

В. В. Богун

Исследование взаимосвязей между равнобедренными треугольниками с применением информационных технологий

В статье представлено исследование взаимосвязей между равнобедренными треугольниками на плоскости с использованием информационных технологий при условии равенства угла при основании одного треугольника углу между боковыми сторонами второго треугольника. Рассмотрены пропорциональные зависимости между линейными элементами равнобедренных треугольников на плоскости, полученные в результате применения разработанного автором программного обеспечения для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях. Приведены необходимые теоремы и проанализированы частные случаи взаимного расположения равнобедренных треугольников через призму вписанных и описанных окружностей.

Ключевые слова: равнобедренные треугольники, пропорциональные зависимости, графический калькулятор, программирование на языке Object Pascal в среде Delphi, технология интернет-программирования PHP.

V. V. Bogun

Research of Interrelations between Isosceles Triangles with Use of Information Technologies

In the article research of interrelations between isosceles triangles on the plane with use of information technologies under condition of equality of the corner on the basis of one triangle is presented to a corner between lateral faces of the second triangle. Proportional dependences between linear elements of isosceles triangles on the planes received as a result of use of the software developed by the author for the graphic calculator and the personal computer at local and network levels are considered. Necessary theorems are provided and special cases of mutual positioning of isosceles triangles through a prism of the entered and described circles are considered.

Keywords: isosceles triangles, proportional dependences, a graphic calculator, programming in the Object Pascal language in the environment of Delphi, a technology of the Internet programming of PHP.

Введение

Данная статья посвящена проведению математического анализа пар равнобедренных треугольников на плоскости, для которых выполняется условие равенства угла при основании одного треугольника углу между боковыми сторонами второго треугольника, и рассмотрению разработанного автором программного обеспечения для графического калькулятора (используется графический калькулятор CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS [6]) и персонального компьютера на локальном (применяется среда программирования Delphi и язык программирования Object Pascal) и сетевом (используются веб-сервер Apache и интернет-технологии HTML, JavaScript и PHP) уровнях для реализации подобных исследований в наглядной и удобной информационной форме.

Представлены не проводимые ранее исследования геометрических свойств равнобедренных треугольников [7] с точки зрения нахождения пропорциональных зависимостей между линейными элементами рассматриваемых равнобедренных треугольников через интеграцию элементарной геометрии и тригонометрии [2, 3].

Необходимо отметить, что только использование разработанного автором программного обеспечения для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях позволило реализовать нахождение пропорциональных зависимостей между линейными элементами рассматриваемых геометрических фигур благодаря созданным нами оптимизационным поисковым алгоритмам.

Теоретический аспект

Рассмотрим пропорциональные зависимости между линейными элементами двух равнобедренных треугольников на плоскости при наличии условия, что угол при основании одного треугольника равен углу

между боковыми сторонами второго, то есть $\beta_2 = \alpha_1$ или $\alpha_2 = \frac{\pi - \alpha_1}{2}$, с использованием тригонометрических функций от их основных углов, в качестве которых выступают углы при основаниях и между боковыми сторонами треугольников.

Для представленных на рис. 1 равнобедренных треугольников $\Delta A_1 B_1 C_1$ и $\Delta A_2 B_2 C_2$ ($\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_1 C_1 A_1 = \alpha_1 = \angle A_2 B_2 C_2 = \beta_2$ ($\angle B_2 A_2 C_2 = \angle B_2 C_2 A_2 = \alpha_2$)) – углы при основании треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$), а $\angle A_1 B_1 C_1 = \beta_1 = 180^\circ - 2\alpha_1 = \pi - 2\alpha_1$ ($\angle A_2 B_2 C_2 = \beta_2 = \pi - 2\alpha_2 = \angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_1 C_1 A_1 = \alpha_1$) – угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$)) в качестве их линейных элементов выступают следующие компоненты):

– $B_1 D_1 = h_1$ ($B_2 D_2 = h_2$) – основная высота треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$), опущенная из вершины треугольника B_1 (B_2), расположенной на пересечении его боковых сторон, на основание треугольника.

– $A_1 C_1 = 2a_1$ ($A_1 C_1 = 2a_1$) и $A_1 D_1 = C_1 D_1 = a_1$ ($A_2 D_2 = C_2 D_2 = a_2$) – основание и половина основания треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$).

– $A_1 B = C_1 B = b_1$ ($A_2 B = C_2 B = b_2$) – боковые стороны треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$).

– $D_1 O_1 = K_1 O_1 = L_1 O_1 = F_1 O_1 = r_1$ ($D_2 O_2 = K_2 O_2 = L_2 O_2 = F_2 O_2 = r_2$) и $D_1 F_1 = d_1$ ($D_2 F_2 = d_2$) – радиусы и диаметр вписанной в треугольник $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$) окружности.

– $B_1 O_1 = (h - r)_1$ ($B_2 O_2 = (h - r)_2$) и $B_1 F_1 = (h - d)_1$ ($B_2 F_2 = (h - d)_2$) – разность между основной высотой и радиусом, а также диаметром вписанной в треугольник $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$) окружности.

– $A_1 O_1 = B_1 O_1 = C_1 O_1 = E_1 O_1 = R_1$ ($A_2 O_2 = B_2 O_2 = C_2 O_2 = E_2 O_2 = R_2$) и $B_1 E_1 = D_1$ ($B_2 E_2 = D_2$) – радиусы и диаметр описанной вокруг треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$) окружности.

– $D_1 O_1 = (h - R)_1$ ($D_2 O_2 = (h - R)_2$) – разность между основной высотой и радиусом описанной вокруг треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$) окружности.

– $D_1 E_1 = (D - h)_1$ ($D_2 E_2 = (D - h)_2$) – разность между диаметром описанной вокруг треугольника $\Delta A_1 B_1 C_1$ ($\Delta A_2 B_2 C_2$) окружности и основной высотой треугольника.

Между линейными элементами данных равнобедренных треугольников имеют место следующие пропорциональные зависимости, полученные в качестве результатов обработки в созданном автором программном обеспечении для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях (при доказательствах используются отношения линейных элементов треугольников к основным высотам треугольников):

– Отношение основной высоты второго треугольника к основной высоте первого треугольника равно отношению радиуса описанной вокруг второго треугольника окружности к разности между основной высотой первого треугольника и радиусом вписанной в него окружности и равно отношению разности между основной высотой второго треугольника и радиусом описанной вокруг него окружности к радиусу вписанной в первый треугольник окружности, а также равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к разности между основной высотой первого треугольника и диаметром вписанной в него окружности, то есть:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{R_2}{(h-r)_1} = \frac{(h-R)_2}{r_1} = \frac{(D-h)_2}{(h-d)_1}.$$

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{(h-r)_1} &= \frac{R_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{(h-r)_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{1+\cos\alpha_1}{1-\cos 2\alpha_2} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{1+\cos\alpha_1}{1-\cos(\pi-\alpha_1)} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \\ &= \frac{1+\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \\ \frac{(h-R)_2}{r_1} &= \frac{(h-R)_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{r_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{\cos 2\alpha_2}{\cos 2\alpha_2-1} \cdot \frac{1+\cos\alpha_1}{\cos\alpha_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \\ &= \frac{\cos(\pi-\alpha_1)}{\cos(\pi-\alpha_1)-1} \cdot \frac{1+\cos\alpha_1}{\cos\alpha_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{-\cos\alpha_1}{-\cos\alpha_1-1} \cdot \frac{1+\cos\alpha_1}{\cos\alpha_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \\ \frac{(D-h)_2}{(h-d)_1} &= \frac{(D-h)_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{(h-d)_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{1+\cos 2\alpha_2}{1-\cos 2\alpha_2} \cdot \frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \\ &= \frac{1+\cos(\pi-\alpha_1)}{1-\cos(\pi-\alpha_1)} \cdot \frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} \cdot \frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{R_2}{(h-r)_1} = \frac{(h-R)_2}{r_1} = \frac{(D-h)_2}{(h-d)_1}.$$

– Отношение основной высоты второго треугольника к половине основания первого треугольника равно отношению половины основания второго треугольника к радиусу вписанной в первый треугольник окруж-

ности, то есть: $\frac{h_2}{a_1} = \frac{a_2}{r_1}$.

– Отношение основной высоты второго треугольника к боковой стороне первого треугольника равно отношению половины основания второго треугольника к разности между основной высотой первого тре-

угольника и радиусом вписанной в него окружности, то есть: $\frac{h_2}{b_1} = \frac{a_2}{(h-r)_1}$.

– Отношение половины основания второго треугольника к основной высоте первого треугольника равно отношению радиуса описанной вокруг второго треугольника окружности к боковой стороне первого тре-

угольника и равно отношению разности между основной высотой второго треугольника и радиусом описанной вокруг него окружности к половине основания первого треугольника, то есть: $\frac{a_2}{h_1} = \frac{R_2}{b_1} = \frac{(h-R)_2}{a_1}$.

– Отношение половины основания второго треугольника к половине основания первого треугольника равно отношению разности между основной высотой второго треугольника и радиусом описанной вокруг него окружности к разности между диаметром описанной вокруг первого треугольника окружности и его основной высотой и равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к радиусу вписанной в первый треугольник окружности, то есть:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(h-R)_2}{(D-h)_1} = \frac{(D-h)_2}{r_1}.$$

– Отношение половины основания второго треугольника к боковой стороне первого треугольника равно

отношению радиуса описанной вокруг второго треугольника окружности к диаметру описанной вокруг первого треугольника окружности и равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к разности между основной высотой первого тре-

угольника и радиусом вписанной в него окружности, то есть:
$$\frac{a_2}{b_1} = \frac{R_2}{D_1} = \frac{(D-h)_2}{(h-r)_1}.$$

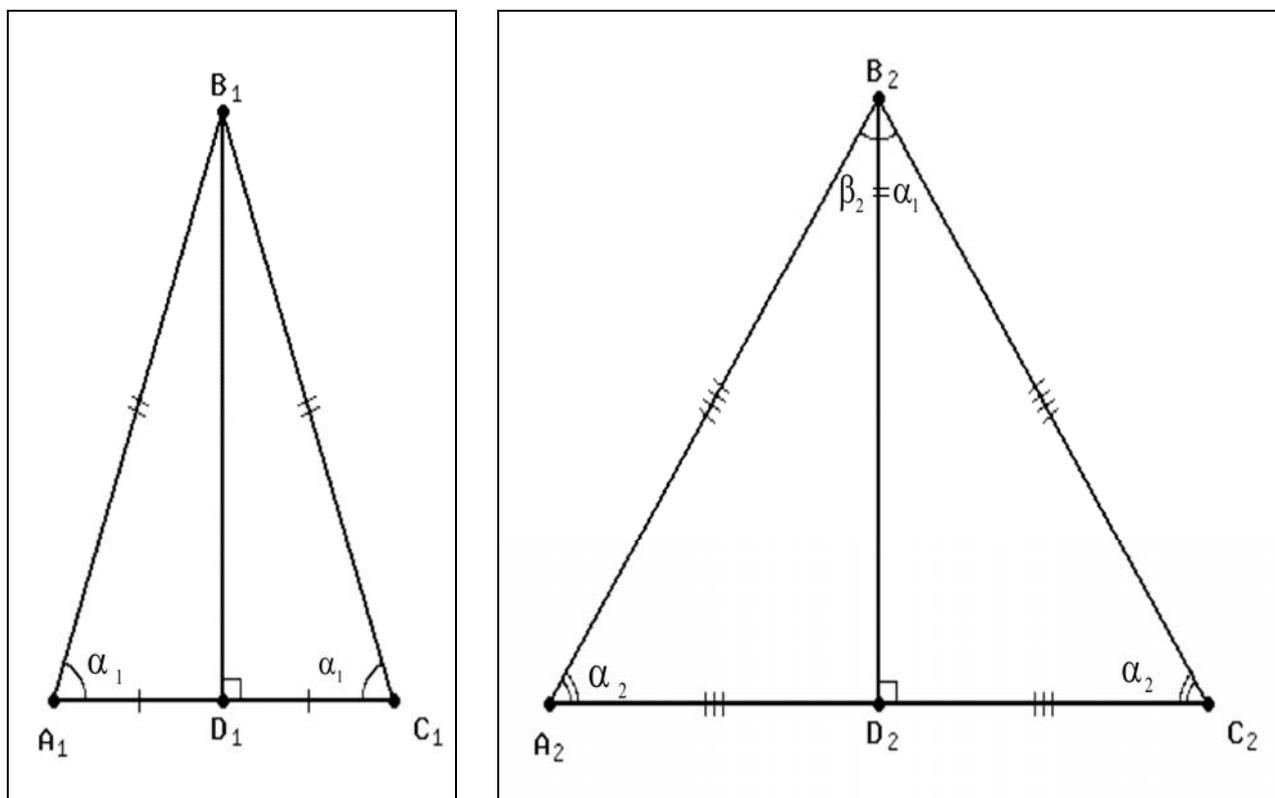


Рис. 1. Равнобедренные треугольники на плоскости с обозначениями линейных элементов

На основании полученных пропорциональных зависимостей между линейными элементами исследуемых пар равнобедренных треугольников можно сформулировать следующие теоремы, суть которых состоит в раскрытии интересных фактов о геометрических особенностях визуального построения данных треугольников при условии совпадения их определенных линейных элементов, в том числе с точки зрения взаимосвязи между вписанными и описанными окружностями двух равнобедренных треугольников.

Теорема 1: Если для двух равнобедренных треугольников угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника и они построены на общей основной высоте, то центр вписанной в первый треугольник окружности совпадает с центром описанной вокруг второго треугольника окружности.

Согласно данной теореме для используемой пары треугольников при наличии совпадения основной высоты ($B_1D_1 = h_1$) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с основной высотой ($B_2D_2 = h_2$) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, то есть равенства величин линейных элементов $B_1D_1 = B_2D_2$ ($h_1 = h_2$) и совпадения точек $B_1 = B_2$ и $D_1 = D_2$, получаем совпадение центра вписанной в треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ окружности (O_{11}) с центром описанной вокруг треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ окружности (O_{22}), то есть равенство $O_{11} = O_{22}$ (рис. 2).

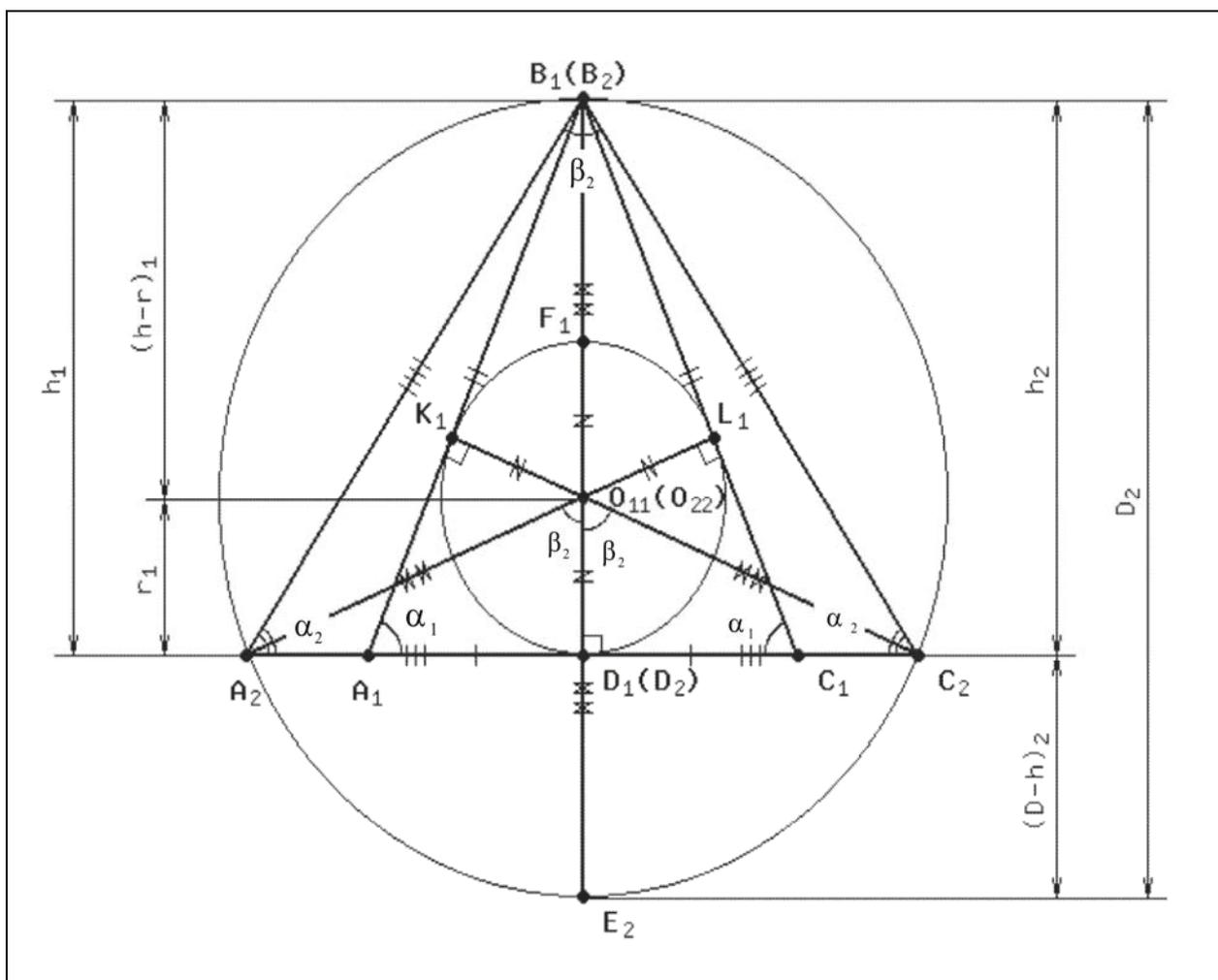


Рис. 2. Геометрическая интерпретация теоремы 1

Теорема 2: Если для двух равнобедренных треугольников угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника и половина основания первого треугольника совпадает с основной высотой второго треугольника, то радиус вписанной в первый треугольник окружности совпадает с половиной основания второго треугольника, описанная вокруг первого треугольника окружность проходит через вершину второго треугольника, расположенную между его боковыми сторонами, равно как описанная вокруг второго треугольника окружность проходит через центр вписанной в первый треугольник окружности.

Согласно данной теореме для рассматриваемой пары треугольников при наличии совпадения половины основания ($C_1D_1 = a_1$) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с основной высотой ($B_2D_2 = h_2$) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, то есть равенства величин линейных элементов $C_1D_1 = B_2D_2$ ($a_1 = h_2$) и совпадении точек $C_1 = B_2$ и $D_1 = D_2$, получаем совпадение радиуса вписанной в треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ окружности ($O_{11}D_1 = R_1$) с половиной основания ($A_2D_2 = a_2$) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, вершины при основании (C_1) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с вершиной, являющейся пересечением боковых сторон (B_2), для треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, то есть равенство $C_1 = B_2$, а также совпадение вершины при основании (A_2) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ с центром вписанной в треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ окружности (O_{11}), то есть равенство $A_2 = O_{11}$ (рис. 3).

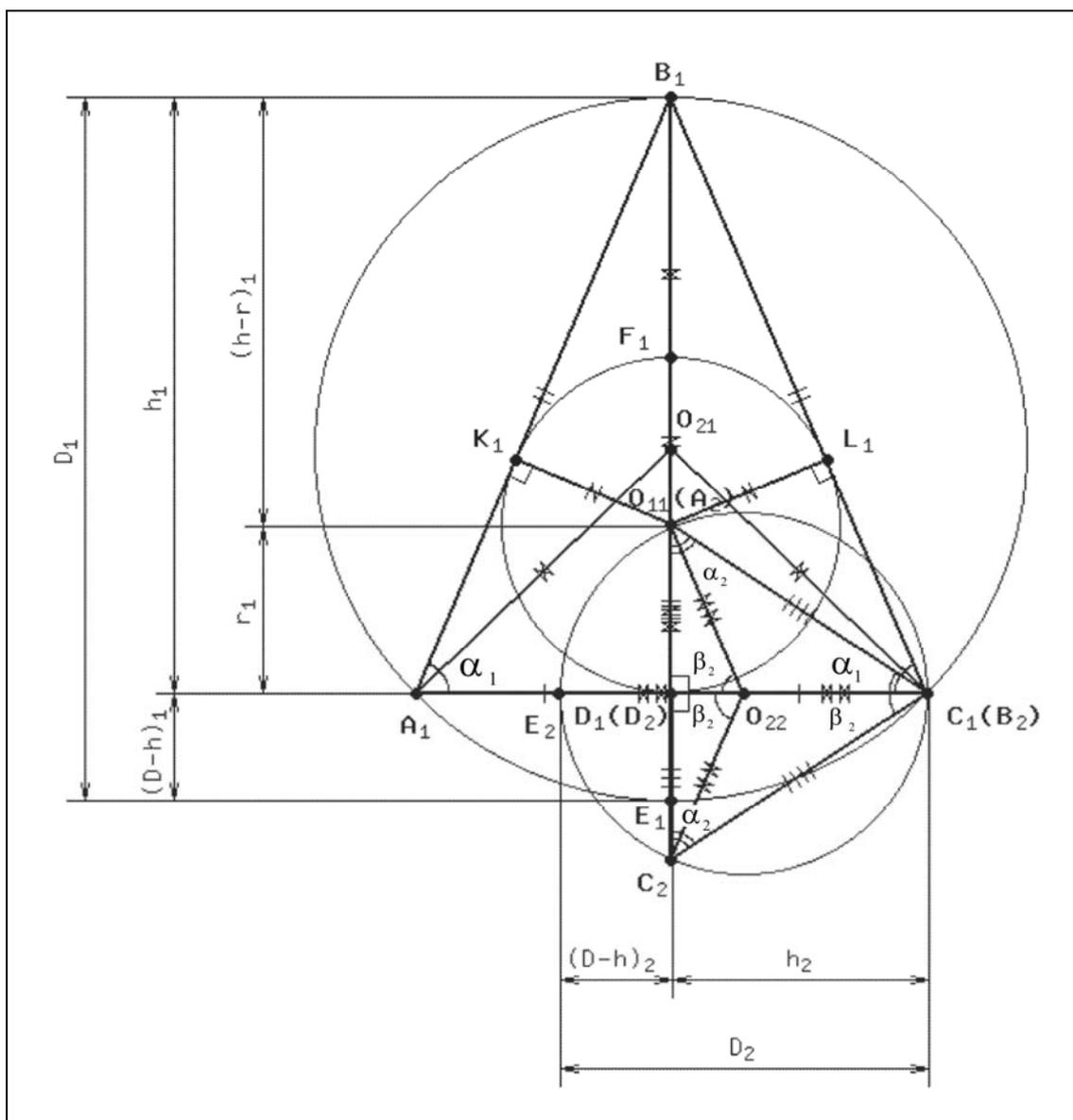


Рис. 3. Геометрическая интерпретация теоремы 2

Теорема 3: Если для двух равнобедренных треугольников угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника и основная высота первого треугольника совпадает с половиной основания второго треугольника, то вершина при основании и боковая сторона первого треугольника совпадают, соответственно, с центром и радиусом описанной вокруг второго треугольника окружности, половина основания первого треугольника совпадает с отрезком, отражающим разность между основной высотой и радиусом описанной окружности второго треугольника, при этом описанная вокруг первого треугольника окружность проходит через центр описанной окружности и вершину при основании второго треугольника.

Согласно данной теореме для рассматриваемой пары треугольников при наличии совпадения основной высоты ($B_1D_1 = h_1$) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с половиной основания ($C_2D_2 = a_2$) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, то есть равенства величин линейных элементов $B_1D_1 = C_2D_2$ ($h_1 = a_2$) и совпадения точек $B_1 = C_2$ и $D_1 = D_2$, совпадение боковой стороны ($A_1B_1 = b_1$) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с радиусом описанной вокруг треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ окружности ($O_{22}C_2 = R_2$), то есть равенство

$A_1B_1 = O_{22}C_2$, совпадение половины основания ($A_1D_1 = a_1$) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с отрезком, отражающим разность между основной высотой и радиусом описанной окружности ($D_2O_{22} = (h - R)_2$) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, то есть равенство $A_1D_1 = D_2O_{22}$, а также совпадение вершины при основании (A_1) первого треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с центром описанной вокруг треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ окружности (O_{22}), то есть равенство $A_1 = O_{22}$ (рис. 4).

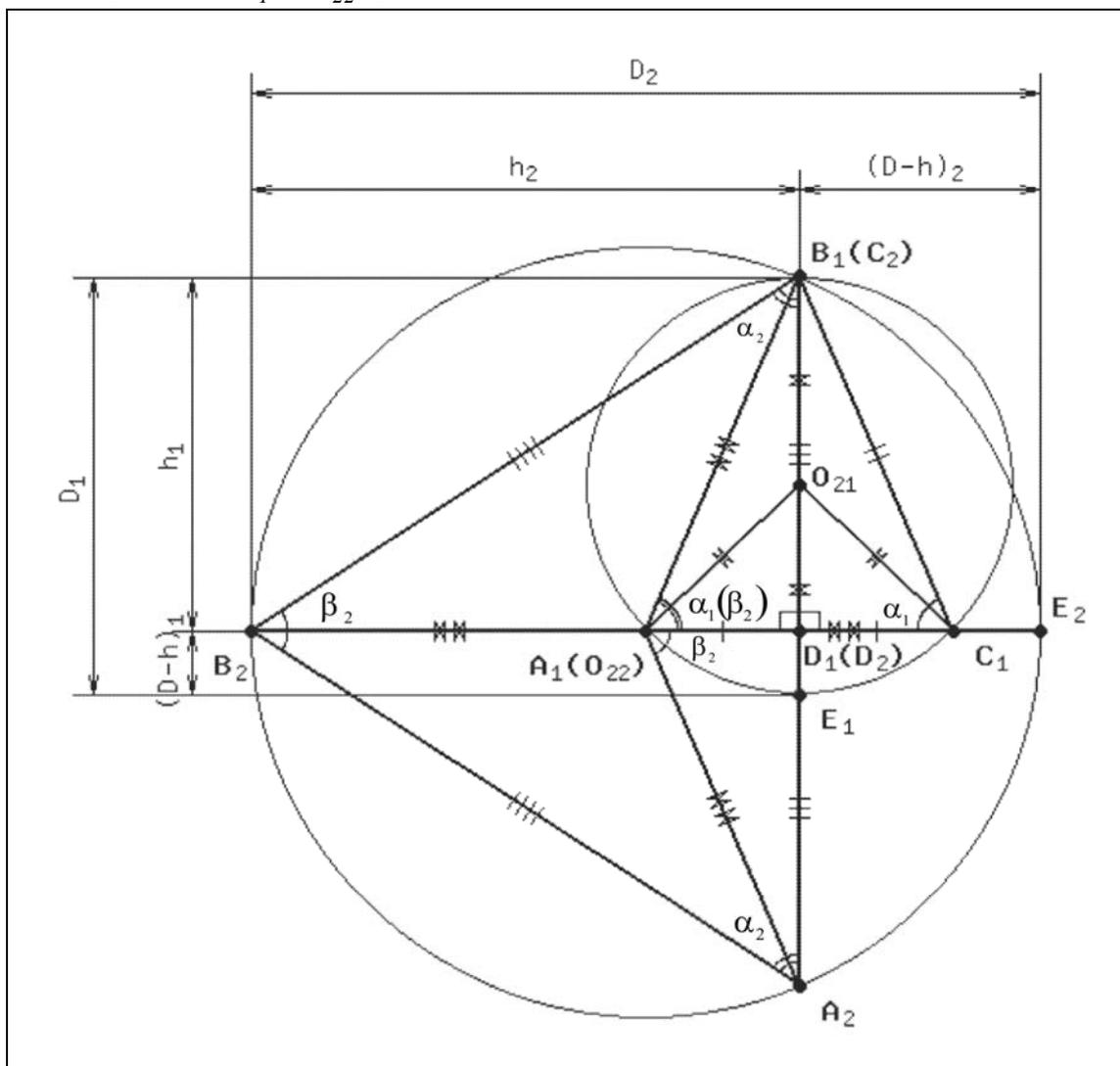


Рис. 4. Геометрическая интерпретация теоремы 3

Теорема 4: Если два равнобедренных треугольника построены на общем основании и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго треугольника, то описанная вокруг первого треугольника окружность проходит через центр описанной вокруг второго треугольника окружности, которая, в свою очередь, проходит через центр вписанной в первый треугольник окружности.

Согласно данной теореме для рассматриваемой пары треугольников при наличии совпадения половины основания ($A_1D_1 = C_1D_1 = a_1$) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ с половиной основания ($A_2D_2 = C_2D_2 = a_2$) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, то есть равенства величин линейных элементов $A_1D_1 = C_1D_1 = A_2D_2 = C_2D_2$ ($a_1 = a_2$) и совпадения точек $A_1 = A_2$, $C_1 = C_2$ и $D_1 = D_2$, получаем совпадение точки пересечения описанной окружности с основной высотой (E_1) треугольника

$\Delta A_1 B_1 C_1$ с центром описанной вокруг треугольника $\Delta A_2 B_2 C_2$ окружности (O_{22}), то есть равенство $E_1 = O_{22}$, а также точки пересечения описанной окружности с основной высотой (E_2) треугольника $\Delta A_2 B_2 C_2$ с центром вписанной в треугольник $\Delta A_1 B_1 C_1$ окружности (O_{11}), то есть равенство $E_2 = O_{11}$ (рис. 5).

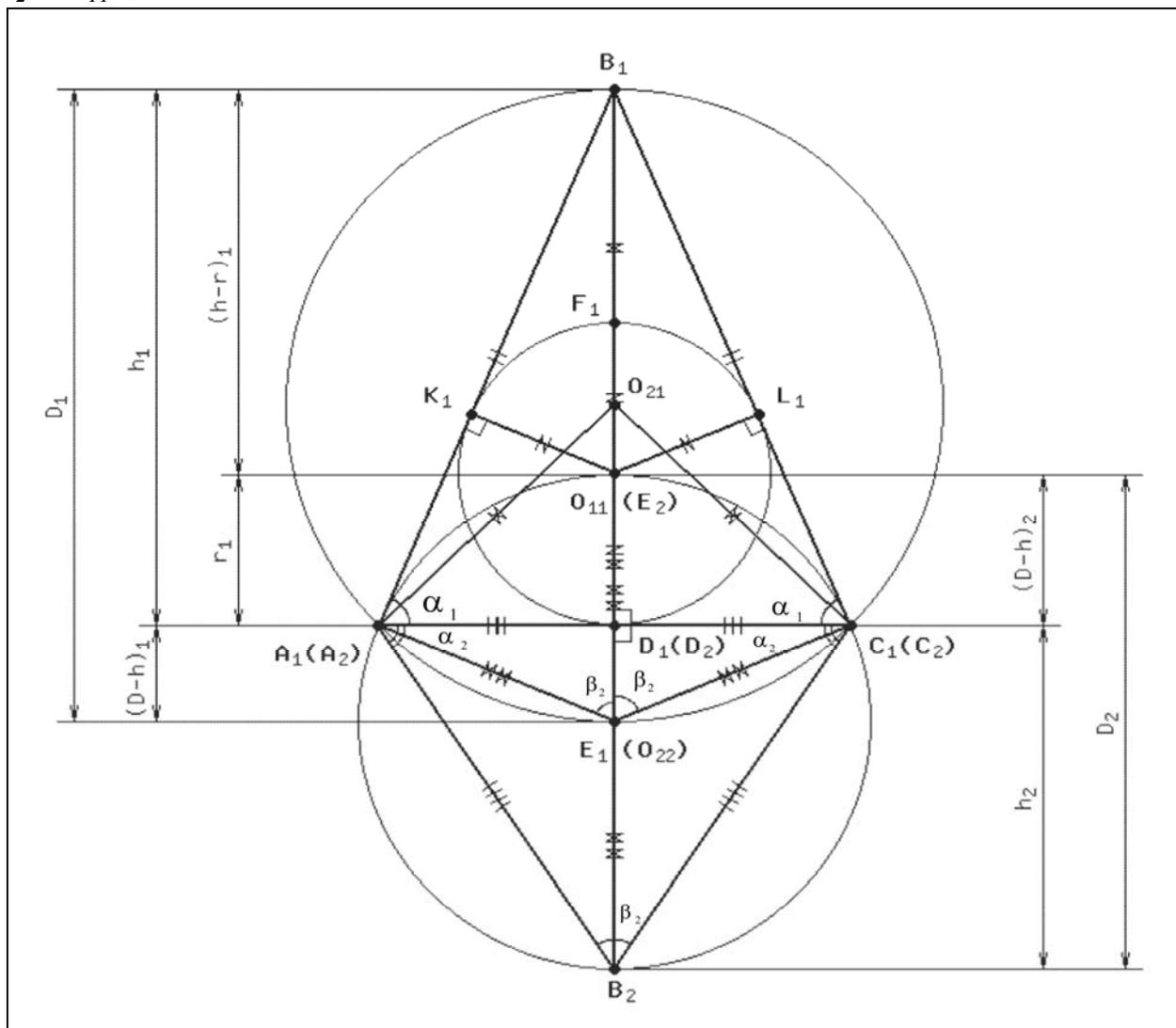


Рис. 5. Геометрическая интерпретация теоремы 4

Описание программного обеспечения

Рассмотрим разработанное автором программное обеспечение для проведения математического анализа двух равнобедренных треугольников на плоскости, для которых выполняется условие равенства углов при основании первого треугольника углу между боковыми сторонами второго треугольника, представленное на графическом калькуляторе [4, 5] и персональном компьютере на локальном [1] и сетевом уровнях в виде программ под общим названием программы “*TRIANG 2*”.

Для начала работы с программой на графическом калькуляторе необходимо запустить программу с наименованием “*TRIANG 2*”. В рамках программы в диалоговом окне меню (рис. 6А) осуществляется выбор наименования угла (угол при основании первого равнобедренного треугольника (угол между боковыми сторонами второго треугольника), угол между боковыми сторонами первого равнобедренного треугольника или угол при основании второго равнобедренного треугольника). После непосредственного ввода значения угла (рис. 6В) осуществляется вывод в виде матрицы «А» значений углов при основаниях и между боковы-

ми сторонами исследуемых равнобедренных треугольников в градусах и радианах, а также тригонометрических функций для данных углов (рис. 6С).

После вывода данного информационного окна реализуется последовательный выбор совпадающих линейных элементов первого и второго равнобедренного треугольников соответственно (рис. 6D и 6E), а затем по выбору наименования операции (расчет и вывод значений отношений, целочисленных отношений или пропорциональных зависимостей между линейными элементами равнобедренных треугольников), что отражено на рис. 6F, осуществляется вывод необходимых диалоговых окон результатов вычислений в виде соответствующих матриц «D», «E» и «F» (рис. 6G, 6H и 6I).

На следующем этапе осуществляется выбор наименования линейного элемента равнобедренных треугольников (рис. 6J), ввод значения данного элемента (рис. 6K) и вывод в виде матрицы «G» значений линейных элементов равнобедренных треугольников (рис. 6L). Затем реализуется выбор характерной точки равнобедренных треугольников (рис. 6M), ввод значений координат данной точки (рис. 6N) и последующий вывод в виде матрицы «H» значений координат характерных точек (рис. 6O) и вывод в виде матрицы «J» значений координат совпадающих характерных точек равнобедренных треугольников (рис. 6P).

На последнем этапе работы программы осуществляется настройка параметров вывода рассматриваемых равнобедренных треугольников с точки зрения отображения вписанных и описанных окружностей (рис. 6Q, 6R) с последующей визуализацией равнобедренных треугольников (рис. 6S).

<pre> SELECT ENTER ANGLE A1 = B2 <(1)> B1 = 180-2A1 <(2)> A2 = <(180-A1)/2 <(3)> OR PREVIOUS <(4)>? 1 </pre>	<pre> 0<A1=B2<90? 70 </pre>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>70</td> <td>40</td> <td>55</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1.2217</td> <td>0.6981</td> <td>0.9599</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.9396</td> <td>0.6427</td> <td>0.8191</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0.342</td> <td>0.766</td> <td>0.5735</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>2.7474</td> <td>0.839</td> <td>1.4281</td> </tr> </tbody> </table> <p>70</p>	A	1	2	3	1	70	40	55	2	1.2217	0.6981	0.9599	3	0.9396	0.6427	0.8191	4	0.342	0.766	0.5735	5	2.7474	0.839	1.4281																																																				
A	1	2	3																																																																											
1	70	40	55																																																																											
2	1.2217	0.6981	0.9599																																																																											
3	0.9396	0.6427	0.8191																																																																											
4	0.342	0.766	0.5735																																																																											
5	2.7474	0.839	1.4281																																																																											
A	B	C																																																																												
<pre> SELECT LIN ELEM TR 1 H<(1) A<(2) B<(3) RU<(4) H-RU<(5) H-DU<(6) RO<(7) H-RO<(8) DO-H<(9) OR PREVIOUS <(10)>? 1 </pre>	<pre> SELECT LIN ELEM TR 2 H<(1) A<(2) B<(3) RU<(4) H-RU<(5) H-DU<(6) RO<(7) H-RO<(8) DO-H<(9) OR PREVIOUS <(10)>? 2 </pre>	<pre> SELECT CALCUL IN TRS RATIONS LIN ELS <(1) INT RATIONS LIN <(2) PROPORTIONS LIN <(3) OR NEXT <(4) OR PREVIOUS <(5)>? 1 </pre>																																																																												
D	E	F																																																																												
<table border="1"> <thead> <tr> <th>D</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1.4281</td> <td>3.9238</td> <td>1.342</td> <td>5.6037</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>2.7474</td> <td>0.9396</td> <td>3.9238</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1.7434</td> <td>4.79</td> <td>1.6383</td> <td>6.8409</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0.5205</td> <td>1.4302</td> <td>0.4891</td> <td>2.0426</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0.9075</td> <td>2.4835</td> <td>0.8528</td> <td>3.5611</td> </tr> </tbody> </table> <p>1.428148007</p>	D	1	2	3	4	1	1.4281	3.9238	1.342	5.6037	2	1	2.7474	0.9396	3.9238	3	1.7434	4.79	1.6383	6.8409	4	0.5205	1.4302	0.4891	2.0426	5	0.9075	2.4835	0.8528	3.5611	<table border="1"> <thead> <tr> <th>E</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>7</td> <td>1</td> <td>17</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>7</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>8</td> <td>2</td> <td>0.9999</td> </tr> </tbody> </table> <p>2</p>	E	1	2	3	1	7	1	17	2	7	3	1	3	8	2	0.9999	<table border="1"> <thead> <tr> <th>F</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>9</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	F	1	2	3	4	1	1	1	7	5	2	1	1	8	4	3	1	1	9	6	4	1	2	2	4	5	1	3	2	5
D	1	2	3	4																																																																										
1	1.4281	3.9238	1.342	5.6037																																																																										
2	1	2.7474	0.9396	3.9238																																																																										
3	1.7434	4.79	1.6383	6.8409																																																																										
4	0.5205	1.4302	0.4891	2.0426																																																																										
5	0.9075	2.4835	0.8528	3.5611																																																																										
E	1	2	3																																																																											
1	7	1	17																																																																											
2	7	3	1																																																																											
3	8	2	0.9999																																																																											
F	1	2	3	4																																																																										
1	1	1	7	5																																																																										
2	1	1	8	4																																																																										
3	1	1	9	6																																																																										
4	1	2	2	4																																																																										
5	1	3	2	5																																																																										
G	H	I																																																																												
<pre> SELECT LINEAR ELEM H A B RU H-RU H-DU RO H-RO DO-H TR1<(1-9) TR2<(10-18) OR PREVIOUS <(19)>? 3 </pre>	<pre> NUMBER OF ELEMENT INPUT VAL SIZE ELEM? 89 </pre>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>G</th> <th>1</th> <th>2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>30.439</td> <td>119.437</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>30.439</td> <td>83.632</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>89</td> <td>145.8</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>21.314</td> <td>43.536</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>62.318</td> <td>75.903</td> </tr> </tbody> </table> <p>83.63264325</p>	G	1	2	1	30.439	119.437	2	30.439	83.632	3	89	145.8	4	21.314	43.536	5	62.318	75.903																																																										
G	1	2																																																																												
1	30.439	119.437																																																																												
2	30.439	83.632																																																																												
3	89	145.8																																																																												
4	21.314	43.536																																																																												
5	62.318	75.903																																																																												
J	K	L																																																																												
<pre> SELECT BASIC POINT A B C D O O O K L F E TR1<(1-10) TR2<(11-20) OR PREVIOUS <(21)>? 4 </pre>	<pre> NUMBER OF POINT INPUT VALUE COORD X? 26 INPUT VALUE COORD Y? 86 </pre>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>H</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>86</td> <td>86</td> <td>26</td> <td>2.36</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>26</td> <td>169.63</td> <td>-93.43</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>56.439</td> <td>86</td> <td>26</td> <td>169.</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>26</td> <td>86</td> <td>26</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>26</td> <td>107.31</td> <td>-17.53</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>-4.43979275</p>	H	1	2	3	4	1	86	86	26	2.36	2	26	169.63	-93.43		3	56.439	86	26	169.	4	26	86	26		5	26	107.31	-17.53																																															
H	1	2	3	4																																																																										
1	86	86	26	2.36																																																																										
2	26	169.63	-93.43																																																																											
3	56.439	86	26	169.																																																																										
4	26	86	26																																																																											
5	26	107.31	-17.53																																																																											
M	N	O	P																																																																											

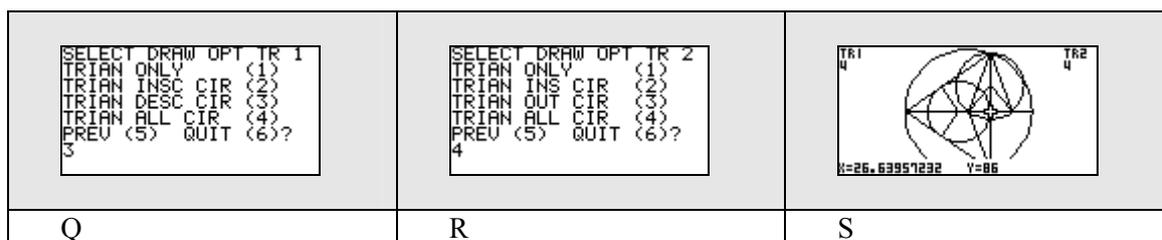


Рис. 6. Скриншоты из программы “TRIAN 2”

Программы для персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях под общим названием “TRIAN 2” состоят из двух компонентов: формы для указания параметров значений исходных данных и формируемой на основе расчетов статической интернет-страницы для вывода и визуализации результатов вычислений.

Для ввода и выбора значений исходных данных в рамках программ выступают необходимые компоненты визуальных графических форм (рис. 7 и рис. 8 для локального и сетевого уровней соответственно), которые позволяют настроить необходимые параметры решаемой задачи.

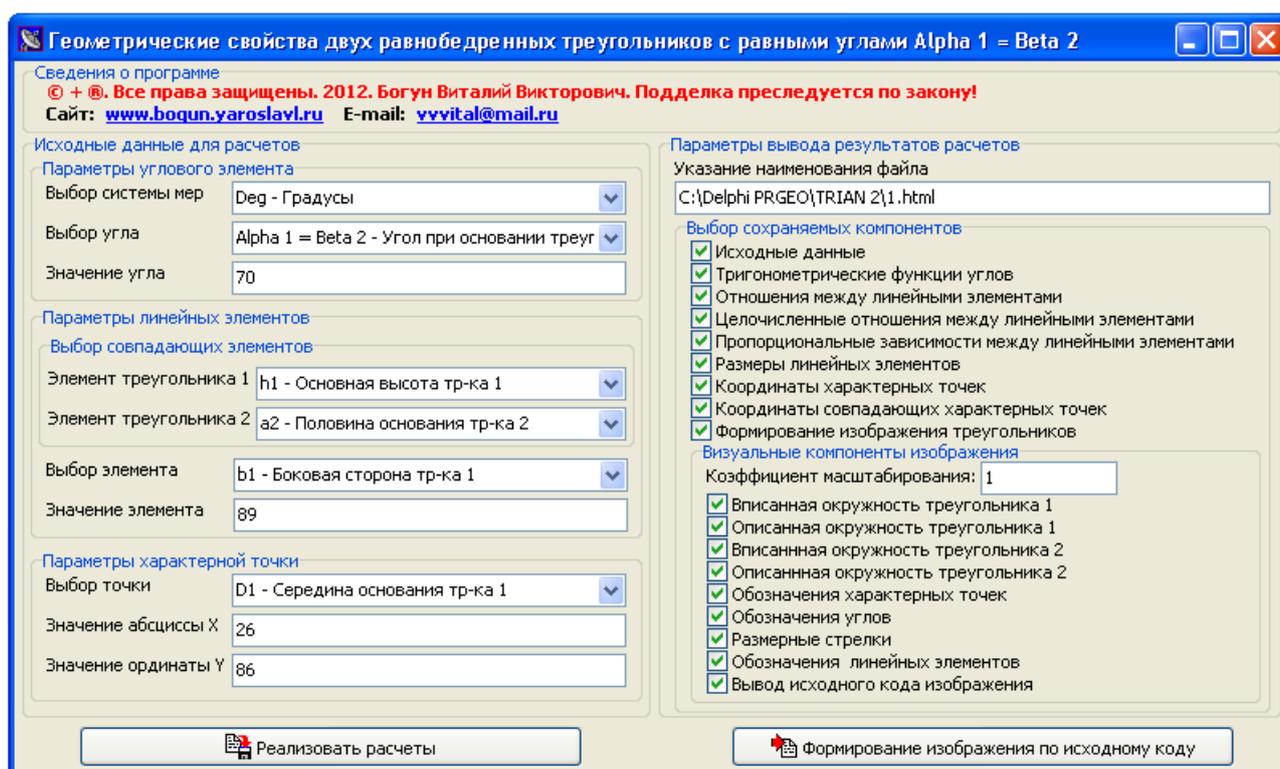


Рис. 7. Форма указания исходных данных и параметров визуализации для программы “TRIAN 2” (локальный уровень)

Для вывода и визуализации результатов вычислений в рамках рассматриваемых программ выступают идентичные для локального и сетевого уровней статические интернет-страницы, которые отображают следующие заранее выбранные компоненты расчетов для рассматриваемых равнобедренных треугольников:

1. Значения исходных данных для равнобедренных треугольников.
2. Значения тригонометрических функций углов.
3. Отношения между линейными элементами.
4. Целочисленные отношения между линейными элементами.
5. Пропорциональные зависимости между линейными элементами (рис. 9).
6. Значения размеров линейных элементов.

7. Значения координат характерных точек.
8. Значения координат совпадающих характерных точек (рис. 10).
9. Визуальный вывод равнобедренного треугольника с отображением дополнительных визуальных компонентов (рис. 11).
10. Исходный код изображения равнобедренного треугольника для локального и сетевого уровней, который позволяет осуществлять последующую полноценную обработку графического изображения равнобедренных треугольников.

Указание значений исходных данных

Параметры углового элемента	
Выбор системы мер	Deg - Градусы
Выбор угла	Alpha 1 = Beta 2 - Угол при основании треугольника 1 = Угол между боковыми сторонами треугольника 2
Значение угла	70
Параметры линейных элементов	
Выбор совпадающих элементов	Элемент треугольника 1 h1 - Основная высота тр-ка 1
	Элемент треугольника 2 a2 - Половина основания тр-ка 2
Выбор элемента	b1 - Боковая сторона тр-ка 1
Значение элемента	89
Параметры характерной точки	
Выбор характерной точки	D1 - Середина основания тр-ка 1
Значение абсциссы X	26
Значение ординаты Y	86
Параметры вывода результатов расчетов	
Отображаемые компоненты	<input checked="" type="checkbox"/> Исходные данные <input checked="" type="checkbox"/> Тригонометрические функции углов <input checked="" type="checkbox"/> Отношения между линейными элементами <input checked="" type="checkbox"/> Целочисленные отношения между линейными элементами <input checked="" type="checkbox"/> Пропорциональные зависимости между линейными элементами <input checked="" type="checkbox"/> Размеры линейных элементов <input checked="" type="checkbox"/> Координаты характерных точек <input checked="" type="checkbox"/> Координаты совпадающих характерных точек <input checked="" type="checkbox"/> Формирование изображения треугольников Визуальные компоненты изображения Коэффициент масштабирования: 1 <input checked="" type="checkbox"/> Вписанная окружность треугольника 1 <input checked="" type="checkbox"/> Описанная окружность треугольника 1 <input checked="" type="checkbox"/> Вписанная окружность треугольника 2 <input checked="" type="checkbox"/> Описанная окружность треугольника 2 <input checked="" type="checkbox"/> Обозначения характерных точек <input checked="" type="checkbox"/> Обозначения углов <input checked="" type="checkbox"/> Размерные стрелки <input checked="" type="checkbox"/> Обозначения линейных элементов <input checked="" type="checkbox"/> Вывод исходного кода изображения
<input type="button" value="Реализовать расчеты"/> <input type="button" value="Отказ от расчетов"/>	

Рис. 8. Скриншот диалогового окна указания значений параметров исходных данных для программы “TRIANG 2” (сетевой уровень)

Пропорциональные зависимости между линейными элементами двух равнобедренных треугольников с равными углами Alpha 1 = Beta 2 = 70°

№	Выражение	Числовые эквиваленты
1	$h_2/h_1 = R_2/(h-r)_1$	1.4281 = 1.4281
2	$h_2/h_1 = (h-R)_2/r_1$	1.4281 = 1.4281
3	$h_2/h_1 = (D-h)_2/(h-d)_1$	1.4281 = 1.4281
4	$h_2/a_1 = a_2/r_1$	3.9238 = 3.9238
5	$h_2/b_1 = a_2/(h-r)_1$	1.3420 = 1.3420
6	$a_2/h_1 = R_2/b_1$	1.0000 = 1.0000
7	$a_2/h_1 = (h-R)_2/a_1$	1.0000 = 1.0000
8	$a_2/a_1 = (h-R)_2/(D-h)_1$	2.7475 = 2.7475
9	$a_2/a_1 = (D-h)_2/r_1$	2.7475 = 2.7475
10	$a_2/b_1 = R_2/D_1$	0.9397 = 0.9397
11	$a_2/b_1 = (D-h)_2/(h-r)_1$	0.9397 = 0.9397
12	$R_2/b_1 = (h-R)_2/a_1$	1.0000 = 1.0000
13	$R_2/(h-r)_1 = (h-R)_2/r_1$	1.4281 = 1.4281
14	$R_2/(h-r)_1 = (D-h)_2/(h-d)_1$	1.4281 = 1.4281
15	$R_2/R_1 = 2(D-h)_2/(h-r)_1$	1.8794 = 2*0.9397
16	$(h-R)_2/r_1 = (D-h)_2/(h-d)_1$	1.4281 = 1.4281
17	$(h-R)_2/(D-h)_1 = (D-h)_2/r_1$	2.7475 = 2.7475

Рис. 9. Вывод пропорциональных зависимостей и значений между линейными элементами равнобедренных треугольников

Значения координат совпадающих характерных точек двух равнобедренных треугольников с равными углами Alpha 1 = Beta 2 = 70°

№	Треугольник 1				Треугольник 2			
	Наименование точки	Обозначение	Значение X	Значение Y	Наименование точки	Обозначение	Значение X	Значение Y
1	Вершина левая при основании треугольника	A ₁	-4.4398	86.0000	Центр описанной окружности треугольника	O ₂₂	-4.4398	86.0000
2	Вершина между боковыми сторонами треугольника	B ₁	26.0000	169.6326	Вершина правая при основании треугольника	C ₂	26.0000	169.6326
3	Середина основания треугольника	D ₁	26.0000	86.0000	Середина основания треугольника	D ₂	26.0000	86.0000

Рис. 10. Вывод значений координат совпадающих характерных точек равнобедренных треугольников

Визуальный вывод двух равнобедренных треугольников с равными углами $\alpha_1 = \beta_2 = 70^\circ$

Дополнительные визуальные компоненты:

1. Вписанная окружность треугольника 1.
2. Описанная окружность треугольника 1.
3. Вписанная окружность треугольника 2.
4. Описанная окружность треугольника 2.
5. Обозначения характерных точек.
6. Обозначения углов.
7. Размерные стрелки.
8. Обозначения линейных элементов.
9. Вывод исходного кода изображения.

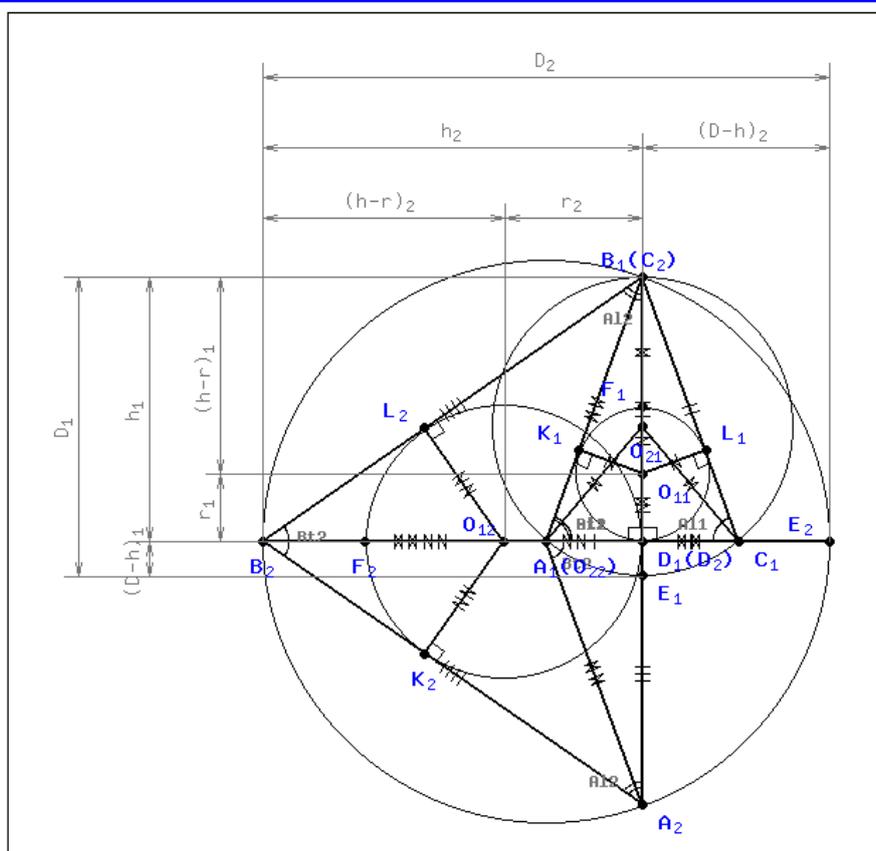


Рис. 11. Визуальный вывод равнобедренных треугольников

Библиографический список

1. Богун, В. В. Геометрические свойства равнобедренного треугольника [Текст] / В. В. Богун. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, № 2012615962.
2. Богун, В. В. Геометрические свойства равнобедренных треугольников [Текст] / В. В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2002. – № 2. – С. 119–124.
3. Богун, В. В. Геометрия древнего Египта [Текст] / В. В. Богун. – М. : Компания Спутник+, 2003. – 203 с.
4. Богун, В. В. Организация учебного процесса по математике с применением графического калькулятора [Текст] / В. В. Богун. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2012. – 380 с.
5. Богун, В. В., Смирнов, Е. И. Лабораторный практикум с графическим калькулятором [Текст] : учеб. пособие / В. В. Богун, Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во «Канцлер», 2010. – 272 с.
6. Дьяконов, В. П. Современные зарубежные микрокалькуляторы [Текст] / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Р, 2002. – 400 с.
7. Кожухов, И. Б., Прокофьев, А. А. Справочник по математике [Текст] / И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. – М. : «Лист», 1999. – 640 с.

