МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 517.9

Е. А. Зубова, Е. И. Смирнов

Универсально слабая сходимость в топологической группе, ассоциированной с σ-алгеброй множеств

Использование функционально-аналитических методов в теории меры и интеграла позволяет развивать теорию интегрирования относительно положительной меры Радона на топологическом пространстве. Существенно, что при таком подходе интеграл появляется раньше меры как счетно-аддитивной функции множества. В то же время основная идея продолжения меры с полукольца на σ-алгебру множеств несет в себе явные черты замыкания в ассоциированной с σ-алгеброй группе, наделенной согласованной топологией (или псевдотопологией). В настоящем параграфе вводится и исследуется ряд псевдотопологий на коммутативной группе B, ассоциированной с σ-алгеброй множеств, с помощью которых описывается универсально слабая сходимость в B. Основная идея продолжения меры реализуется с помощью теории счетно-полуаддитивных функционалов на топологической группе [3].

Ключевые слова: счетно-полуаддитивные функционалы, топологические группы, универсально слабая сходимость, псевдотопологии.

E. A. Zubova, E. I. Smirnov

Universally Weak Convergence in the Topological Group Associated with σ-Algebra of Sets

Use of functional and analytical methods in the theory of measure and integral allows to develop the theory of integration of relatively positive measure of Radon on the topological space. It is essential that using such an approach the integral appears before measure as a countably additive function of the set. At the same time the main idea of continuation of the measure from a half ring on σ - algebra of sets has in itself obvious lines of short circuit in associated with σ - algebra to the group allocated with coordinated topology (or pseudo-topology). In the present paragraph a number of pseudo-topology on the commutative B group associated with σ - algebra of sets by means of which universally weak convergence in B is entered and investigated. The main idea of continuation of the measure is realized by means of the theory of calculating and semi-additive functionalities on thetopological group [1].

Keywords: calculating and semi-additive functionalities, topological groups, universally weak convergence, pseudo-topology.

Универсальная слабая сходимость

Пусть (X, B, m) – измеримое пространство с неотрицательной счетно-аддитивной конечной мерой m, где B – σ-алгебра B-измеримых подмножеств $A \subset X$. Множество B становится абелевой группой, если операцию сложения определить следующим образом: $A_1+A_2=A_1\Delta A_2$, где $A_1, A_2 \in B$ и Δ – знак симметрической разности. Нулевым элементом группы является пустое множество $\varnothing$, противоположным элементом группы данному $A \in B$ является само множество A. Если $F = \{A \in B : m(A) = 0\}$, то B / F становится абелевой группой, где групповая операция единственным образом индуцируется из B. Элементы группы B / F будем обозначать $\overline{A}$, где $A \in B$ и $A \in \overline{A}.$ Ясно, что неотрицательный функционал $\| A \| = m(A)$, определенный на B, является полуаддитивным и симметричным и, следовательно, определяет топологическую группу (B, τ_m), вообще говоря, неотделимую, со счетным базисом окрестностей нуля

$$V_n = \{A \in B : m(a) < \frac{1}{n}\} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Неотрицательный функционал $\| \overline{A} \| = m(A)$, где $A \in \overline{A}$, определенный на B / F, является квазинормой. Пространство $(B / F, \|.\|)$ будет метрическим, если расстояние ρ ввести следующим образом: $\rho(\overline{A_1}, \overline{A_2}) = \| \overline{A_1} + \overline{A_2} \|$. Метрическое пространство $(B / F, \rho)$ является полным [1]. Топологические группы B и B / F будем называть *ассоциированными с* σ*-алгеброй* B *по мере* m.

Известно далее, что если $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ (теоретико-множественный предел), где $A_n \in B (n = 1, 2, ...)$, то $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$ (так называемое усиленное свойство непрерывности). Ниже строится отделимая инвариантная относительно сдвигов топология $\hat{\tau}$ на B с базисом симметричных окрестностей нуля, определяющая универсально слабую сходимость так, что универсально слабо сходящаяся последовательность множеств (теоретико-множественная сходимость) в B сходится в топологии τ_m для любой неотрицательной конечной меры m на B.

Пусть Ω – направленное множество и $A_\alpha (\alpha \in \Omega)$ – семейство подмножеств X. *Верхним пределом* $\overline{\lim}_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ *семейства* (A_α) назовем множество

$$A^* = \{x \in X : x \in A_\alpha (\forall \alpha \in \Omega_x)\},$$

где Ω_x – кофинальное подмножество Ω. *Нижним пределом* $\underline{\lim}_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ *семейства* (A_α) назовем множество

$$A_* = \{x \in X : x \in A_\alpha (\forall \alpha \geq \alpha_x)\}.$$

Ясно, что $A_* \subset A^*$, и при наличии счетного кофинального множества Ω приходим к обычному определению нижнего и верхнего пределов последовательностей множеств [5]. Привлекая теоретико-множественные операции, получим равенства

$$A^* = \bigcap_{\alpha'\in\Omega} \bigcup_{\alpha\geq\alpha'} A_\alpha, \qquad A_* = \bigcup_{\alpha'\in\Omega} \bigcap_{\alpha\geq\alpha'} A_\alpha.$$

Назовем семейство (A_α) *сходящимся*, если $A^* = A_*$ и $\lim\limits_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$, а саму сходимость семейства (A_α) *универсально слабой*. Покажем, что введенные выше понятия нетривиальны.

Пример 1. Пусть (Y, τ) – пространство Суслина [4]. То есть, в частности,

$$Y = \bigcup_{\nu\in N^*} \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

где N^* – пространство Бэра всех последовательностей $(n_1, n_2, ...)$ натуральных чисел и каждое пространство $Y_\nu = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_{n_1 n_2 \ldots n_k} (\nu \in N^*)$ является пространством Фреше в проективной топологии, непрерывно вложенным в (Y, τ). Введем частичный порядок на N^* следующим образом:

$$\nu_1 \prec \nu_2 \quad \text{если и только если} \quad Y_{\nu_1} \subset Y_{\nu_2}.$$

Направленность частичного порядка сразу следует из теоремы о замкнутом графике, поэтому

$Y = \underline{\lim}_{\nu \in N^*} Y_\nu = \overline{\lim}_{\nu \in N^*} Y_\nu$. Если теперь взять в качестве Y пространство распределений Шварца $D'(S)$ с сильной топологией, где S – открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, то Y не покрывается никакой последовательностью пространств Фреше [2] и, следовательно, $(N^*, \prec)$ не может иметь счетного кофинального подмножества.

Предложение 1. *Пусть* B – σ*-алгебра подмножеств* $A \subset X$. *Тогда универсально слабая сходимость в ассоциированной группе* B *порождается отделимой топологией ТГ на* B.

Доказательство. Обозначим через $M = M(X, B)$ линейное пространство ограниченных измеримых относительно B функций $\varphi : X \to \mathbf{R}$, а через M^* – алгебраически сопряженное пространство линейных функционалов на M. Пусть L – линейная оболочка функционалов $f_x : \varphi \mapsto \varphi(x) (x \in X)$ в M^*. Тогда $L \subset M^*$ и двойственность $< M, L >$ порождает на M отделимую слабую топологию $\sigma(M, L)$. Базис U окрестностей нуля топологии $\sigma(M, L)$ определяется следующим образом: $U \in U$ означает, что найдутся $k \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_i > 0$ и $f_i \in L (i = 1, 2, ..., k)$ такие, что

$$U = \{\varphi \in M : | f_i(\varphi) | < \varepsilon_i, i = 1, 2, ..., k\}.$$

Теперь базис V симметричных окрестностей нуля V в группе B определим соотношениями

$$V = \{A \in B : | f_i(\varphi_A) | < \varepsilon_i, i = 1, 2, ..., k\},$$

где φ_A – характеристическая функция множества $A \in B$. Обозначим через $\hat{\tau}$ отделимую инвариантную относительно сдвигов топологию на B с базисом окрестностей нуля V. Ясно, что $(B, \hat{\tau})$ – топологическая группа. Покажем, что топология $\hat{\tau}$ определяется универсально слабой сходимостью. Пусть $A = \lim_{\alpha \in \Omega} A_\alpha (A, A_\alpha \in B)$. Тогда $\varphi_A(x) = \lim_{\alpha \in \Omega} \varphi_{A_\alpha}(x)$ для каждого $x \in X$. В самом деле, если $x \in A$, то $\varphi_A(x) = 1$ и $\varphi_{A_\alpha}(x) = 1$ для $\alpha \ge \alpha_x$, если же $x \in X \setminus A$, то $\varphi_A(x) = 0$ и найдется $\alpha_0(x) \in \Omega$ такой, что для всех $\alpha \ge \alpha_0(x)$ имеем $\varphi_{A_\alpha}(x) = 0$, так как иначе существовало бы кофинальное подмножество $\Omega_x \subset \Omega$ такое, что $\varphi_{A_\alpha}(x) = 1 (\alpha \in \Omega_x)$ или $x \in A$, что невозможно. Тем самым, сеть (φ_{A_α}) сходится к φ_A в слабой топологии $\sigma(M, L)$ и, следовательно, (A_α) сходится к A в топологии $\hat{\tau}$. Так как сеть $(\varphi_\alpha)(\alpha \in \Omega)$ сходится к φ в $\sigma(M, L)$, если и только если $\varphi(x) = \lim_{\alpha \in \Omega} \varphi_\alpha(x)$ для каждого $x \in X$, то универсально слабая сходимость определяет топологию $\hat{\tau}$. Предложение доказано.

Легко видеть, что топологию $\sigma(M, L)$ можно интерпретировать как индуцированную топологией произведения $\prod_{x \in X} \mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}(x \in X)$ на пространстве M. Следующий пример показывает, что топология $\hat{\tau}$, вообще говоря, неметризуемая.

Пример 2. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ σ-кольцо R не более чем счетных подмножеств S. Это семейство можно индексировать множеством Ω мощности континуума и определить направленность в Ω, считая $\alpha \prec \beta$, если и только если $S_\alpha \subset S_\beta$. Тогда $[0,1] = \lim_{\alpha \in \Omega} S_\alpha$, и невозможно выделить счетное кофинальное подсемейство Ω с таким же пределом. В то же время сеть (S_α) универсально слабо сходится к $[0,1]$ в топологии $\hat{\tau}$ на ассоциированной группе B измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$, поэтому базис V топологии $\hat{\tau}$ также не имеет счетного кофинального подсемейства.

Топология $\hat{\tau}$ будет, например, метризуемой, если положить $X=\{x_1,x_2,...,x_k\}$, B совпадает с буленом $\beta(X)$ множества X. Тогда $M(X,B)$ – n-мерное линейное пространство, $L=M^*$ и $\sigma(M,L)$ – отделимая нормальная топология; сходимость в $(M,\sigma(M,L))$ – покоординатная, поэтому топология $\hat{\tau}$ дискретная. Геометрически группу B можно интерпретировать как вершины n-мерного параллелепипеда, построенного на координатных ортах.

Предложение 2. *Пусть B – σ-алгебра множеств и τ_m – топология на ассоциированной группе B, порожденная неотрицательной конечной мерой m. Тогда топологии $\hat{\tau}$ и τ_m на B, вообще говоря, несравнимы.*

Действительно, если в примере 2 μ – мера Лебега на $[0,1]$, то $\lim\limits_{\alpha\in\Omega}\mu(S_\alpha)=0$, в то время как $\mu([0,1])=1$.

Тем не менее универсально слабо сходящаяся последовательность множеств из $(B,\hat{\tau})$ сходится в топологии τ_m. В частности, если $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ и $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$, то ряд $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ универсально слабо сходится в $(B,\hat{\tau})$, причем $m(A)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$. Отметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\Delta A_2\Delta...$ ассоциированной группы B универсально слабо сходится, если и только если $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$ [5].

Предложение 3. *Пусть (X,B,m) – измеримое пространство с конечной мерой m. Тогда ТГ (B,τ_m) является полной полуметрической группой.*

Доказательство. Ясно, что функционал $\rho(A_1,A_2)=m(A_1\Delta A_2)$, где $A_1,A_2\in B$, является полуметрикой на B, инвариантной относительно сдвигов, и задает структуру на B, база окружений которой состоит из множеств $Q_\varepsilon=\{(A_1,A_2):\rho(A_1,A_2)<\varepsilon\}(\varepsilon>0)$. Пусть (A_n) – последовательность из B такая, что $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)<+\infty$. Для установления полноты (B,τ_m) достаточно найти $A\in B$ такое, что $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ в

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\setminus\bigcup_{i\neq j}(A_i\cap A_j).$$

Ясно, что $A\in B$ и имеют место включения $(n=1,2,...)$:

$$A\Delta(A_1\Delta A_2\Delta...\Delta A_n)=A\Delta\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\setminus\bigcup_{i\neq j}^{n}(A_i\cap A_j)\right)\subset\bigcup_{i=n+1}^{\infty}A_i;$$

поэтому

$$\rho\left(A,\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=m\left(A\Delta\left(\mathop{\Delta}_{i=1}^{n}A_i\right)\right)\leq m\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=n+1}^{\infty}m(A_i).$$

Так как ряд справа есть остаток сходящегося положительного ряда, то $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ в (B,τ_m). Предложение доказано.

Библиографический список

1. Данфорд, Н., Шварц, Дж. Линейные операторы [Текст] / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – Т. 1. – М., 1962. – 720 с.

2. Робертсон, А., Робертсон, В. Топологические векторные пространства [Текст] : [пер. с англ.] / А. Робертсон, В. Робертсон. – М. : Мир, 1967. – 257 с.

3. Смирнов, Е. И. О непрерывности полуаддитивных функционалов [Текст] / Е. И. Смирнов // Math. Notes. – 1976. – Т. 19, 4. – P. 541–548.

4. Смирнов, Е. И. Предел Суслина топологических линейных пространств и его приложения [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. н. / Е. И. Смирнов. – Л., 1979. – 104 с.

5. Халмош, П. Теория меры [Текст] : [пер. с нем.] / П. Хамош. – М. : Мир, 1953. – 292 с.

Bibliograficheskiy spisok

1. Danford, N., Shvarts, Dzh. Lineyny'ye operatory' [Tekst] / N. Danford, Dzh. Shvarts. – T. 1. – M., 1962. – 720 c.

2. Robertson, A., Robertson, V. Topologicheskiye vektorny'ye prostranstva [Tekst] : [per. s angl.] / A. Robertson, V. Robertson. – M. : Mir, 1967. – 257 s.

3. Smirnov, Ye. I. O nepreryvnosti poluadditivny'h funktsionalov [Tekst] / Ye. I. Smirnov // Math. Notes. – 1976. – T. 19, 4. – P. 541–548.

4. Smirnov, Ye. I. Predel Suslina topologicheskih lineyny'h prostranstv i yego prilozheniya [Tekst] : dis. ... kand. fiz.-mat. n. / Ye. I. Smirnov. – L., 1979. – 104 s.

5. Halmosh, P. Teoriya mery' [Tekst] : [per. s nem.] / P. Hamosh. – M. : Mir, 1953. – 292 s.