УДК 517.9

А. В. Ястребов

Аналитическое доказательство теоремы Маклорена об уточнениях неравенства Коши

Приводится аналитическое доказательство теоремы Маклорена об уточнениях неравенства Коши, которое отличается от известных алгебраических доказательств.

Ключевые слова: теорема Маклорена, неравенство Коши, уточнение неравенства Коши, элементарная симметрическая функция.

A. V. Yastrebov

Analytical Proof of Maclaurin's Theory Concerning Refining of Cauchy Inequality

We give an analytical proof of Maclaurin's theorem, which differs from the well-known algebraic proofs.

Keywords: Maclaurin's theorem, Cauchy inequality, refining of Cauchy inequality, a primary symmetric function.

1. Формулировка теоремы Маклорена и цель статьи

Пусть даны n положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$. Хорошо известно, что их среднее арифметическое A_n и среднее геометрическое G_n связаны неравенством Коши $A_n \ge G_n$. Оно подробно изучалось разными авторами (см., например, знаменитую монографию [3] или более новую книгу [1]). Одним из направлений такого изучения является поиск уточнений неравенства Коши. При этом под аддитивным уточнением неравенства Коши понимается возможность обоснования неравенств типа $A_n \ge G_n + r$, где $r > 0$, а под мультипликативным уточнением – возможность обоснования неравенств типа $A_n \ge G_n s$, где $s > 1$ [1, с. 204]. Очевидно, что в обоих случаях речь идет о поиске величины α_n, удовлетворяющей неравенству $A_n \ge \alpha_n \ge G_n$.

Одним из сильных и красивых результатов такого рода является теорема Маклорена [3, с. 69, теор. 52]. Для ее формулировки введем необходимые обозначения.

Пусть σ_{nk} – элементарная симметрическая функция степени k от n переменных:

$$\sigma_{nk} := \sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}\,,\ n = 2,3,\ldots,\ k = \overline{1,n}. \quad (1)$$

Здесь и далее символ $:=$ означает «равно по определению», причем двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Для удобства дальнейших вычислений условимся считать, что

$$\sigma_{n0} := 1,\ n = 1,2,\ldots;\ \sigma_{n,-1} := 0;\ \sigma_{11}(x) := x. \quad (2)$$

Определение. Арифметико-геометрическим средним порядка k от n положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ будем называть величину

$$\rho_{nk} := \rho_{nk}(x_1,\ldots,x_n) := \sqrt[k]{\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)\big/ C_n^k}\,,\ k = \overline{1,n}. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что при переходе от σ_{nk} к ρ_{nk} мы сначала «нормируем» величину σ_{nk}, поделив ее на количество слагаемых в правой части равенства (1), а затем извлекаем корень соответствующей степени. Благодаря этому выполняются равенства $\rho_{n1} = A_n$ и $\rho_{nn} = G_n$, а все функции ρ_{nk} становятся однородными функциями степени 1.

Теорема Маклорена. Арифметико-геометрические средние n положительных чисел $x_1,\dots,x_n$ удовлетворяют нестрогим неравенствам

$$A_n=\rho_{n1}\ge\rho_{n2}\ge\dots\ge\rho_{nn}=G_n. \qquad (4)$$

Для того чтобы при некотором k выполнялось равенство $\rho_{n,k-1}=\rho_{nk}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Два доказательства этой теоремы, изложенные в книге [3, с. 69–72], носят чисто алгебраический характер. *Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы доказать теорему Маклорена методами дифференциального исчисления функций от нескольких переменных [2].*

2. Аналитическое доказательство теоремы Маклорена

Лемма 1. Элементарные симметрические функции удовлетворяют равенствам

$$\begin{gathered}\sigma_{nk}(x_1,\dots,x_n)=x_i\sigma_{n-1,k-1}(x_1,\dots,\overline{x_i},\dots,x_n)+\\+\sigma_{n-1,k}(x_1,\dots,\overline{x_i},\dots,x_n),\ k=\overline{1,n},\ i=\overline{1,n}.\end{gathered}, \qquad (5)$$

(Здесь и далее черта над аргументом $\overline{x_i}$ означает, что он пропущен в последовательности аргументов $x_1,\dots,x_n$.)

Доказательство. Пусть $n\ge 2$ и $k=\overline{2,n}$. Докажем формулу (5) для аргумента x_1. Для этого в формуле (1) сгруппируем слагаемые, объединив те из них, которые содержат (или не содержат) x_1:

$$\sigma_{nk}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1=i_1<i_2<\dots<i_k\le n}x_1x_{i_2}\cdots x_{i_k}+\sum_{2\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}.$$

Применив формулу (1) к каждой из двух сумм, получим равенство

$$\sigma_{nk}(x_1,\dots,x_n)=x_1\sigma_{n-1,k-1}(x_2,\dots,x_n)+\sigma_{n-1,k}(x_2,\dots,x_n).$$

Таким образом, мы доказали равенство (5) при $i=1$. Его справедливость при $i=\overline{2,n}$ вытекает из симметрии функции σ_{nk}.

При $n\ge 2$ и $k=1$ справедливо равенство $\sigma_{n1}(x_1,\dots,x_n)=x_1\cdot 1+(x_2+\dots+x_n)$, которое с учетом одной из формул (2) можно переписать в виде

$$\sigma_{n1}(x_1,\dots,x_n)=x_1\sigma_{n-1,0}(x_2,\dots,x_n)+\sigma_{n-1,1}(x_2,\dots,x_n).$$

При $n=2$ и $k=1$ справедливо равенство $\sigma_{21}(x_1,x_2)=x_1\cdot 1+x_2$, которое в силу формул (2) можно переписать в виде $\sigma_{21}(x_1,x_2)=x_1\sigma_{10}(x_2)+\sigma_{11}(x_2)$.

Лемма 2. При $n\ge 2$ и $k=\overline{1,n}$ не существует такой константы λ, чтобы для любых значений переменных $x_1,\dots,x_n$ выполнялось равенство $\sigma_{n,k-1}(x_1,\dots,x_n)+\lambda\sigma_{nk}(x_1,\dots,x_n)=0$.

Доказательство очевидно, поскольку функции $\sigma_{n,k-1}(x_1,\dots,x_n)$ и $\sigma_{nk}(x_1,\dots,x_n)$ представляют собой многочлены *разных* степеней и, следовательно, линейно независимы над полем вещественных чисел.

Лемма 3. Для функций σ_{nk} справедливы следующие формулы дифференциального исчисления:

$$\frac{\partial\sigma_{nk}}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=\sigma_{n-1,k-1}(x_1,\dots,\overline{x_i},\dots,x_n),\ i=\overline{1,n}; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{nk}}{\partial x_i^2}(x_1,\dots,x_n)=0,\ i=\overline{1,n}; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{nk}}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)=\sigma_{n-2,k-2}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,\overline{x_j},\ldots,x_n),\ 1\le i<j\le n; \quad (8)$$

$$d\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{n-1,k-1}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,x_n); \quad (9)$$

$$d^2\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)=2\sum_{1\le i<j\le n}\sigma_{n-2,k-2}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,\overline{x_j},\ldots,x_n)dx_i dx_j. \quad (10)$$

Доказательства формул (6)–(8) можно получить, проводя дифференцирование с использованием формулы (5).

Приступим к формулировке предложения, на котором базируется доказательство теоремы Маклорена. Рассмотрим поверхность S, задаваемую неявным уравнением

$$\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)-C_n^k=0,\ k\ge 2, \quad (11)$$

считая при этом, что *все аргументы положительны*.

Предложение. Функция $\sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)$ с положительными аргументами достигает на поверхности S глобального минимума. Это происходит в единственной точке $\widetilde{x}=(1,1,\ldots,1)$ и имеет значение C_n^{k-1}.

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=\sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)+\lambda(\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)-C_n^k) \quad (12)$$

и найдем критические точки данной функции. Для этого нужно составить систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\equiv 0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}\equiv 0\end{cases}$, $i=\overline{1,n}$, которая с учетом формул (6) примет вид

$$\begin{cases}\sigma_{n-1,k-2}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,x_n)+\lambda\sigma_{n-1,k-1}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,x_n)=0,\ i=\overline{1,n}\\ \sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)-C_n^k=0\end{cases}. \quad (13)$$

В первом равенстве системы (13) положим $i=1,2$ и выпишем соответствующие уравнения:

$$\begin{cases}\sigma_{n-1,k-2}(x_2,x_3,\ldots,x_n)+\lambda\sigma_{n-1,k-1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)=0\\ \sigma_{n-1,k-2}(x_1,x_3,\ldots,x_n)+\lambda\sigma_{n-1,k-1}(x_1,x_3,\ldots,x_n)=0\end{cases}. \quad (14)$$

К каждому из слагаемых первого уравнения системы (14) применим лемму 1 (формула (5)), выделив слагаемые с множителем x_2 и без него. Аналогично к каждому из слагаемых второго равенства системы (14) применим лемму 1, выделив слагаемые с множителем x_1 и без него. Получим, что

$$\begin{cases}x_2\sigma_{n-2,k-3}(x_3,\ldots,x_n)+\sigma_{n-2,k-2}(x_3,\ldots,x_n)+\lambda[x_2\sigma_{n-2,k-2}(x_3,\ldots,x_n)+\\ \qquad +\sigma_{n-2,k-1}(x_3,\ldots,x_n)]=0\\ x_1\sigma_{n-2,k-3}(x_3,\ldots,x_n)+\sigma_{n-2,k-2}(x_3,\ldots,x_n)+\lambda[x_1\sigma_{n-2,k-2}(x_3,\ldots,x_n)+\\ \qquad +\sigma_{n-2,k-1}(x_3,\ldots,x_n)]=0\end{cases} \quad (15)$$

Вычтем из первого равенства системы (15) второе равенство. После взаимного уничтожения равных слагаемых и приведения подобных получим, что

$$(x_2-x_1)[\sigma_{n-2,k-3}(x_3,\ldots,x_n)+\lambda\sigma_{n-2,k-2}(x_3,\ldots,x_n)]=0.$$

Согласно лемме 2 всегда можно подобрать такие значения аргументов $x_3,\ldots,x_n$, что выражение в квадратных скобках, стоящее в последнем равенстве, отлично от нуля. В силу этого $x_1 = x_2 = x$. Аналогично можно получить, что $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$, … $x_{n-1} = x_n = x$. Для нахождения x подставим значения $x_i = x$, $i = \overline{1,n}$, в уравнение связи (11). Получим, что $x^k C_n^k - C_n^k = 0$, откуда $x = 1$.

Итак, критической точкой функции $\sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)$ на поверхности S является точка $\tilde{x} = (1,1,\ldots,1)$.

2. Найдем множитель λ. Для этого подставим координаты точки $\tilde{x}$ в первое равенство системы (13). Получим, что $\sigma_{n-1,k-2}(1,1,\ldots,1) + \lambda\sigma_{n-1,k-1}(1,1,\ldots,1) = 0$, или $C_{n-1}^{k-2} + \lambda C_{n-1}^{k-1} = 0$. Отсюда $\lambda = -\dfrac{C_{n-1}^{k-2}}{C_{n-1}^{k-1}} = -\dfrac{k-1}{n-k+1}$. Окончательно получаем, что функция Лагранжа из равенства (12) имеет вид

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = \sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n) + \frac{k-1}{n-k+1}(\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n) - C_n^k). \quad (16)$$

3. Покажем, что критическая точка $\tilde{x}$ является точкой локального минимума. Сделаем это с помощью второго дифференциала функции F, вычисленного в точке $\tilde{x}$.

3.1. Дважды продифференцируем равенство (16) и применим формулу (10):

$$d^2F(x_1,\ldots,x_n) = d^2\sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n) - \frac{k-1}{n-k+1}d^2\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n) =$$
$$= 2\sum_{1\le i<j\le n}\sigma_{n-2,k-3}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,\overline{x_j},\ldots,x_n)dx_i dx_j -$$
$$-\frac{k-1}{n-k+1}2\sum_{1\le i<j\le n}\sigma_{n-2,k-2}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,\overline{x_j},\ldots,x_n)dx_i dx_j$$

3.2. Подставим в полученное равенство координаты точки $\tilde{x}$. Получим, что $d^2F(\tilde{x}) = 2\sum\limits_{1\le i<j\le n}\left[\sigma_{n-2,k-3}(1,1,\ldots,1) - \dfrac{k-1}{n-k+1}\sigma_{n-2,k-2}(1,1,\ldots,1)\right]dx_i dx_j$, откуда

$$d^2F(\tilde{x}) = 2\sum_{1\le i<j\le n}\left[C_{n-2}^{k-3} - \frac{k-1}{n-k+1}C_{n-2}^{k-2}\right]dx_i dx_j.$$

По формулам для числа сочетаний получим, что числовой коэффициент при $dx_i dx_j$ равен $-\dfrac{C_{n-2}^{k-2}}{n-k+1}$, так что последнее равенство примет вид

$$d^2F(\tilde{x}) = -\frac{C_{n-2}^{k-2}}{n-k+1}\sum_{1\le i<j\le n}2dx_i dx_j. \quad (17)$$

3.3. Покажем, что полученная квадратичная форма является положительно определенной.

3.3.1. По формуле для квадрата суммы n слагаемых получим, что $\sum\limits_{1\le i<j\le n} 2dx_i dx_j = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2$, потому равенство (17) приобретает вид

$$d^2F(\tilde{x}) = -\frac{C_{n-2}^{k-2}}{n-k+1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} dx_i^2\right]. \tag{18}$$

3.3.2. Найдем дифференциал от обеих частей уравнения связи (11). По формуле (9) получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{n-1,k-1}(x_1,\ldots,\overline{x_i},\ldots,x_n)dx_i = 0$. Подставив в полученное равенство координаты точки $\tilde{x}$, получим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i = 0$. Это означает, что в равенстве (18) первое слагаемое в квадратной скобке равно нулю, поэтому равенство (18) приобретает вид $d^2F(\tilde{x}) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{n-k+1}\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2$. Очевидно, что полученная квадратичная форма является положительно определенной, поэтому функция $\sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)$ имеет в точке $\tilde{x} = (1,1,\ldots,1)$ условный локальный минимум.

4. Вычислим значение этого минимума: $\tilde{\sigma} := \sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n) = C_n^{k-1}$.

5. Докажем, что точка $\tilde{x}$ является точкой глобального минимума на поверхности S.

5.1. Прежде всего, покажем, что поверхность S является линейно связной. Действительно, с учетом формулы $\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n) = x_n\sigma_{n-1,k-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) + \sigma_{n-1,k}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ (формула (5)) уравнение связи можно переписать в виде

$$x_n\sigma_{n-1,k-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) + \sigma_{n-1,k}(x_1,\ldots,x_{n-1}) - C_n^k = 0,$$

откуда

$$x_n = \frac{C_n^k - \sigma_{n-1,k}(x_1,\ldots,x_{n-1})}{\sigma_{n-1,k-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}. \tag{19}$$

Теперь легко видеть, что точки $\tilde{x} = (1,1,\ldots,1)$ и $y = (y_1,\ldots,y_n)$ поверхности соединены путем

$$\begin{cases} \gamma_i(t) = (1-t)\cdot 1 + ty_i,\ i = \overline{1,n\text{-}1} \\ \gamma_n(t) = \dfrac{C_n^k - \sigma_{n-1,k}(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_{n-1}(t))}{\sigma_{n-1,k-1}(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_{n-1}(t))}, \end{cases} \tag{20}$$

лежащим на этой поверхности.

5.2. Допустим, что в некоторой точке $z = (z_1,\ldots,z_n) \in S$ функция $\sigma_{n,k-1}$ принимает значение, меньшее, чем в точке $\tilde{x}$. Соединим $\tilde{x}$ и z дифференцируемым путем $\gamma:[0,1] \to S$ и рассмотрим функцию $g(t) = \sigma_{n,k-1}(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t))$. В этом случае $g(0) = \sigma_{n,k-1}(1,1,\ldots,1) = C_n^{k-1}$ и $g(1) = \sigma_{n,k-1}(z_1,\ldots,z_n) < C_n^{k-1}$. В силу того, что точка $\tilde{x}$ является точкой условного локального минимума, на интервале $(0,1)$ должна существовать точка t_0, в которой функция g имеет локальный максимум, а отсюда следует, что соответствующая точка $(\gamma_1(t_0),\ldots,\gamma_n(t_0)) \in S$ является условной критической точкой функции $\sigma_{n,k-1}$. Это противоречит единственности критической точки $\widetilde{x}$.

Доказательство теоремы Маклорена. 1. Рассмотрим произвольные положительные числа $x_1,\ldots,x_n$ и вычислим величину

$$\alpha := \rho_{nk}(x_1,\ldots,x_n). \tag{21}$$

Покажем, что точка $z=\left(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha},\cdots\frac{x_n}{\alpha}\right)$ лежит на поверхности S. Для этого подставим ее координаты в уравнение связи (11) и покажем, что полученное равенство

$$\sigma_{nk}\left(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha},\cdots,\frac{x_n}{\alpha}\right)-C_n^k=0. \tag{22}$$

является тождеством.

Выполним с этим равенством следующую цепочку тождественных преобразований: 1) вынесем множитель $1/\alpha$ из-под знака однородной функции σ_{nk}; 2) уединим α в правой части равенства; 3) извлечем из обеих частей равенства корень степени k; 4) используем формулы (3) и (21). В результате получим цепочку эквиваленций с истинным равенством в конце нее:

$$(22)\Leftrightarrow \sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)/\alpha^k - C_n^k=0 \Leftrightarrow \sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)/C_n^k=\alpha^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k]{\sigma_{nk}(x_1,\ldots,x_n)/C_n^k}=\alpha \Leftrightarrow \rho_{nk}(x_1,\ldots,x_n)=\rho_{nk}(x_1,\ldots,x_n).$$

2. Согласно Предложению точка $\widetilde{x}=(1,\ldots,1)$ является точкой глобального минимума функции $\sigma_{n,k-1}$ на поверхности S, поэтому $\sigma_{n,k-1}(z)\ge\sigma_{n,k-1}(\widetilde{x})=C_n^{k-1}$, или более подробно,

$$\sigma_{n,k-1}\left(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha},\cdots,\frac{x_n}{\alpha}\right)\ge C_n^{k-1}. \tag{23}$$

Проделаем с равенством (23) цепочку тождественных преобразований, подобную только что проведенной цепочке в пункте 1. Разница будет в том, что извлекаемый корень имеет степень $k-1$. Получим, что

$$(23)\Leftrightarrow \sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)/\alpha^{k-1}\ge C_n^{k-1} \Leftrightarrow \sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)/C_n^{k-1}\ge\alpha^{k-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k-1]{\sigma_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)/C_n^{k-1}}\ge\alpha \Leftrightarrow \rho_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)\ge\rho_{nk}(x_1,\ldots,x_n).$$

Итак,

$$\rho_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)\ge\rho_{nk}(x_1,\ldots,x_n). \tag{24}$$

3. Записав равенство (24) последовательно для $k=2,3,\ldots,n$, получим искомую цепь неравенств (4).

4. Если $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$, то по формулам (3) получаем, что $\rho_{n,k-1}(x,\ldots,x)=\rho_{nk}(x,\ldots,x)=x,\ k=\overline{1,n}$, так что во всех неравенствах (4) достигается равенство. Обратно, пусть для некоторых значений аргументов и при фиксированном k выполняется равенство

$$\rho_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_n)=\rho_{nk}(x_1,\ldots,x_n)=\alpha. \tag{25}$$

Пользуясь однородностью функции $\rho_{n,k-1}$ и ее определением, получим, что $\sqrt[k-1]{\sigma_{n,k-1}\left(\frac{x_1}{\alpha},\frac{x_2}{\alpha},\cdots,\frac{x_n}{\alpha}\right)\Big/C_n^{k-1}}=1$, откуда следует равенство $\sigma_{n,k-1}\left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\alpha}, \cdots, \frac{x_n}{\alpha}\right) = C_n^{k-1} = \sigma_{n,k-1}(1, 1, \ldots, 1)$. В силу единственности точки глобального минимума, получим, что $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\alpha} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha} = 1$, откуда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Этим завершается аналитическое доказательство теоремы Маклорена. Заметим, что из пункта 4 вытекает следующее: в нестрогих неравенствах (4) либо всюду одновременно достигается равенство, либо все неравенства являются строгими.

Библиографический список

1. Калинин, С. И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана [Текст] / С. И. Калинин. – Киров : Изд-во ВГГУ, 2002.

2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966.

3. Харди, Г. Г. Неравенства [Текст] / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М. : Гос. изд-во иностранной литературы, 1948.