ имеем диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-8) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{L}(-2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}_2(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to O_{P^3}(-8)\to & O_{P^3}(-7)\oplus 2O_{P^3}(-2)\oplus O_{P^3}(3) & \to & Q(-2) & \to 0, \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & O_{P^3}(4) & = & O_{P^3}(4) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

откуда с учетом стабильности E_2 также легко получаем равенство $h^1E_2(-2)$= 15. Теперь рассмотрим спектр под номером 19 из вышепредставленного перечня. По технологии Барта (см. работу [5]) имеем $h^1E_2(-1)=h^0K$, $h^1E_2(-2)=h^0K(-1)$, $K=\oplus\ O_{P^1}(k)$, а числа k пробегают наш спектр. Элементарным вычислением получаем $h^1E_2(-1)=21$, $h^1E_2(-2)=15$. Тем самым в силу единственности спектра [8] получаем, что наша компонента Эйна соответствует именно спектру с порядковым номером 19. Применяя формулу Барта (4), найдем размерность μ этой компоненты:

1) dim Hom ($O_{P^3}(-5)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(5)$, $O_{P^3}(6)$)=$h^0O_{P^3}(11)+h^0 2O_{P^3}(6)+h^0O_{P^3}(1)=$

=364+168+4=536; 2) dim Hom ($O_{P^3}(6)$, $O_{P^3}(6)$)=$h^0O_{P^3}$=1; 3) $h^0(\Lambda^2(O_{P^3}(6)))$=0;

4) $h^0(S^2(\ O_{P^3}(-5)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(5)\ ))=h^0(S^2(\ O_{P^3}(-5)\oplus 2O_{P^3}))+h^0O_{P^3}(10)+h^0O_{P^3}+$

$+h^0 2O_{P^3}(5)=h^0O_{P^3}(-10)+h^0 3O_{P^3}+h^0 2O_{P^3}(-5)$ +286+1+112=0+3+0+399=402.

Таким образом, μ=536-1-0-402=133.

II. Теперь рассмотрим случай a=1, b=2, c=4. Тогда монада (1) имеет вид: $0\to O_{P^3}(-4)\to O_{P^3}(-2)\oplus O_{P^3}(-1)\oplus O_{P^3}(1)\oplus O_{P^3}(2)\to O_{P^3}(4)\to 0$. Соответственно, дисплеи монад для E_2, $E_2(-1)$ и $E_2(-2)$ имеют вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to O_{P^3}(-4)\to & L_1 & \to & E_2 & \to 0 \\
\| & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to O_{P^3}(-4)\to & O_{P^3}(-2)\oplus O_{P^3}(-1)\oplus O_{P^3}(1)\oplus O_{P^3}(2) & \to & Q_1 & \to 0, \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & O_{P^3}(4) & = & O_{P^3}(4) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to O_{P^3}(-5)\to & L_1(-1) & \to & E_2(-1) & \to 0 \\
\| & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to O_{P^3}(-5)\to & O_{P^3}(-3)\oplus O_{P^3}(-2)\oplus O_{P^3}\oplus O_{P^3}(1) & \to & Q_1(-1) & \to 0, \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & O_{P^3}(3) & = & O_{P^3}(3) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to O_{P^3}(-6)\to & L_1(-2) & \to & E_2(-2) & \to 0 \\
\| & \downarrow & & \downarrow &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to O_{P^3}(-6) \to & O_{P^3}(-4) \oplus O_{P^3}(-3) \oplus O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3} & \to & Q_1(-2) \to 0, \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & O_{P^3}(2) & = & O_{P^3}(2) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 & & 0 \end{array}$$

где L_1 и Q_1 – некоторые пучки. Из двух последних монад с учетом стабильности E_2 также легко получаем, соответственно, равенства $h^1E_2(-1)= 15$ и $h^1E_2(-2)=9$. Рассмотрим спектр под номером 17 из вышепредставленного перечня. Снова по технологии Барта очевидным образом имеем $h^1E_2(-1)=15$, $h^1E_2(-2)=9$. Следовательно, рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что наша компонента Эйна соответствует в точности спектру с порядковым номером 17. Снова применяя формулу Барта (4), найдем размерность μ этой компоненты:

1) dim Hom ($O_{P^3}(-2) \oplus O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(1) \oplus O_{P^3}(2)$, $O_{P^3}(4)$)= $h^0 O_{P^3}(6) + h^0 O_{P^3}(5) +$ $+ h^0 O_{P^3}(3) + h^0 O_{P^3}(2)$ =84+56+20+10=170; 2) dim Hom ($O_{P^3}(4)$, $O_{P^3}(4)$)= $h^0 O_{P^3}$ =1;

3) $h^0(\Lambda^2(O_{P^3}(4)))$=0; 4) $h^0(S^2(\ O_{P^3}(-2) \oplus O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(1) \oplus O_{P^3}(2)\ )) = h^0(S^2(O_{P^3}(-2) \oplus$ $\oplus O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(1))) + h^0 O_{P^3}(4) + h^0 O_{P^3} + h^0 O_{P^3}(1) + h^0 O_{P^3}(3)$ =60+ $h^0(S^2(O_{P^3}(-2) \oplus$ $O_{P^3}(-1) + h^0 O_{P^3}(2) + h^0 O_{P^3}(-1) + h^0 O_{P^3} = 71 + h^0 O_{P^3}(-4) + h^0 O_{P^3}(-2) + h^0 O_{P^3}(-3)$ =71.

Таким образом, μ=170-1-0-71=98. Теорема доказана.

Замечание. 1) Выше мы указали на отсутствие компонент Эйна, когда $M_{P^3}(2;0,1)$, подразумевая, что в этом случае классы расслоений, удовлетворяющих условиям (1), (2) и (3), дают нам все $M_{P^3}(2;0,1)$, но не какое-либо его собственное подмножество.

2) Как известно, в многообразии $M_{P^3}(2;0,n)$ для любого натурального n всегда имеется так называемая «инстантонная» компонента «правильной» размерности 8n-3. В работах [1] и [2] показана ее неприводимость, в работе [10] – гладкость, в работе [11] – рациональность.

Библиографический список

1. Тихомиров, А. С. Модули математических инстантонных векторных расслоений с нечетным c_2 на проективном пространстве [Текст] / А. С.Тихомиров // Принято к печати в «Известия РАН. Серия математическая». – 2012. – № 5. – С. 82.

2. Тихомиров, А. С. Модули математических инстантонных векторных расслоений с четным c_2 на проективном пространстве [Текст] / А. С.Тихомиров // Принято к печати в «Известия РАН. Серия математическая». – 2013. – № 4. – С. 23.

3. Тихомиров, С. А. К вопросу о поиске компонент в пространствах модулей $M_{P^3}(2;0,n)$ стабильных векторных расслоений ранга 2 на P^3 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n$ [Текст] / С. А.Тихомиров // Математика, информатика, физика, астрономия и экономика (материалы международной конференции «Чтения Ушинского»). – Ярославль : ЯГПУ, 2008. – С. 7–9.

4. Тихомиров, С. А., Смирнова, А. А. Спектры стабильных расслоений ранга 2 на P^3 с классами Черна $c_1 = 0$ и $1 \le c_2 \le 19$ [Текст] / С. А.Тихомиров, А. А.Смирнова // Ярославский педагогический вестник. Серия «Физико-математические и естественные науки». – 2010. – № 2. – С. 5–7.

5. Barth W. Some experimental data. In: les equations de Yang-Mills. A.Douady, J.-L.Verdier, eds, seminaire E.N.S. 1977-1978, Asterisque, 71–72 (1980), 205–218.

6. Barth W., Elencwajg G. Concernant la cohomologie des fibres algebriques sur P_n // Springer Lecture Notes, 683 (1978), 1–24.

7. Ein L. Generalized null correlation bundles // Nagoya Math. J., 111 (1988), 13–24.

8. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.

9. Hartshorne R., Rao A. P. Spectra and monads of stable bundles // J. Math. Kyoto Univ., 31, № 3 (1991), 789–806.
10. Jardim M., Verbitsky M. Trihyperkahler reduction and instanton bundles on CP^3 // arXiv:1103.4431, 40 p.
11. Markushevich D., Tikhomirov A.S. Rationality of instanton moduli // arXiv:1012.4132, 18 p.