УДК 37.0

В. В. Богун

Методика использования графических калькуляторов при изучении аналитической геометрии

В данной статье рассматривается применение информационно-коммуникационных технологий с точки зрения графических калькуляторов при изучении аналитической геометрии на плоскости. Представлена суть проблемы, возникающей при нахождении значений параметров геометрических фигур на плоскости, рассматривается использование разработанной автором программы на графическом калькуляторе для нахождения значений необходимых параметров и визуализации результатов в рамках проведения соответствующих практических занятий.

Ключевые слова: информационно-коммуникационные технологии, аналитическая геометрия на плоскости, графический калькулятор, практические занятия.

V. V. Bogun

Technique of Use of Graphic Calculators at Studying Analytical Geometry

In the given article use of information-communication technologies from the point of view of graphic calculators is considered at studying Analytical Geometry on a plane. The essence of the problem arising at a finding of values of parametres of geometrical figures on a plane is presented, use of the programme developed by the author on the graphic calculator for a finding of values of necessary parametres and visualisation of results within the limits of carrying out of the corresponding practical training is considered.

Key words: information-communication technologies, Analytical Geometry on planes, a graphic calculator, practical training.

В рамках школьного курса геометрии геометрические свойства произвольных треугольников на плоскости рассматриваются только с точки зрения линейных и угловых размеров элементов треугольника. При изучении высшей математики элементарная школьная геометрия возводится на новый уровень через призму аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, суть которой сводится к определению необходимых параметров геометрических фигур исходя из координат точек в двумерном или трехмерном пространстве, то есть осуществляется повторение полученных в школе знаний по элементарной геометрии и тригонометрии на новом более сложном уровне в вузе.

Пусть на плоскости представлены три произвольные точки, образующие произвольный треугольник (ΔABC), со следующими координатами: $A\ (x_A, y_A)$, $B\ (x_B, y_B)$ и $C\ (x_C, y_C)$.

При исследовании произвольного треугольника на плоскости методами аналитической геометрии используются несколько основных составляющих.

1. Нахождение уравнения прямой, отвечающей за определенный линейный элемент треугольника (сторону, высоту, медиану, биссектрису, серединный перпендикуляр, радиусы вписанной и описанной окружностей).

Для нахождения уравнения прямой на плоскости по координатам двух точек прямой необходимо воспользоваться уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту: $y = k \cdot x + b$, где k – угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс, b – свободный коэффициент прямой, равный длине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат от начала координат.

Поскольку для каждой из рассматриваемых прямых имеем значения координат двух точек прямых, можно реализовать нахождение значений коэффициентов k и b для прямых через решение системы двух линейных алгебраических уравнений.

Например, для стороны AB треугольника ΔABC, характеризуемую точками $A\ (x_A, y_A)$ и $B\ (x_B, y_B)$, имеем систему линейных алгебраических уравнений:

© Богун В. В., 2012

$$\begin{cases} y_A = k_{AB} \cdot x_A + b_{AB} \\ y_B = k_{AB} \cdot x_B + b_{AB} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AB} \cdot x_A + b_{AB} = y_A \\ k_{AB} \cdot x_B + b_{AB} = y_B \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных алгебраических уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{AB} и b_{AB}:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},$$

$$b_{AB} = y_B - k_{AB} \cdot x_B = y_B - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_B \quad \text{или}$$

$$b_{AB} = y_A - k_{AB} \cdot x_A = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A .$$

Таким образом, уравнение стороны AB: $y = k_{AB} \cdot x + b_{AB}$.

2. Нахождение величины отрезка прямой по координатам концов отрезка (стороны, высоты, медианы, биссектрисы, серединного перпендикуляра, радиусов вписанной и описанной окружностей).

Значения величины отрезка прямой по координатам концов отрезка определяется по теореме Пифагора.

Например, величина стороны AB треугольника ΔABC, характеризуемой точками A (x_A, y_A) и B (x_B, y_B), определяется по формуле:

$$l_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

3. Нахождение уравнения прямой, перпендикулярной к данной прямой (высот, радиусов вписанной окружности и серединных перпендикуляров треугольника).

Для нахождения значений коэффициентов k и b для прямых, перпендикулярным исходным прямым, необходимо воспользоваться соотношениями:

$$k_H = -\frac{1}{k_S}, \; b_H = y_P - k_H \cdot x_P = y_P + \frac{x_P}{k_S},$$

где:

k_H – угловой коэффициент прямой, перпендикулярной исходной прямой;

k_S – угловой коэффициент исходной прямой;

$x_P(y_P)$ – абсцисса (ордината) точки, принадлежащей исходной прямой.

Например, для высоты CH_3 треугольника ΔABC, опущенной из вершины C на сторону AB, имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов k_{CH3} и b_{CH3}:

$$k_{CH3} = -\frac{1}{k_{AB}}, \; b_{CH3} = y_C - k_{CH3} \cdot x_C = y_C - \frac{x_C}{k_{AB}}.$$

Уравнение высоты CH_3: $y = k_{CH3} \cdot x + b_{CH3}$.

4. Нахождение координат точки пересечения двух прямых на плоскости (сторон, высот, медиан, биссектрис, серединных перпендикуляров, радиусов вписанной и описанной окружностей).

Для нахождения точек пересечения двух прямых на плоскости, необходимо воспользоваться уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту, то есть $y = k \cdot x + b$. Поскольку для каждой из пересекающихся прямых имеем значения коэффициентов k и b, можно реализовать нахождение численных значений координат точки пересечения прямых через решение системы двух линейных алгебраических уравнений.

Например, для нахождения точки пересечения высоты CH_3 и стороны AB треугольника ΔABC, то есть точки $H_3(x_{H3}, y_{H3})$, имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} y_{H3} = k_{CH3} \cdot x_{H3} + b_{CH3} \\ y_{H3} = k_{AB} \cdot x_{H3} + b_{AB} \end{cases}, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} k_{CH3} \cdot x_{H3} - y_{H3} = -b_{CH3} \\ k_{AB} \cdot x_{H3} - y_{H3} = -b_{AB} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных алгебраических уравнений получим выражения для нахождения значений координат точки $H_3(x_{H3}, y_{H3})$:

$$x_{H3} = -\frac{b_{AB} - b_{CH3}}{k_{AB} - k_{CH3}} = -\frac{b_{CH3} - b_{AB}}{k_{CH3} - k_{AB}},$$

$$y_{H3} = k_{CH3} \cdot x_{H3} + b_{CH3} = -\frac{b_{AB} - b_{CH3}}{k_{AB} - k_{CH3}} \cdot k_{CH3} + b_{CH3}$$

или

$$y_{H3} = k_{AB} \cdot x_{H3} + b_{AB} = -\frac{b_{AB} - b_{CH3}}{k_{AB} - k_{CH3}} \cdot k_{AB} + b_{AB}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения высоты CH_3 и стороны AB для треугольника ΔABC, то есть точки $H_3(x_{H3}, y_{H3})$.

5. Вычисление площади треугольника по значениям стороны и опущенной на нее высоту.

Например, вычисление площади треугольника ΔABC по величинам стороны AB и опущенной на нее высоты CH_3 осуществляется по формулам вычисления площади треугольника по стороне и опущенной на нее высоте:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{l_{AB} \cdot l_{CH3}}{2}.$$

6. Нахождение координат середины отрезка (оснований медиан и серединных перпендикуляров).

Например, координаты середины стороны AB, то есть точки $M_1(x_{M1}, y_{M1})$, определяются по формулам:

$$x_{M1} = \frac{x_B + x_C}{2}, \ y_{M1} = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

7. Нахождение координат оснований биссектрис треугольника.

При решении данной задачи необходимо воспользоваться утверждением, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, отношение которых равно отношению прилежащих сторон.

Например, координаты основания биссектрисы CK_3, то есть точки $K_3(x_{K3}, y_{K3})$, определяются по соотношениям:

$$\frac{l_{K3B}}{l_{K3A}} = \frac{l_{BC}}{l_{AC}},$$

$$\frac{x_B - x_A}{x_{K3} - x_A} = \frac{l_{AB}}{l_{K3A}} = \frac{l_{K3A} + l_{K3B}}{l_{K3A}} = \frac{l_{AC} + l_{BC}}{l_{AC}} = 1 + \frac{l_{BC}}{l_{AC}}.$$

Тогда $x_{K3} = x_A + \dfrac{x_B - x_A}{1 + \dfrac{l_{BC}}{l_{AC}}}$, аналогично

$$y_{K3} = y_A + \frac{y_B - y_A}{1 + \dfrac{l_{BC}}{l_{AC}}}.$$

Состояние и пути решения проблемы

В настоящее время актуальными являются вопросы корректного и оптимального использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) в образовательном процессе. Применение ИКТ в процессе обучения предоставляет отличные возможности для повышения мотивации студентов к учебной деятельности и повышения эффективности решения учебных и научно-исследовательских задач будущего учителя математики.

Перспективным направлением технологизации математического образования представляется использование графических калькуляторов в обучении предметам естественно-научного непосредственно на занятиях по математике в силу компактности размеров и независимости источников питания. Графические калькуляторы целесообразно использовать при организации учебного процесса в силу их компактности, автономности и мобильности, а также наличия необходимого и вполне достаточного для реализации широкого круга методических и дидактических функций и решения математических и прикладных задач функционального оснащения.

Основной целью использования графических калькуляторов в обучении математике является исследование сложных явлений и процессов в рамках реализации межпредметных связей через призму построения различных концептуальных, математических и информационных моделей в сочетании с наглядностью, удобством пользования и возможностями непосредственного сравнительного анализа различных методов решения, промежуточных и итоговых результатов.

При использовании графических калькуляторов в обучении математики необходимо решать следующие задачи [1], [2], [3]:

1. Математические (исследование функциональных зависимостей; освоение численных методов решения математических задач; сравнительный анализ эффективности вычислительных процедур.
2. Информационные (освоение функциональных возможностей графического калькулятора; освоение среды программирования графического калькулятора; навыки создания алгоритмов, блок-схем и программ для решения математических задач.
3. Личностные (развитие математической, информационной и алгоритмической культуры студентов; творческая активность (анализ результатов с выдвижением и проверкой гипотез, варьирование данных, оптимизация мыслительных процессов); коммуникативная и ролевая деятельность студентов в процессе интеграции знаний, умений и навыков на примере изучения математики в малых группах с использованием информационных технологий; мотивация к изучению математических и информационных дисциплин).
4. Профессиональные (наглядное моделирование объектов и процессов; визуализация итерационных процессов; интеграция математических и информационных процессов; управление процессами познавательной деятельности учащихся).

Преимущества использования графических калькуляторов в обучении математики отражены в следующих позициях:

1. Мобильность и автономность использования в сочетании с низким энергопотреблением.

2. Автоматизация выполнения большого количества необходимых рутинных однообразных вычислений при решении математических задач на основе применения численных методов с возможностью проведения статистических расчетов после окончательного выполнения программы.

3. Автоматизация проведения необходимых расчетов в результате варьирования значений исходных данных.

Основная цель практических занятий по аналитической геометрии состоит в использовании графического калькулятора как средства интеграции математических и информационных знаний при выполнении численных расчетов, суть которых заключается в нахождении и визуализации параметров геометрических фигур.

При реализации рассматриваемого проекта на основании поставленной цели были сформулированы следующие математические, информационные и дидактические задачи:

1. Изучение геометрических свойств произвольных треугольников на плоскости средствами аналитической геометрии.

2. Применение метода проектов при решении математических задач.

3. Применение информационно-коммуникационных технологий при решении математических задач и выполнении проекта в целом.

Фактически все практические занятия сводятся к определению и визуализация геометрических параметров произвольных треугольников на плоскости исходя из задания значений координат его вершин с использованием соответствующей программы под названием *“ANGEOPL”*.

Реализация инноваций

В данной статье представлено описание программы и методика проведения аудиторного практического занятия в рамках практического занятия по реализации вычислений значений линейных элементов произвольного треугольника на плоскости (программа «GEOTRIAN», раздел «Аналитическая геометрия на плоскости», курс «Математика»).

Разработанное автором программное обеспечение для графического калькулятора характеризуется следующими особенностями [1, 4]:

1. Реализация принципа сохранения значений исходных данных и результатов расчетов в соответствующих матрицах (в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов «RUN.MATrix»).

2. Интеллектуальная и удобная в использовании система навигации внутри программы в виде совокупности последовательных меню с корректной обработкой ошибок ввода необходимых параметров.

3. Возможность варьирования различных параметров и исходных данных непосредственно при работе внутри программы.

Рассмотрим схему работы программы *“ANGEOPL”*, предназначенной для проведения математического анализа произвольных треугольников в рамках раздела “Аналитическая геометрия на плоскости” курса высшей математики.

В данной программе по вводимым значениям координат трех точек (точек A, B и C) на плоскости, образующих произвольный треугольник (ΔABC), то есть точек реализуются следующие задачи:

1. Нахождение уравнений сторон треугольника ΔABC (AB, AC и BC).

2. Нахождение величин сторон треугольника ΔABC (AB, AC и BC).

3. Нахождение уравнений высот треугольника ΔABC (AH_1, BH_2 и CH_3).

4. Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них высот, то есть оснований высот, для треугольника ΔABC (AH_1 и BC, BH_2 и AC, CH_3 и AB).

5. Нахождение величин высот треугольника ΔABC (AH_1, BH_2 и CH_3).

6. Вычисление площади треугольника ΔABC по трем вариантам попарно рассматриваемых сторон и высот (BC и AH_1, AC и BH_2, AB и CH_3).

7. Нахождение координат точки пересечения высот или ортоцентра треугольника ΔABC, то есть точки H_C, по трем вариантам попарно рассматриваемых высот (AH_1 и BH_2, AH_1 и CH_3, BH_2 и CH_3).

8. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения высот треугольника ΔABC, то есть точкой H_C, и вершинами треугольника (H_CA, H_CB и H_CC).

9. Нахождение координат точек пересече-

ния сторон и опущенных на них медиан, то есть оснований медиан, для треугольника ΔABC (AM_1 и BC, BM_2 и AC, CM_3 и AB).

10. Нахождение уравнений медиан треугольника ΔABC (AM_1, BM_2 и CM_3).

11. Нахождение величин медиан треугольника ΔABC (AM_1, BM_2 и CM_3).

12. Нахождение координат точки пересечения медиан или центра тяжести треугольника ΔABC, то есть точки M_C, по трем вариантам попарно рассматриваемых медиан (AM_1 и BM_2, AM_1 и CM_3, BM_2 и CM_3).

13. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения медиан треугольника ΔABC, то есть точкой M_C, и вершинами треугольника (M_CA, M_CB и M_CC).

14. Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них биссектрис, то есть оснований биссектрис, для треугольника ΔABC (AK_1 и BC, BK_2 и AC, CK_3 и AB).

15. Нахождение уравнений биссектрис треугольника ΔABC (AK_1, BK_2 и CK_3).

16. Нахождение величин биссектрис треугольника ΔABC (AK_1, BK_2 и CK_3).

17. Нахождение координат точки пересечения биссектрис треугольника ΔABC (центра вписанной в треугольник ΔABC окружности), то есть точки K_C (I_C), по трем вариантам попарно рассматриваемых биссектрис (AK_1 и BK_2, AK_1 и CK_3, BK_2 и CK_3).

18. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения биссектрис треугольника ΔABC, то есть точки K_C, и вершинами треугольника (K_CA, K_CB и K_CC).

19. Нахождение уравнений перпендикуляров (радиусов вписанной в треугольник ΔABC окружности), опущенных из центра вписанной в треугольник ΔABC окружности, то есть из точки I_C, на стороны треугольника (I_CL_1, I_CL_2 и I_CL_3 на стороны BC, AC и AB соответственно).

20. Нахождение координат точек пересечения перпендикуляров (радиусов вписанной в треугольник ΔABC окружности), опущенных из центра вписанной в треугольник ΔABC окружности, то есть из точки I_C, на стороны треугольника (I_CL_1, I_CL_2 и I_CL_3 на стороны BC, AC и AB соответственно).

21. Нахождение величин радиусов вписанной в треугольник ΔABC окружности (I_CL_1, I_CL_2 и I_CL_3).

22. Нахождение координат точек пересечения сторон и серединных перпендикуляров для треугольника ΔABC (M_1N_1 и BC, M_2N_2 и AC, M_3N_3 и AB).

23. Нахождение уравнений серединных перпендикуляров треугольника ΔABC, опущенных на стороны треугольника (M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 на стороны BC, AC и AB соответственно).

24. Нахождение координат точек пересечения сторон и серединных перпендикуляров для треугольника ΔABC (M_1N_1 и AB, M_2N_2 и BC, M_3N_3 и AC).

25. Нахождение величин серединных перпендикуляров треугольника ΔABC (M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3).

26. Нахождение координат точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника ΔABC (центра описанной вокруг треугольника ΔABC окружности), то есть точки N_C (D_C), по трем вариантам попарно рассматриваемых серединных перпендикуляров (M_1N_1 и M_2N_2, M_1N_1 и M_3N_3, M_2N_2 и M_3N_3 соответственно).

27. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ΔABC, то есть точкой N_C, и серединами сторон треугольника (N_CM_1, N_CM_2 и N_CM_3).

28. Нахождение уравнений прямых (радиусов описанной вокруг треугольника ΔABC окружности), проходящих через центр описанной вокруг треугольника ΔABC окружности, то есть точку D_C, и вершины треугольника (D_CA, D_CB и D_CC).

29. Нахождение величин радиусов описанной вокруг треугольника ΔABC окружности (D_CA, D_CB и D_CC).

Практические занятия по реализации вычислений и визуализации разносторонних геометрических параметров произвольных треугольников на плоскости, исходя из координат вершин треугольника, с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы *“ANGEOPL”* могут быть разделены на два этапа.

На первом этапе (“Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров треугольника аналитическим методом”) преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента с целью организации коллективной деятельности с учетом различных личностных психологических особенностей студентов. Каждой из групп представляют различные численные значения координат вершин треугольника и предлагают реализовать нахождение необходимых параметров треугольника, при этом студентами в рамках малой группы осуществляется совместное нахождение параметров сторон треугольника, а затем предполагается проведение каждым из студентов в рамках малой группы комплексного анализа взаимосвязанных параметров (например, математический анализ высот треугольника, медиан, биссектрис или серединных перпендикуляров). Все необходимые расчеты обязательно отражаются на листе бумаге с отображением подробных промежуточных и итоговых расчетов, а также визуализацией исследуемой совокупности объектов.

На втором этапе (“Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров треугольника с использованием представленной в графическом калькуляторе программы “ANGEOPL””) преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает определенное количество различных вариантов численных значений вершин треугольника в рамках одной малой группы.

Студенты, прежде всего, проверяют правильность выполнения расчетов, проведенных на первом этапе, осуществляют сравнительный анализ полученных результатов с помощью представленной в графическом калькуляторе программы *“ANGEOPL”*, после чего производят автоматические расчеты с последующей визуализацией, на основе которых формулируют необходимые выводы.

Описание программы *“ANGEOPL”* приведем на примере проведения математического анализа произвольного треугольника ΔABC, образованного точками $A(1,4)$, $B(2,6)$ и $C(4,3)$, в сопровождении логически расположенных на рис. 1 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования *“ProGraM”* при помощи активации соответствующей пиктограммы нажатием клавиши *“EXE”*. Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием *“ANGLEOPL”* и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 1A).

Последовательные нажатия клавиши *“EXE”* служат для отображения следующих окон:

- Окна диалога для ввода значений координат точки A (X_A *[“XA”]* и Y_A *[“YA”]*) (рис. 1B).
- Окна диалога для ввода значений координат точки B (X_B *[“XB”]* и Y_B *[“YB”]*) (рис. 1C).
- Окна диалога для ввода значений координат точки C (X_C *[“XC”]* и Y_C *[“YC”]*) (рис. 1D).

При работе с указанными меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши *“EXE”*, при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши *“EXE”* для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После ввода значений вышеуказанных параметров последующее нажатие клавиши *“EXE”* приводит к появлению диалогового окна меню со следующими позициями (рис. 1E):

- **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
- **RELOAD COORDS A (2)** – перезагрузка значений координат точки *A* с отображением соответствующего окна.
- **RELOAD COORDS B (3)** – перезагрузка значений координат точки *B* с отображением соответствующего окна.
- **RELOAD COORDS C (4)** – перезагрузка значений координат точки С с отображением соответствующего диалогового окна.
- **RELOAD ALL (4)** – перезагрузка значений координат всех вершин треугольника, то есть точек *A, B* и *C,* с поочередным отображением соответствующих диалоговых окон.

➢ **OR QUIT (5)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора подтверждения продолжения выполнения расчетов в результате последовательного ввода цифры “1” и нажатия клавиши *“EXE”* осуществляется математический анализ обработки исходных данных координат вершин треугольника с поочередным отображением следующих окон:

➢ Окна вывода в виде матрицы *“A”* результатов реализации расчетов параметров сторон треугольника ΔABC (коэффициентов уравнений сторон, величин сторон), что отражено на рис. 1F.

➢ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с поочередным указанием вершин треугольника (точек A, B и C), что отражено на рис. 1G, 8H, 8I соответственно.

После вывода параметров результатов расчетов сторон треугольника последующее нажатие клавиши *“EXE”* приводит к появлению диалогового окна меню со следующими позициями (рис. 1J):

➢ **CALCUL HEIGHTS (1)** – подтверждение выполнения расчетов параметров высот треугольника с последовательным отображением следующих окон (рис. 1K):

✓ Окна вывода в виде матрицы *“B”* результатов реализации расчетов параметров высот треугольника ΔABC (AH_1, BH_2 и CH_3), опущенных на стороны BC, AC и AB соответственно (коэффициентов уравнений высот, координат точек пересечения сторон и опущенных на них высот, величин высот, значений площади треугольника по трем вариантам попарно рассматриваемых сторон и высот).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих высоты треугольника, а также поочередным указанием оснований высот (точек H_1, H_2 и H_3).

✓ Окна вывода в виде матрицы *“C”* результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения высот или ортоцентра треугольника ΔABC, то есть точки H_C (координат точки пересечения высот по трем вариантам попарно рассматриваемых высот, величин расстояний между точкой пересечения высот и вершинами треугольника).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и высоты треугольника, с последующим указанием точки взаимного пересечения высот треугольника (точки H_C).

➢ **CALCUL MEDIANS (2)** – подтверждение выполнения расчетов параметров медиан треугольника с последовательным отображением следующих окон (рис. 1L):

✓ Окна вывода в виде матрицы *“D”* результатов реализации расчетов параметров медиан треугольника ΔABC (AM_1, BM_2 и CM_3), опущенных на стороны BC, AC и AB соответственно (координат точек пересечения сторон и опущенных на них медиан, коэффициентов уравнений медиан, величин медиан).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих медианы треугольника, а также поочередным указанием оснований медиан треугольника (точек M_1, M_2 и M_3).

✓ Окна вывода в виде матрицы *“E”* результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения медиан или центра тяжести треугольника ΔABC, то есть точки M_C (координат точки пересечения медиан по трем вариантам попарно рассматриваемых медиан, величин расстояний между точкой пересечения медиан и вершинами треугольника).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и медианы треугольника, с последующим указанием точки взаимного пересечения медиан треугольника (точки M_C).

➢ **CALCUL INS CIR (3)** – подтверждение выполнения расчетов параметров биссектрис треугольника и вписанной в него окружности с последовательным отображением следующих окон (рис. 1M):

✓ Окна вывода в виде матрицы *“F”* результатов реализации расчетов параметров биссектрис треугольника ΔABC (AK_1, BK_2 и CK_3), опущенных на стороны BC, AC и AB соответственно (координат точек пересечения сторон и опущенных на них биссектрис, коэффициентов уравнений биссектрис, величин биссектрис).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих биссектрисы треугольника, а также поочередным указанием оснований биссектрис треугольника (точек K_1, K_2 и K_3).

✓ Окна вывода в виде матрицы *"G"* результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения биссектрис или центра вписанной в треугольник ΔABC окружности, то есть точки K_C (I_C) (координат точки пересечения биссектрис по трем вариантам попарно рассматриваемых биссектрис, величин расстояний между точкой пересечения биссектрис и вершинами треугольника).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и биссектрисы треугольника, с последующим указанием точки взаимного пересечения биссектрис треугольника (точки K_C).

✓ Окна вывода в виде матрицы *"H"* результатов реализации расчетов параметров радиусов вписанной в треугольник ΔABC окружности (I_CL_1, I_CL_2 и I_CL_3), опущенных на стороны BC, AC и AB соответственно (коэффициентов уравнений радиусов вписанной окружности, координат точек пересечения сторон и опущенных на них радиусов вписанной окружности, величин радиусов вписанной окружности).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и биссектрисы треугольника, с последующей визуализацией радиусов вписанной в треугольник окружности и самой вписанной в треугольник окружности, а также поочередным указанием центра вписанной окружности (точки I_C) и точек оснований радиусов вписанной окружности (точек L_1, L_2 и L_3 соответственно).

➢ **CALCUL DES CIR (4)** – подтверждение выполнения расчетов параметров серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, и описанной вокруг него окружности с последовательным отображением следующих окон (рис. 1N):

✓ Окна вывода в виде матрицы *"K"* результатов реализации расчетов параметров серединных перпендикуляров для треугольника ΔABC (M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3), опущенных на стороны BC, AC и AB соответственно (координат точек пересечения сторон и опущенных на них серединных перпендикуляров, коэффициентов уравнений серединных перпендикуляров, величин серединных перпендикуляров).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих серединные перпендикуляры треугольника, а также поочередным указанием оснований серединных перпендикуляров треугольника (точек M_1, M_2 и M_3 соответственно).

✓ Окна вывода в виде матрицы *"L"* результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения серединных перпендикуляров или центра описанной вокруг треугольника ΔABC окружности, то есть точки N_C (D_C) (координат точки пересечения серединных перпендикуляров по трем вариантам попарно рассматриваемых серединных перпендикуляров и величин расстояний между точкой пересечения серединных перпендикуляров и серединами сторон треугольника).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и серединные перпендикуляры треугольника, с последующим указанием точки их взаимного пересечения (точки D_C).

✓ Окна вывода в виде матрицы *"M"* результатов реализации расчетов параметров радиусов описанной вокруг треугольника ΔABC окружности (D_CA, D_CB и D_CC) с основаниями, являющимися вершинами треугольника (точками A, B и C).

✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и серединные перпендикуляры треугольника, с последующей параллельной визуализацией радиусов описанной окружности и самой описанной вокруг треугольника окружности, а также с поочередным указанием центра описанной окружности (точки D_C) и оснований радиусов описанной окружности (точек A, B и C) (коэффициентов уравнений радиусов описанной окружности, величин радиусов описанной окружности).

➢ **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

В процессе выполнения программы результаты всех итоговых результатов проецируются в определенные матрицы, доступ к которым возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов "*RUN.MATrix*").

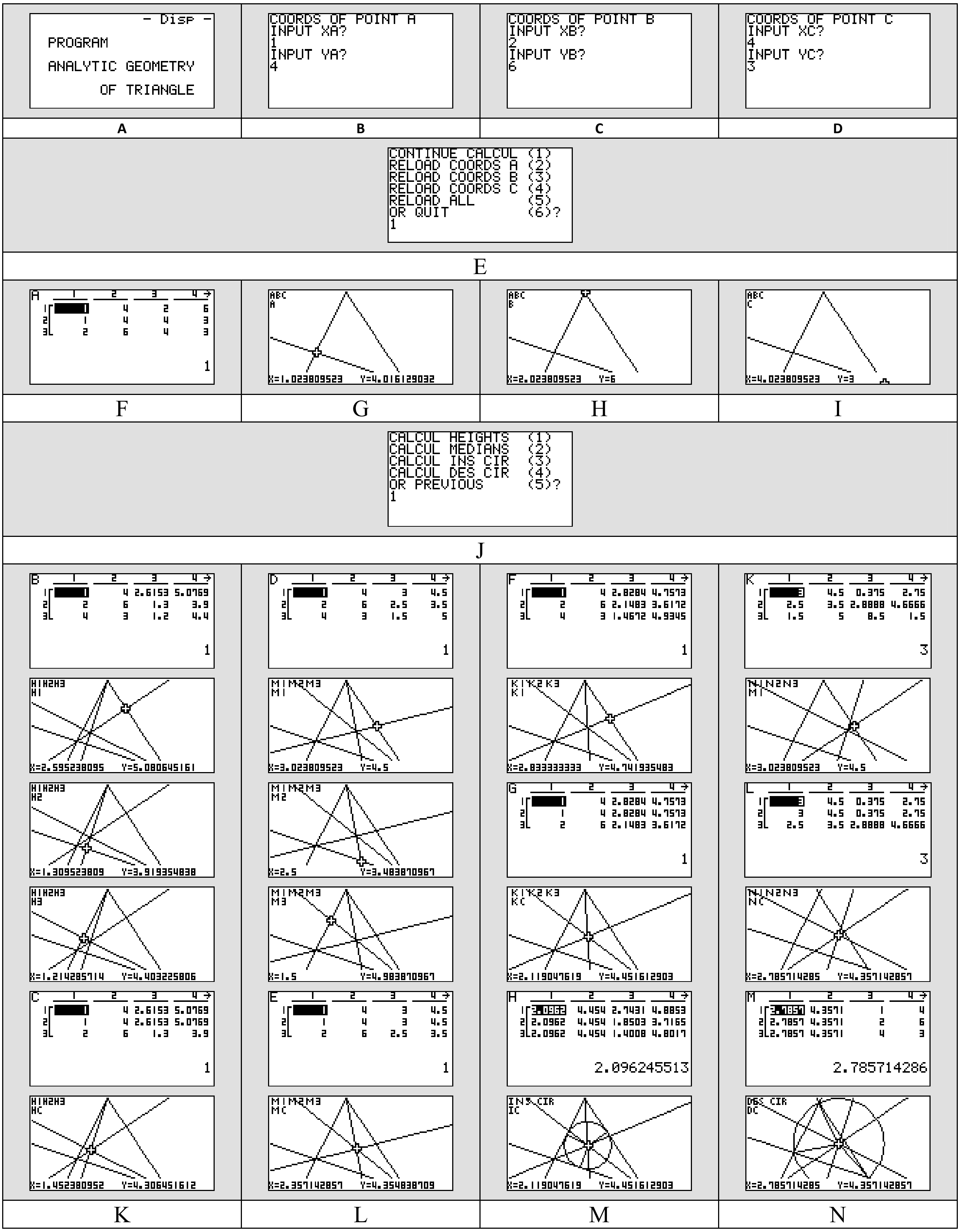

Рис. 1. Скриншоты из программы *“ANGEOPL”*

Таким образом, благодаря использованию графических калькуляторов при нахождении значений характеристик произвольного треугольника на плоскости средствами аналитической геометрии в рамках проведения практических аудиторных занятий по математике в силу их доступности, удобства пользования и наличия большого количества функций возможно добиться существенно нового уровня качества предлагаемых образовательных услуг. В процессе обучения учащиеся ознакомятся с принципиально новым методическим подходом к организации учебной деятельности благодаря возможности использовать графический калькулятор непосредственно на учебных занятиях по различным предметам в рамках реализации межпредметных связей.

Библиографический список:

1. Богун, В. В. Методика использования графического калькулятора в обучении математике студентов педагогических вузов [Текст] : дис. … канд. пед. наук / В. В. Богун. – Ярославль, 2006. – 245 с.

2. Богун, В. В., Смирнов, Е. И. Использование графического калькулятора в обучении математике [Текст] / В. В. Богун, Е. И. Смирнов // Труды третьих Колмогоровских чтений. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2005. – 11 с.

3. Богун, В. В., Смирнов, Е. И. Организация учебной деятельности студентов по математике с использованием малых средств информатизации [Текст] / В. В. Богун, Е. И. Смирнов // Ярославский педагогический вестник. – 2009. – № 4. – 6 с.

4. Богун, В. В., Смирнов, Е. И. Лабораторный практикум по математике с графическим калькулятором [Текст] : учеб. пособие / В. В. Богун, Е. И Смирнов. – Ярославль : Изд-во «Канцлер», 2010. – 272 с.