УДК 37.0

А. Л. Жохов, О. А. Кирносова, А. Н. Капиносов

Комплексно-интегративный подход к построению учебных материалов по математическому анализу для студентов вуза

В статье конкретизируется тезис: базой воспитания потенциала математической культуры студента – будущего учителя математики – является опыт их самостоятельной познавательной деятельности и мышления. Такой опыт приобретается студентами в процессе их работы с учебными материалами и заданиями (УМиЗ), выстроенными в соответствии с принципами комплексно-интегративного подхода к организации обучения. Приводятся примеры включения таких материалов в процесс изучения студентами некоторых тем математического анализа.

Ключевые слова: потенциал математической культуры и мышления, комплексно-интегративный подход к организации обучения математике, учебные материалы и задания по началам анализа, формирование и развитие опыта самостоятельной познавательной деятельности и мышления студентов-математиков педагогического вуза.

A. L. Zhokhov, O. A. Kirnosova, A. N. Kapinosov

A Complex -Integrative Approach in Creating Training Materials on the Mathematical Analysis for Students of a Higher Education Institution

In the article the thesis is concretized: a base of education of mathematical culture potential of the student – the future Mathematics teacher – is experience of their independent informative activity and thinking. Such experience is got by students in the course of their work with training materials and tasks (TMaT), built according to principles of the complex-integrative approach to training organization. Examples of such materials introduction into the process of learning when students study some subjects of the mathematical analysis are resulted.

Key words: potential of mathematical culture and thinking, a complex-integration approach to organization of Mathematics training, teaching materials and tasks (TMaT) on the analysis beginnings, formation and development of experience of the independent informative activity and thinking of Mathematics students of a pedagogical higher school.

Педагогическому сообществу, в общем-то, известны *слабые стороны* общекультурной и математической подготовки современных абитуриентов. Они существенно уменьшают потенциал математической культуры будущего учителя математики. Серьезнейшими из таких сторон являются:

- привычка к поверхностному восприятию и кратковременному запоминанию «точечных» и, как правило, разрозненных сведений, почерпнутых из различных источников, прежде всего, из интернета;
- привычка искать в учебных текстах готовые и, как правило, однозначные ответы на поставленные вопросы, неумение ставить вопросы к прочитанному, услышанному или увиденному;
- опора лишь на шаблоны, представленные в пособиях образцы (примеров изучаемых понятий, решений задач, приводимых рисунков и др.);
- склонность к отвлечению от начатой деятельности, неспособность к длительному участию, удержанию себя в ней, стремление выйти от нее;
- неумение пользоваться различными кодами (моделями) записи и переработки информации, переходить от одного из них к другим, самостоятельно и адекватно извлекать из них нужную информацию;
- отсутствие побуждения к самостоятельной и кропотливой работе с источниками знаний, неумение их переосмысливать, преобразовывать; стремление к их «дословному» воспроизведению…

Этот список можно было бы дополнить многими другими, но и приведенные слабые стороны подготовки выпускников школ и студентов вызывают не просто беспокойство, но и тревогу. Их наличие сказывается особенно сильно на первых курсах обучения в вузах, причем не только в России, но и в Украине. Возникает необходимость такой организации обучения математике в вузах, которая была бы направлена если не на устранение, то, по меньшей мере, на существен-

---

ное ослабление действия отмеченных недостатков. Один из путей решения указанной проблемы видится нам в создании и внедрении в учебный процесс комплексов **учебных материалов и заданий (УМиЗ)**, представленных в электронном виде и направляющих самостоятельную работу студентов на формирование у них необходимых познавательных действий и деятельностей. В основу разработки таких материалов и заданий мы положили **принципы комплексно-интегративного подхода** к исследованию и построению методических концепций [2, 3].

Такой подход требует применения во взаимном дополнении и взаимопроникновении трех известных подходов – *системного*, *деятельностного* и *культурологического*. Поскольку методика имеет дело с «живыми» системами, методологический принцип соответствия метода исследования его объекту требует связать, *интегрировать* эти известные подходы в единое целое (систему), конкретизировать их применительно *к основному предмету и способу его рассмотрения* и *дополнить* теми, которые раскрывают специфику самого *предмета рассмотрения*. В работах [2, 5 и др.] обоснована целесообразность приводимой ниже трактовки отдельных принципов, распределенных по соответствующим группам.

Из группы **принципов системности** отметим следующие:

– *восхождение от конкретного к абстрактному и обратно*. В случае построения методик соблюдение принципа требует обязательного акцентирования внимания обучаемых на переходах от конкретных объектов окружающего мира к их математическим моделям, на процессе выстраивания фрагментов теории («маленьких теорий»), на последующих переходах от них к новым, самостоятельно построенным примерам и их конструированию, соотнесения первых со вторыми и их правдоподобного объяснения;

– *единство синтеза и анализа*. Суть данного принципа – в требовании рассматривать изучаемый математический объект как систему элементов и, в то же время, как элемент некоторой системы, причем рассматривать их *под углом зрения выделенной цели* [2], в том избранном отношении, в котором находят свое выражение основания и принципиальное существо авторской позиции в определенной области знания [8]. Необходимо подключать к такому рассмотрению и учащихся, и, тем более, студентов;

– *принцип «бритвы О́ккама»*: «сущности не следует умножать без необходимости», либо в другой форме – «*принцип бережливости*»: «бесполезно делать посредством многого то, что может быть сделано посредством меньшего» [1, с. 151]. Следование этому принципу при выстраивании комплексов УМиЗ может проявляться, во-первых, в сдерживании от насыщения изучаемого студентами материала фрагментами более «высоких» теорий, если без них можно обойтись при рассмотрении данного материала. Во-вторых, новые теоретические сведения желательно вводить лишь как *средство развития* уже оформившихся знаний студентов. Отмеченные два момента, конкретизирующие сформулированный принцип, составляют *диалектическое* единство. В наших УМиЗ мы старались опираться на этот принцип, и часто – в его втором значении. Например, в ситуации, когда первокурсники, якобы – по их мнению – уже *знают* такие понятия как производная и интеграл, но *не владеют ими на уровне их смысла* и *средств их применения*.

Заметим, что исследователь, как и любой человек, в том числе и ученик, представляет собой самоорганизующуюся живую, «органичную» систему. Следовательно, он в принципе предрасположен «творить свою судьбу», и только внешние обстоятельства могут повести его по другому пути, если у него недостаточным образом сформированы соответствующие механизмы развития или воли как способности к «одолению соблазнов» [8]. С учетом этого системный подход к выстраиванию педагогических и методических практик развития личности требует еще одного *принципа*:

– *учета и предоставления возможностей для самостоятельного формирования индивидуальных механизмов развития обучаемых как самоорганизующихся систем* (в т. ч. *средствами математической культуры*).

Следование этому принципу требует заботиться о включении в разрабатываемую систему УМиЗ, по меньшей мере, *двух типов заданий* для студентов: *учебных ситуаций* с их сопровождающими заданиями *и упражнений.*

Основное назначение первых – формировать и развивать «бифуркационные» механизмы личностного развития учащихся. Они возникают, начинают действовать и оказываются особенно полезными в «пороговых» состояниях организации «живой» системы. Переход через них «ведет к резкому качественному изменению протекающих в ней процессов, к изменению самой ее организации» [Н. Н. Моисеев].

Основное назначение вторых – формировать и развивать «адаптационные» [1, 8] механизмы личностного развития учащихся. К ним относится работа с понятиями и терминологией, теоремами и способами их доказательства, правилами и алгоритмами, типовыми задачами. Они способствуют активному приобщению учащихся к математической культуре и культуре мышления. Это препятствует механическому запоминанию материала, привязывает студента к мировой культуре и создает базу самостоятельности.

В отмеченных двух планах сформулированный принцип согласуется как с предыдущим, так и последующими.

Из совокупности принципов, характеризующих использование **теории деятельности**, в рамках рассматриваемого комплексного подхода к обучению математике особо обратим внимание на следующие принципы:

– *принцип взаимодействия* людей друг с другом и миром математики. В применении к обучению он требует направлять деятельность субъектов обучения, прежде всего, на *коммуникацию и персональные преобразования* изучаемых математических объектов. При этом взаимодействие должно *реализовываться в разных планах (генетическом и функциональном, содержательном и структурном, репродуктивном и продуктивном) и во всех видах и формах познавательно-преобразующей деятельности*;

– *принцип активности* предписывает рассматривать активность обучаемого как *его родовую сущность – потребность и способность*, пробуждающиеся и проявляющиеся во взаимодействии человека и мира и направленные на их познание и преобразование. Эта способность определяет примат «продуктивного, творческого начала над началом репродуктивным и рутинным, чем и обеспечивается системогенез деятельности» [8, с. 70]. Приходится констатировать, что у студентов désinститутов активность часто не имеет познавательной направленности.

Рассматривая различные условия существования социальных систем, многие ученые выделяют особый вид взаимодействия – ***содействие.*** Это – «объединяющий процесс, укрепляющий взаимосвязь, взаимное дополнение, взаимопомощь одних систем в противодействии с другими», важнейший положительный фактор эволюции, «обеспечивающий … виду наилучшие шансы жизни и распространения» [1].

Взаимодействие в форме содействия следует рассматривать как один из *факторов успешности* протекания *совместной учебной деятельности*, отдельных студентов или различных их групп друг с другом и преподавателем. Организация именно *совместной учебной деятельности и коммуникации* в их различных формах является **необходимым условием** достижения положительных результатов в формировании у студентов многих полезных для них личностных качеств *и развития студента в его «мире учения».*

В связи с принципом активности особо отметим факт индивидуально-социального начала высших психических функций человека. В частности это относится к механизмам *экстериоризации и интериоризации* и приданию в этой паре главенствующего начала второму элементу. На наш взгляд, более правы те, кто утверждает их взаимную дополнительность и лишь относительную их распознаваемость в деятельности человека и в процессе усвоения им опыта предшествующих поколений. И если уж использовать эти понятия, то предпочтение надо отдавать способности обучаемого к экстериоризации и всячески поддерживать ее.

К сказанному следует добавить, что *активность у человека проявляется, прежде всего, в поле его потребностей, мотивов и смыслов*. А из наличия у абитуриентов отмеченных выше и других слабых сторон следует лишь один вывод: традиционно организованное обучение в школе и вузе не попадает в это поле, либо уходит или уводит обучаемых из него.

К принципам, в основном вытекающим из теории деятельности, мы относим и следующий, касающийся мировоззрения обучаемых [3, с. 84]:

– *мировоззренческой направленности и личностной ориентации процесса математического образования во всех его составляющих*: в содержании, технологиях, средствах и формах организации учебной деятельности, в отдельных звеньях целостного процесса. Соблюдение этого принципа необходимо, прежде всего, для *практического решения* проблем *обучения и воспитания математикой,* для создания у студентов совокупности мировоззренческих микромеханизмов, воспитанию и формированию которых должна быть подчинена самостоятельная работа студентов на соответствующем этапе их развития. Сведения о важнейших микромеханизмах и рекомендации о способах и средствах их формирования приведены в работах [3, 4, 5].

Из серии **культурологических принципов** [2, 3] мы опирались на:

– *принцип культуросообразности и результативности. Системным критерием результативности* педагогического процесса *следует считать уровень развития личностных качеств субъекта*, включенного в этот процесс. В частности, в качестве такого критерия следует считать *уровень развития математической культуры и мировоззрения студента*;

– *принцип диалога культур («участного мышления», «ответственного поступка», «мыслей в мире» – М. М. Бахтин).* Смысл зарождается у человека при его «встрече» с Другим, на грани культур, в их диалоге на базе выбранного *произведения культуры*. Поэтому в системе учебных материалов и заданий необходимы такие, на основе которых *создаются условия для диалога культур его субъектов* [3, 5], вести его вплоть до создания новых для его участников произведений культуры. Этот принцип определяет одно из условий творческого овладения студентом математической культурой;

– *принцип опоры и направленности на потенциальные возможности образовательных областей.* Любую образовательную область целесообразно рассматривать как *проекцию содержания соответствующей грани культуры* (со всеми ее ценностными, объектными и процессуальными составляющими), *обладающую специфическим для нее личностным потенциалом.* Согласно данному принципу, в УМиЗ для самостоятельной работы необходимы такие, которые играют для студента роль опоры в определении *цели* дальнейшей деятельности, *открытой его пониманию* [3, 8].

Из **принципов** образовательной области «Математика» отметим два:

– ***принцип учета специфики предмета*** *математики как грани культуры и как образовательной области;*

– ***соответствия*** *ведущей функции, мировоззренческой направленности и содержательной наполненности учебного предмета.*

Ясно, что обучение той или иной математической дисциплине не может и не должно брать на себя обязательства сформировать математическую культуру обучаемого во всей ее полноте, а тем более – передать им *весь* социальный опыт в этой области. Возникает вопрос: «С какой главной целью вводится в учебный план современной высшей школы та или иная учебная дисциплина, например математический анализ, что является предметом ее рассмотрения?» Мы считаем, что мимо подобных вопросов не должен проходить преподаватель, а вслед за ним и студент. И к этому вопросу и его последующим конкретизациям необходимо неоднократно возвращаться, в том числе и в учебных материалах для студентов. Этот вопрос и поначалу общий ответ на него мы предлагаем студентам уже на первой лекции, а затем – в учебных материалах (см. ниже пример 1).

В работах [3, 5] обосновано, что *основное назначение математического образования* в современной школе должно определяться **предметом математики как своеобразной грани культуры** и, как следствие, задаваться *двумя ведущими компонентами*: 1) специфическими для математики *способами и средствами познания* (какими?) объектов природы, продуктов человеческой деятельности и способов ориентировки человека в окружающем мире; вполне определенным, *специфическим для математики* восприятием, *ви́дением мира* (каким?) (целостно структурированным, образно-символическим, абстрактно-теоретическим с выходом на приложения).

В этих же работах обосновано, что ***математика***, первоначально явившаяся человеку как своеобразный язык, на котором «написана матрица» мира – *матрица его устройства и развития*, благодаря деятельности человеческого разума стала *гранью культуры человека. Совокупный предмет математики составляют идеальные, извлеченные из природы познаваемых объектов, системные средства познания и идеального преобразования окружающего мира и себя в нем (комплексы математических моделей), а также способы оперирования ими и результаты такой деятельности, отнесенные к различным видам человеческой практики.* Такие средства и способы представлены с помощью различных **культурных знаков** – *кодов записи и переработки информации.* В развитии способности человека, в том числе учащегося школы или студента, раскрывать «для себя» этот предмет хотя бы в некоторых его фрагментах, *овладевать им как средством* познания и *разумного* и *социокультурного* (*культуросообразного*) *преобразования* окружающего мира и себя в нем видятся основания и тенденция дальнейшего совершенствования математического образования.

Среди специфических для математики *способов познания и приемов мышления* помимо общих (анализ и синтез; логическое упорядочение данных и др.) в составе математической культуры имеет смысл особо выделить моделирование, метод аналогий, коды записи и переработки информации. К ним относятся: ***образный*** (воображение), ***словесный и словесно-символический, изобразительный и предметный*** *(материализация, овеществление)* и ***действенный*** *(перевод информации в физические или умственные действия)* [3]. Овладению кодами и переходами между ними можно и нужно обучать уже на материале школьной математики, тем более они должны быть включены в УМиЗ для самостоятельной работы.

Существенные ***условия успешного*** *протекания познания* определяются наличием или постепенным возникновением у человека [2, 8]:

а) ***познавательного отношения*** к ситуации, объекту или соучастнику познания, б) ***мотива разрешения ситуации*** – задача «для меня»**,** в) ***личностного смысла знаний*** и г) ***личного опыта построения и использования знаний*** (совокупности математических задач, понятий, утверждений, алгоритмов и т. п.) как средств **понимания и познания**. Эти условия необходимо и можно создавать в процессе обучения, руководствуясь общей ***структурной схемой акта познания*** [3, с. 196] (приведем здесь отдельные шаги):

– студенту необходимо попасть в ***ситуацию выбора***, если человек делает попытку разрешить ситуацию *собственными усилиями* (хотя бы и с помощью Другого), то он *принимает* задачу *и формулирует ее в форме «для себя». Тогда* в действие включаются его «естественные способности», «родовые силы» (Фома Аквинский, К. Маркс): способность и воля *из-обретать* (М. М. Бахтин), экстериоризировать (Л. С. Выготский) *новое идеальное средство* – образ, задачу, действие и т. п. Это уже *знание в действии*;

– совокупность изобретенных средств-знаний ***применяется*** для мысленного или практического разрешения ситуации; накапливается опыт в виде совокупности действий, видов и «программ» деятельности с использованием полученных знаний в их сочетании с ранее уже известными;

– появляется необходимость ***осмысления средств*** с помощью различных культурных знаков: ряда "умственных" образов, их словесно-символического описания и преобразования, материализации в динамических рисунках, схемах, алгоритмах, новых задачах, в другом материале;

– средства и совокупность действий с ними *испытываются на допустимость применения и «прочность», теоретическую или прикладную,* ***усиливая личную ответственность*** человека ***за*** найденные или изобретенные средства, ***за*** свои действия и полученные результаты;

– осуществляется поиск продуктивной организации обретенных знаний (в том числе методов), что нередко приводит к формированию объединяющих, по-новому организующих деятельность «мета-знаний» [1, 8], становящихся своеобразными «ступеньками», составляющими *ядро знаний;*

– в случае успеха в достижении цели (как предполагаемого результата) с новым средством и результатами опыта знакомят других участников, то есть осуществляется ***коммуникация***, в том числе – для своеобразного «шлифования» найденных средств и уточнения пути разрешения ситуации;

– приобретенный опыт *ретроспективно* осмысливается, *рефлектируется*. Результаты сравнивают с запланированными, средства и способы решения анализируют и корректируют. Осуществляется ***презентация продукта*** – еще один способ усиления личной ответственности;

– наконец, ставятся новые задачи для других ситуаций, исследование входит в новую фазу **возможного *переноса*** на новые ситуации и задачи…

Намеченной структурной схеме завершенного акта учебного познания можно придать наглядную форму, что и зафиксировано в «Обобщенной модели научного познания» [3, с. 196]. Она как раз и используется нами в качестве основного ориентира при создании УМиЗ по организации познавательной деятельности студентов физико-математического факультета. В них студентам предлагается овладевать уже упоминавшимися культурными знаками, в том числе и в логике известного *наглядного моделирования* [6], в некоторых важных моментах совпадающего с логикой ***акта научного познания***, детально разработанной с позиций мировоззренческого подхода [3].

Приведем, наконец, примеры созданных нами комплексов материалов и заданий, выстроенных в частичном соответствии с обозначенной теоретической основой – системой принципов. В них также учитывается порядок ознакомления первокурсников с программным учебным материалом по курсу математического анализа (введение).

Пример 1. Фрагмент лекции (*культурно-исторический экскурс*)**:** «Известный математик Норберт Винер разграничивал математические дисциплины *по уровню абстракции* их основных объектов. К **1-му уровню** он относил **арифметику**, связанную с понятием «индивидуального числа» и его *свойствами*, но не использующую символы для *любого числа* (как, например, в школьном курсе алгебры). На **2-ой уровень** – **алгебру**, которая изучает уже индивидуальные *комбинации* (мы говорим: *действия или операции,* а также *отношения равенства* и *неравенства*) чисел вообще и *свойства* таких комбинаций. **3-ий уровень абстракции** Винер связывал *с функциями*, т.е. с произвольными *зависимостями* между числами или группами чисел. Именно на этом уровне рассматриваются *функции натурального* (из ***N***) и *действительного* (из ***R***) аргумента, *индивидуальные* функции (показательная, логарифмическая) в их различных комбинациях (*арифметические действия*; *сложные и обратные функции*), появляются представления о различных *видах (классах) функций, в том числе элементарных*. А именно: линейные, квадратичные, целые, дробно-рациональные, иррациональные, тригонометрические и др. С большей или меньшей подробностью они, *их свойства и графики* изучались в школе в курсе алгебры и **начал анализа**. Наконец, Винер выделяет еще и **4-й уровень абстракции**, предметом рассмотрения на этом уровне являются уже различные преобразования самих функций и даже их классов, причем заданных на множествах, отличающихся от множества ***R***. Такие преобразования *переводят функцию в другую функцию*, в математике их называют **операторами.** К числу простейших из них относят **дифференцирование и интегрирование** функций одной и нескольких переменных, функций комплексного переменного и т.п. *Функции, классы функций, операторы и связанные с ними другие объекты составляют предмет изучения* ***математического анализа***, а основной **метод изучения** этих объектов – метод **бесконечно малых** или, что то же самое, **метод пределов**. В чем заключается этот метод, как его использовать – нам и предстоит понять».

Вопросы-задания.

1. Что вам известно о Норберете Винере? Занимался ли он вопросами математического анализа?

2. Найдите сведения о нем в энциклопедиях: годы жизни, учебы, ученые степени и звания, основные увлечения, открытия в математике (Рекомендуется: 1. Математика. Информатика: Энциклопедия. – М.:ЗАО»РОСМЭН-ПРЕСС», 2007. – 544с. 2. Винер, Норберт. Я – математик / Сокращ. пер. с англ. Ю.С. Родман. – М.: Наука, 1964. – 356 с.).

3. Прочитайте найденные, заинтересовавшие вас фрагменты текстов вслух и *послушайте себя (*группы слов, выделенные курсивом, требуют от вас особого и *продолженного* внимания*)*: что заинтересовало, *подслушайте свои мысли, запишите их, как если бы вы рассказывали их кому-то*?

4. С какими новыми *терминами* вы встретились в этой лекции, что они означают? Зафиксируйте их значения в тетрадях для *самостоятельной работы* (в дальнейшем *тс/р*) (Студентам предлагается завести тетради для *с/р* как обязательный «инструмент» их самостоятельной познавательной деятельности и выполнять там задания с последующей отчетностью по результатам.).

5. Как вы понимаете слово **абстракция**? Приведите в *тс/р* примеры абстракций каждого уровня, выделенного Н. Винером. Что у вас не получилось? Какие вопросы, недоумения возникли, попробуйте ответить – почему?

6. Почему, на ваш взгляд, ни в одном из уровней абстракции Н.Винером, не названа геометрия? Выскажите свое мнение.

Пример 2. Фрагмент лекции-беседы «*Основные и обратные арифметические операции в терминах, символах, свойствах*». *Сводная таблица.*

Мы продолжаем изучать начала математического анализа числовых функций, и нам не обойтись без знаний *свойств самих чисел* и – главное – *действий* с ними. Все это вы изучали в школе, начиная с 1-го класса, наши задачи сейчас – 1) понять, на каком уровне – по Н. Винеру (см. 1-я лекция) – вы все это изучали и поняли и 2) поднять наши знания на более высокий уровень. Запишите эти задачи, что у вас получилось? Как вы их поняли?

– Итак, какие основные операции во множестве чисел (*говорят*: *над числами*) вы знаете, назовите их. (Как правило, студенты перечисляют все подряд: +, –, × и т. д., не отличая основные и производные, прямые и обратные операции, не вспоминая даже возведение в натуральную степень, изредка называют «извлечь корень» – таковы, к сожалению, факты).

– Назовите эти операции *по имени*, то есть назовите *термины*. Какие из этих операций непосредственно связаны друг с другом, как? Связаны ли непосредственно, например, сложение и возведение в степень, вычитание и сложение и другие? (В результате группируются пары: *сложение-вычитание, умножение-деление*). Как символически записать эти операции и их результаты, как называются их компоненты? А можно ли говорить об *операциях во множестве геометрических фигур? Знаете ли вы такие?*

– Итак, мы выяснили, что некоторые операции над числами образуют своеобразные *пары*, а в качестве основных (прямых) операций следует все-таки признать *сложение, умножение и возведение в степень*. Для первых двух из них *парными* являются *вычитание и деление*. Их называют *обратными* для первых из приведенных. Начнем составлять таблицу, которую так и назовем «*Основные и обратные арифметические операции*». Что нам необходимо использовать для краткой записи операций? Возникает необходимость использовать *два рода символов*: *самих действий* и их *компонентов*. Вспоминаем названия компонентов действий и их результатов, а также некоторые свойства. Как называются компоненты этих действий? Обращаем внимание на термины *слагаемые,* ***со****множители*, то есть они как бы «равноправны» уже по своему названию, а по смыслу? На данном этапе важным из свойств является *коммутативность* (*переместительность*) сложения и умножения. Но не так дело обстоит с *возведением в степень*; эта операция *не коммутативна*: $2^3 \neq 3^2$. Желательно по ходу беседы напомнить о названиях: *действия 1-й, 2-й и 3-й ступеней*, и о правилах скобок. Постепенно заполняется первая строка таблицы:

Прямое действие ***(операция)*** (I)	***Сложение*** $a + b = b + a = c$ (II)	***Умножение*** $a \cdot b = b \cdot a = c$ (III)	***Возведение*** *a в b-ю степень* $a^b = c$. Для этой операции можно использовать и такой символ: $a\uparrow^b = c$. (IV, V)

– Дальнейшее заполнение таблицы идет сверху вниз, слева направо и сопровождается подчеркиванием различия между действиями первой-второй и третьей ступени. Важные задачи: а) продолжить формирование исследовательских умений (вопросы, поиск ответов и т.д.); б) начать интегрировать знания об основных арифметических операциях; акцентировать внимание на сходстве и различии в появлении обратных операций (для возведения в степень *необходимы* **две** обратных операции); в) начать исследование вопроса необходимости перехода к понятию *функции.*

Как найти неизвестное? – Решить ***уравнения***	$x + b = c$ $(a + x = c)$	$x \cdot b = c$ $(a \times x = c)$	Два различных **типа** уравнений!	
			$x^b = c$ *– найти* ***неизвестное основание***	$a^x = c$ *– найти* ***неизвестный показатель степени***
Обратное *действие (операция)*	*Вычитание:* $x = c - b$, $(x = c - a)$	*Деление:* $x = c : b$ $(x = c : a)$	*Извлечение корня b-й степени из c:* $x = \sqrt[b]{c}$	*Нахождение показателя (логарифма) по a и c* (?)
Новое понятие *– неизвестный компонент*	***Разность*** *из c числа b* *(из c числа a)*	***Частное*** *от деления* *c на b (c на a)*	***Корень*** (*радикал*) *b-й степени из числа c*	***Логарифм*** *c по основанию a:* $x = \log_a c$
Условия выполнения *операции и существования результата*	*Для любых действительных чисел c, b, a*	*Для любых действительных чисел, кроме b=0 (a = 0)*	$b = 1$ (возможно?), c – ? $b \in N$ – *возможны другие значения*?	a – ? c – ? Почему $a > 0$ и почему *полезен* запрет : $a \neq 1$?
Переход к ***функциям***: формула, область определения, свойства...	Будем в уравнениях постепенно изменять *по нашему выбору x*, что происходит? – Каждому *x* будет соответствовать одно *c*: $c = f(x)$ – *функция* (!)		Что в этих случаях зависит только от нашего выбора – что принять за аргумент *x*, за значения функции *y*?	
			$y = \sqrt[b]{x} = x^{1/b}$	$y = \log_a x$

– Проанализируем, как появляются новые (впрочем, частично известные нам) операции и новые понятия на базе основных (прямых) операций… Добиваемся понимания: вычесть (разделить) – значит *найти* такое *неизвестное число х*, которое при сложении с известным (умножении на известное) дает нам результат основного действия. Как называются эти новые (относительно основных) операции? Нам потребовалось и новое (относительно) *понятие.*

– Подметим, что это понятие относится к *результату* новой (обратной) операции. Так часто поступают и в обыденной жизни: новому неизвестному мы даем новое название, чтобы как-то отличить его от знакомых объектов. Приведите свои примеры! Заметим, что в первой и второй колонках по *два* уравнения, но для обоих – *одно обратное действие и одно понятие*. Как вы думаете, почему это оказалось возможным – *единственное обратное действие*? Как это связано со свойствами прямых действий? И т. д.

– **Исторический экскурс:** Какова этимология слов: «корень» («радикал»), «логарифм»? Внимательнее вдумаемся в последнее слово-термин? Кем и когда, для каких целей использовался? Почитаем внимательно, например, учебник (К. А. Рыбников История математики. М.: Изд-во МГУ, 1974. – 456с. – С.127-135 и другие.) и вначале устно, а затем в *тс/р* ответим на вопросы: 1. Слово «логарифм» произошло от соединения двух греческих слов: λογος – отношение, ἀριθμοζ – число. Ввел его шотландский барон Джон Непер (1550–1617). Он исходил при этом из идеи функциональной зависимости, представленной в виде двух шкал (см. рис. 1).

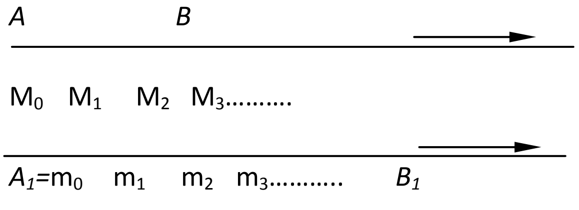

Рис. 1

Что, по вашему мнению, изображено на этих шкалах? Одинаковые ли по длине отрезки на одной и той же шкале, почему? что бы это значило? на этих шкалах в их сравнении $[\mathrm{M}_{к},\mathrm{M}_{к+1}]$ и $[\mathrm{m}_{к},\mathrm{m}_{к+1}]$, почему? 2. Чем еще в математике известны имена Дж.Непера, Симона Стевина, И.Кеплера? Как их работы были связаны с анализом бесконечно малых, друг с другом и с идеей функциональной зависимости? Как удачно найденное слово превратилось в научный термин? **Задание:** напишите в *тс/р* обо всем вами понятом небольшую работу. Вернемся к таблице и *сделаем **выводы**…* Далее, опираясь на последнюю строку таблицы, *постараемся понять*: зачем и как появляется необходимость в таком фундаментальном поятии математики как *функция…* Выскажете свою точку зрения, ваше понимание вопроса…

Примечания:

1. Аверьянов А.Н. Системное познание мира. – М., 1985. – С. 159.
2. Блауберг И.В. Проблема целостности и системный подход. [Текст]. – М.: Эдиториал УРСС, 1997. – 448 с.
3. Жохов, А.Л. Комплексно-интегративный подход к построению методических концепций [Текст]. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Вип. VII: В 3-х тт. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НметАУ, Украина. 2008. – Том I: теорія та методика навчання математики. С. 79-84.
4. Жохов, А.Л. Формирование начал научного мировоззрения школьников при обучении математике [Текст]. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. 211 с.
5. Капіносов А.М., Білоусова Г.І. и др. Математика: Посібник для підготовки до зовнішньо незалежного оцінювання. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2011.– 400с.
6. Кирносова, О.А., Жохов, А.Л. Некоторые возможности интегрирования знаний и умений студентов-математиков при изучении основ математического анализа [Текст] // Математика и физика…: материалы междунар. конфер. «Чтения Ушинского» физ.-матем. факультета. – Ч.II. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011.–С.12-20.
7. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учебное пособие / Под ред. Е.И. Смирнова. Ярославль: ИПК «Индиго», 2007. 454 с.
8. Никольский С.М. Курс математического анализа: Учебник для вузов. – 6-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
9. Розин В.М. Методология: становление и современное состояние. Учебное пособие. М.: Московский психолого-социальный институт, 2005. – 414с.