

Е. А. Зубова, Е. И. Смирнов

О полунепрерывных снизу счетно-полуаддитивных функционалах на топологической группе

В настоящей статье даны условия полунепрерывности снизу счетно-полуаддитивных функционалов на топологической группе. Рассматриваются приложения к идеально выпуклым множествам и задаче об уравновешенном базисе топологической векторной группы.

Ключевые слова: топологическая группа, счетно-полуаддитивный функционал, полунепрерывность снизу, лебеговы множества.

E. A. Zubova, E. I. Smirnov

About Semi-Continuous from Below Calculating and Semi-Additive Functionals on the Topological Group

In this paper, we present conditions for the lower semicontinuity countably semi-additive functionals on a topological group. Are considered applications to the ideal convex sets and the problem of a balanced basis of the topological vector group.

Keywords: a topological group, calculating and semi-additive functional, semi-continuity from below, Lebesgue sets.

Пусть X – топологическая группа (ТГ) в аддитивной записи и $\mu = \mu(x)$ – действительнoзначный функционал на X такой, что $\mu(0) = 0$, способный принимать, вообще говоря, значения $+\infty$ и $-\infty$. Как известно, с функционалом можно ассоциировать функционалы:

$$\mu^*(x) = \lim_{y \rightarrow x} \mu(y) \quad \text{и} \quad \mu_*(x) = \lim_{y \rightarrow x} \mu(y).$$

Нетрудно видеть, что справедливы соотношения

$$\mu^*(x) = \sup_U \inf_{w \in W} \mu(x+w) \quad \text{и} \quad \mu_*(x) = \inf_U \sup_{w \in W} \mu(x+w),$$

где U – базис симметричных открытых окрестностей нуля в ТГ X , причем функционалы μ^* и μ_* являются соответственно полунепрерывными снизу и сверху на X , и имеет место неравенство

$$\mu^*(x) \leq \mu(x) \leq \mu_*(x) \quad (x \in X).$$

Лебеговы множества $V_\varepsilon^* = \{x \in X : \mu^*(x) \leq \varepsilon\}$ замкнуты в X и содержат замыкания соответствующих лебеговых множеств V_ε функционала μ ; лебеговы множества $U_\varepsilon^* = \{x \in X : \mu_*(x) < \varepsilon\}$ открыты и содержатся во внутренности соответствующих лебеговых множеств U_ε функционала μ . Таким образом, имеет место цепочка включений

$$U_\varepsilon^* \subset \overset{\circ}{U}_\varepsilon \subset U_\varepsilon \subset V_\varepsilon \subset \overline{V}_\varepsilon \subset V_\varepsilon^*$$

(черта, как обычно, обозначает замыкание, а кружок – внутренность множества).

Напомним [5], что неотрицательный функционал μ называется *счетно-полуаддитивным* на X , если из сходимости ряда $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$ вытекает $\mu(x) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(x_n)$. При некоторых ограничениях счетно-полуаддитивные функционалы оказываются непрерывными.

Теорема 1 [1]. Пусть μ – счетно-полуаддитивный функционал на метрическом векторном пространстве (МВП) X , и μ^* непрерывен. Тогда $\mu = \mu^*$.

В качестве следствий теоремы 1 могут быть получены теоремы о замкнутом графике и теорема Банаха – Штейнгауза о равномерной ограниченности, теорема о несплюснутости воспроизводящего

конуса и теорема существования базиса Шаудера. Установим более общее, чем теорема 1, утверждение для метрических групп.

Теорема 2. Пусть μ – счетно-полуаддитивный функционал на $M\Gamma X$ и для каждого $\varepsilon > 0$ внутренность множества V_ε^* непуста. Тогда $\mu = \mu^*$ (в частности, $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \overset{\circ}{V}_\varepsilon^*$ ($\varepsilon > 0$)).

Доказательство. Так как для $M\Gamma$ имеем соотношение $\mu^*(x) = \inf_{x_n \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(x_n)$, то очевидно, что для справедливости равенства $\mu = \mu^*$ достаточно установить выполнение неравенства $\mu(x) \leq \mu^*(x)$ ($x \in X$). Пусть $d = d(x)$ – неотрицательный, симметричный полуаддитивный функционал, определяющий топологию $M\Gamma X$; пусть $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ и $\mu^*(x_0) < +\infty$. Так как $\overset{\circ}{V}_{\varepsilon/2}^* \neq \emptyset$, то найдутся элементы $z'_1 \in \overset{\circ}{V}_{\varepsilon/2}^*$ и $x'_1 \in X$ такие, что

$$d(x_0 - x'_1) < 1, \quad \mu^*(z'_1 + (x_0 - x'_1)) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(x'_1) \leq \mu^*(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

При таком выборе точек $\mu^*(z'_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, поэтому подберем $z_1 \in \overset{\circ}{V}_{\varepsilon/2}^*$, $x_1 \in X$ так, что

$$\mu(z_1) \leq \varepsilon, \quad \mu^*(z_1 + (x_0 - x_1)) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(x_0 - x_1) < 1, \quad \mu(x_1) \leq \mu^*(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, для внутренности множества $\overset{\circ}{V}_{\varepsilon/2^2}^*$ найдется элемент $z'_2 \in \overset{\circ}{V}_{\varepsilon/2^2}^*$, а затем и $z_2 \in \overset{\circ}{V}_{\varepsilon/2^2}^*$ такой, что $\mu(z_2) < \frac{\varepsilon}{2}$, а также найдется элемент $x_2 \in X$ такой, что

$$\mu^*(z_2 + (x_0 - x_1 - x_2)) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}, \quad d(x_0 - x_1 - x_2) < \frac{1}{2},$$

$$\mu(x_2 - z_1) \leq \mu^*(z_1 + (x_0 - x_1)) + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательности элементов $x_n \in X$, $z_n \in \overset{\circ}{V}_{\varepsilon/2^n}^*$ ($n = 1, 2, \dots$) такие, что $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в $M\Gamma X$, $\mu(z_n) \leq \varepsilon / 2^{n-1}$ и для каждого $n = 1, 2, \dots$ выполнены неравенства ($z_0 = 0$):

$$\mu^*(z_n + (x_0 - \sum_{k=1}^n x_k)) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \mu(x_n - z_{n-1}) \leq \mu^*(z_{n-1} + x_0 - \sum_{k=1}^n x_k) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n - z_{n-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(z_{n-1}) \\ &\leq \mu^*(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \mu^*(z_{n-1} + x_0 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k) + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(z_{n-1}) \\ &\leq \mu^*(x_0) + 4\varepsilon, \end{aligned}$$

то в силу счетной полуаддитивности функционала μ получим

$$\mu(x_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n) \leq \mu^*(x_0) + 4\varepsilon.$$

Но $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, поэтому $\mu(x_0) \leq \mu^*(x_0)$, тем самым $\mu = \mu^*$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что μ – полунепрерывный снизу функционал на X , следовательно, может быть получен ряд новых утверждений, особенно для несимметричных функционалов.

В работе [3] Е. А. Лифшиц ввел в рассмотрение так называемые идеально выпуклые множества в банаховом пространстве E . Напомним, что множество $M \subset E$ *идеально выпукло*, если для произвольной ограниченной последовательности $x_i \in M (i=1, 2, \dots)$ и последовательности неотрицательных чисел $\alpha_i \geq 0 (i=1, 2, \dots)$ с суммой $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$ элемент $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ принадлежит M . Если теперь взять идеально выпуклое множество M так, что $0 \in M$ (это возможно в силу инвариантности идеальной выпуклости относительно сдвигов) и обозначить через p_M функционал Минковского множества M

$$p_M(x) = \begin{cases} \inf\{\varepsilon > 0 : x \in \varepsilon M\} & (x \in L(M)), \\ +\infty & (x \in E \setminus L(M)), \end{cases}$$

то нетрудно видеть, что p_M – неотрицательный полуаддитивный функционал на E и, более того, обладающий свойством счетной полуаддитивности. Если, к тому же, заметить, что наличие непустой внутренней лебеговых множеств V_ε^* функционала p_M^* не зависит от $\varepsilon > 0$, то в силу теоремы 1 получим такое следствие.

Следствие 1 [2]. Пусть M – идеально выпуклое множество, лежащее в банаховом пространстве E . Тогда $\overset{\circ}{M} = \overline{\overset{\circ}{M}}$.

Для сублинейного функционала μ получим следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть μ – счетно-полуаддитивный, сублинейный функционал на MG_X . Тогда $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \overset{\circ}{V}_\varepsilon^* (\varepsilon > 0)$.

Доказательство. Прежде всего, ясно, что наличие непустой внутренней V_δ^* не зависит от $\delta > 0$. Поэтому если $\overset{\circ}{V}_\varepsilon^* = \emptyset$, то $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \overset{\circ}{V}_\varepsilon^* (\varepsilon > 0)$. Если же $\overset{\circ}{V}_{\varepsilon_0}^* \neq \emptyset$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, то в силу теоремы 1 получим равенство $\mu = \mu^*$ и, тем самым, равенство $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \overset{\circ}{V}_\varepsilon^* (\varepsilon > 0)$. Очевидно, равенство $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \overset{\circ}{V}_\varepsilon^*$ может быть заменено $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \overline{\overset{\circ}{V}_\varepsilon}$.

Последнее следствие можно применить к теории пространств Лоренца. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – идеальное пространство в пространстве S всех измеримых почти всюду конечных функций на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{V}, m)$ с конечной мерой m (эквивалентные функции отождествляются), топология которого определяется квазинормой

$$\|\varphi\|_S = \int_{\Omega} \frac{|\varphi(s)|}{1 + |\varphi(s)|} dm.$$

Известно, что X непрерывно вложено в S и норма

$$\|x\|^* = \inf_{x_n \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|,$$

где $x_n \rightarrow x$ в S , определяет векторное пространство $\overline{X} = \{x \in S : \|x\|^* < \infty\}$, которое называют *пространством Лоренца, построенным по пространству X* [2]. Если $(\overline{X}, \tau)$ – топологическое пространство S , то ясно, что $\mu^* = \|\cdot\|^*$ построен в топологии τ по неотрицательному сублинейному функционалу $\mu = \|\cdot\|$. В силу полноты X функционал μ счетно-полуаддитивен на X , поэтому в соответствии со следствием 2 получим $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \overline{\overset{\circ}{V}_\varepsilon} (\varepsilon > 0)$. Если $\tau|_X \neq \|\cdot\|$, то $\overset{\circ}{V}_\varepsilon = \emptyset = \overline{\overset{\circ}{V}_\varepsilon}$ и $\tau < \|\cdot\|^*$; если же $\tau|_X = \|\cdot\|$, то $\overline{\overset{\circ}{V}_\varepsilon} \neq \emptyset (\varepsilon > 0)$ и $\mu = \mu^*$ в силу следствия 2. Последнее означает, что идеальное пространство X является пространством Лоренца.

Однако интерес представляет ситуация, когда для μ в МГ X $\overline{V}_\varepsilon \neq \emptyset (\varepsilon > 0)$, и тем не менее имеет место равенство $\overset{\circ}{U}^\varepsilon = \overline{U}^\varepsilon$.

Теорема 3. Пусть $u(z)$ – плюрисубгармоническая непрерывная функция в области $G \subset \mathbb{C}^n$. Тогда для лебеговых множеств U^ε имеет место равенство $\overset{\circ}{U}^\varepsilon = \overline{U}^\varepsilon (\varepsilon > 0)$ (черта означает замыкание в G).

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $0 \in G$ и $u(0) = 0$. Положив $\mu(z) = u(z) (z \in G)$ и $\mu(z) = +\infty (z \in \mathbb{C}^n \setminus G)$, получим полунепрерывный сверху функционал на МГ $\mathbb{C}^n$ в обычной топологии с теми же лебеговыми множествами $U^\varepsilon (\varepsilon > 0)$, что и у функции $U(z) (z \in G)$. Кроме того, ясно, что доказательство достаточно провести для случая МГ $\mathbb{C}$ и субгармонической функции.

Установим теперь каноническую открытость лебеговых множеств U^ε субгармонической функции $U(z)$. Прежде всего, ясно, что $U^\varepsilon (\varepsilon > 0)$ – открытые множества в силу полунепрерывности сверху функционала $\mu(z)$ и открытости области G в $\mathbb{C}$. Предположим, что $\overset{\circ}{U}^\varepsilon = U^\varepsilon \neq \overline{U}^\varepsilon \subset V_\varepsilon$. Тогда найдется $z_0 \in \partial U^\varepsilon$ и открытый круг $S(z_0, r_0)$ такие, что

$$S(z_0, r_0) \subset \overline{U}^\varepsilon \quad \text{и} \quad \mu(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad (0 < r < r_0).$$

Так как граница ∂U^ε является замкнутым и тощим множеством, то найдется круг $S^* = S(z^*, \delta) \subset S(z_0, r_0)$ такой, что $S^* \subset U^\varepsilon$ и, следовательно, $\mu(z) < \varepsilon (z \in S^*)$. Пусть $|z_0 - z^*| = r^* < r_0$, и выберем θ_1, θ_2 такие, что $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ и $z_0 + r^*e^{it} \in S^*$ для $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq \mu(z_0) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(z_0 + r^*e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(z_0 + r^*e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus [\theta_1, \theta_2]} \mu(z_0 + r^*e^{it}) dt \\ &< \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \varepsilon + \frac{1}{2\pi} [2\pi - (\theta_2 - \theta_1)] \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Противоречие. Значит, U^ε – канонически открытое множество ($\varepsilon > 0$). Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы 3 может быть получена обобщенная теорема Гарнака [4].

Библиографический список

1. Владимиров, В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных [Текст] / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1964. – 412 с. – С. 94.
2. Забрейко, П. П. Идеальные пространства функций, 1 [Текст] / П. П. Забрейко // Вестник Ярославского университета. – 1974. – С. 8–52.
3. Лифшиц, Е. А. Идеально выпуклые множества [Текст] / Е. А. Лифшиц // Функц. анализ и его приложения. – 1970. – Т. 4, № 4. – С. 76–77.
4. Смирнов, Е. И. Геометрические свойства конусов функций [Текст] / Е. И. Смирнов, Е. И. Бережной, Ю. В. Бондаренко. – Германия: Изд-во «Ламберт», 2012. – 140 с.
5. Смирнов, Е. И. О непрерывности полуаддитивных функционалов [Текст] / Е. И. Смирнов // Math. Notes. – 1976. – Т. 19, № 4. – Р. 541–548.
6. Smirnov E. I. Hausdorff spectra in functional analysis. Springer-Verlag, London, 2002. 209 p.