УДК 514;004

В. В. Богун

Использование информационных технологий при реализации тригонометрического анализа равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды

В статье представлено применение информационных технологий (графический калькулятор и персональный компьютер) для проведения тригонометрического анализа взаимосвязей между равнобедренными треугольниками, входящими в состав правильной четырехугольной пирамиды (поперечный, граневый и диагональный треугольники). Рассмотрены пропорциональные зависимости между линейными элементами данных равнобедренных треугольников, полученные на основе применения разработанного автором программного обеспечения для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях, а также приведено описание этого программного обеспечения.

Ключевые слова: равнобедренные треугольники правильной четырехугольной пирамиды, пропорциональные зависимости, графический калькулятор, программирование на языке Object Pascal в среде Delphi, технология интернет-программирования PHP.

V. V. Bogun

Use of Information Technologies in Implementation of the Trigonometric Analysis of Isosceles Triangles of the Correct Quadrangular Pyramid

Use of information technologies is presented in the article (the graphic calculator and a personal computer) to carry out the trigonometrical analysis of interrelations between the isosceles triangles, a part of the correct quadrangular pyramid (cross, edge and diagonal triangles). Proportional dependences between linear elements of these isosceles triangles, received on the basis of use of the software developed by the author for the graphic calculator and the personal computer at local and network levels are considered, and also the description of this software is provided.

Keywords: isosceles triangles of the correct quadrangular pyramid, proportional dependences, a graphic calculator, programming in the Object Pascal language in the environment of Delphi, technology of the Internet programming of PHP.

Введение

В предлагаемой статье проведен математический анализ равнобедренных треугольников, входящих в состав правильной четырехугольной пирамиды, и рассмотрено разработанное автором программное обеспечение для графического калькулятора [6] и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях для реализации данных исследований в наглядной и удобной информационной форме.

Представлены исследования изучаемых геометрических свойств равнобедренных треугольников [7] с точки зрения нахождения пропорциональных зависимостей между линейными элементами через интеграцию элементарной геометрии и тригонометрии с применением необходимых поисковых алгоритмов [1, 2].

Теоретический аспект

Для реализации тригонометрического анализа равнобедренных треугольников, входящих в правильную четырехугольную пирамиду, необходимо определиться с взаимосвязями между углами при основаниях данных треугольников.

Для правильной четырехугольной пирамиды *BKLMN*, изображенной на рис. 1 ниже, основными равнобедренными треугольниками являются следующие:

– *Поперечный треугольник правильной четырехугольной пирамиды* – равнобедренный треугольник, получаемый при рассечении правильной четырехугольной пирамиды фронтальной плоскостью, проходящей через ее вершину и середины противоположных сторон основания (треугольники $\Delta ABC = \Delta BRS$, углы при основаниях $\angle BAC = \angle BCA = \angle BRS = \angle BSR = \alpha$).

– *Граневый треугольник правильной четырехугольной пирамиды* – равнобедренный треугольник, совпадающий с гранью правильной четырехугольной пирамиды (треугольники $\Delta BKL = \Delta BLM$, углы при основаниях $\angle BKL = \angle BLK = \angle BLM = \angle BML = \beta$).

– *Диагональный треугольник правильной четырехугольной пирамиды* – равнобедренный треугольник, получаемый при рассечении правильной четырехугольной пирамиды фронтальной плоскостью, проходящей через ее вершину и противоположные вершины сторон основания (треугольники $\Delta BKM = \Delta BLN$, углы при основаниях $\angle BKM = \angle BMK = \angle BLN = \angle BNL = \gamma$).

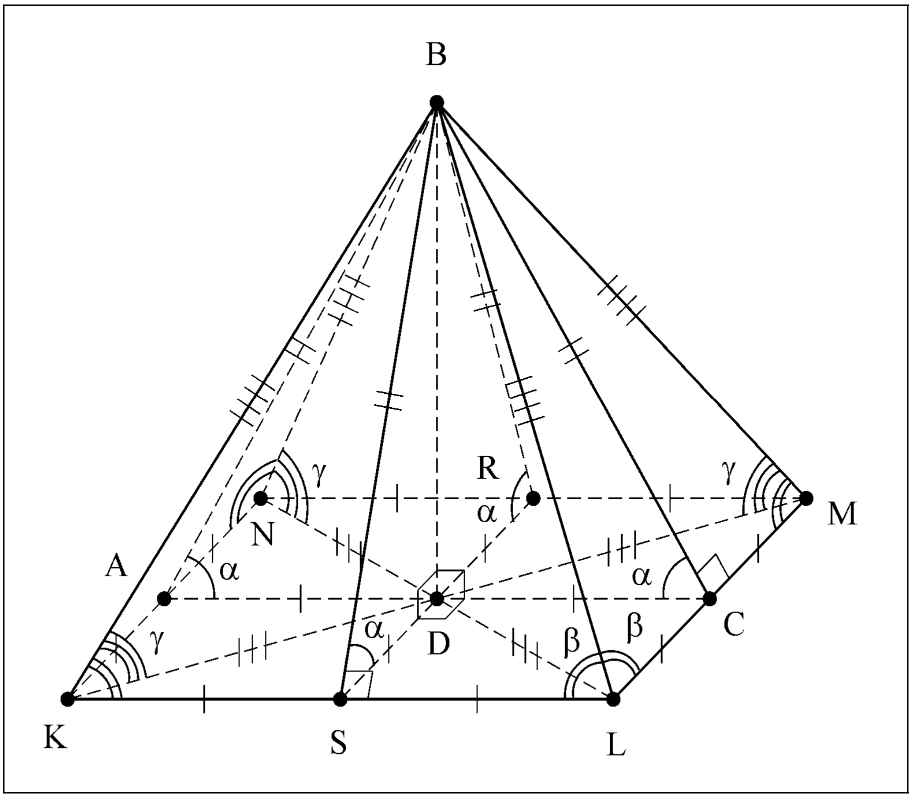

Рис. 1. Правильная четырехугольная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде между углами исследуемых равнобедренных треугольников существует следующая зависимость: произведение синусов углов при основаниях поперечного и граневого треугольников равно синусу угла при основании диагонального треугольника ($\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\gamma$).

Для поперечного треугольника ΔABC имеем соотношения:

$$\sin\alpha = \sin\angle BAC = \sin\angle BCA = \frac{BD}{AB}.$$

Для граневого треугольника ΔBKL имеем соотношения:

$$\sin\beta = \sin\angle BKL = \sin\angle BLK = \frac{BS}{BK}.$$

Для диагонального треугольника ΔBKM имеем соотношения:

$$\sin\gamma = \sin\angle BKM = \sin\angle BMK = \frac{BD}{BK}.$$

Поскольку $\Delta ABC = \Delta BRS$, то $AB = BS$.

Так как $sin\,\alpha \cdot sin\,\beta = \dfrac{BD}{AB}\cdot\dfrac{BS}{BK} = \dfrac{BD}{AB}\cdot\dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BD}{BK}$ и $sin\,\gamma = \dfrac{BD}{BK}$, то получаем искомое выражение: $sin\,\alpha \cdot sin\,\beta = sin\,\gamma$.

Между тригонометрическими функциями углов при основаниях поперечного, граневого и диагонального треугольников правильной четырехугольной пирамиды *BKLMN*, изображенной на рис. 1, существуют следующие взаимосвязи:

– Котангенс угла при основании граневого треугольника равен косинусу угла при основании поперечного треугольника:

– $ctg\beta = ctg\angle BKL = \dfrac{KS}{BS} = \dfrac{AD}{AB} = cos\,\angle BAC = cos\,\alpha$.

– Разность квадратов тангенсов углов при основаниях граневого и поперечного треугольников равна единице:

– $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\,\alpha}$, $cos\,\alpha = ctg\beta = \dfrac{1}{tg\beta}$, поэтому получим, что $1 + tg^2\alpha = tg^2\beta$, или $tg^2\beta - tg^2\alpha = 1$.

– Тангенс угла при основании поперечного треугольника равен произведению тангенса угла при основании диагонального треугольника и квадратного корня из двух:

– $tg\alpha = tg\angle BAC = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BD}{\left(DK/\sqrt{2}\right)} = \dfrac{BD}{DK}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}tg\angle BKM = \sqrt{2}tg\gamma$.

– Квадрат тангенса угла при основании граневого треугольника равен сумме удвоенного квадрата тангенса угла при основании диагонального треугольника и единицы:

– $tg^2\beta = tg^2\angle BKL = 1 + tg^2\alpha = 1 + (\sqrt{2}tg\gamma)^2 = 1 + 2tg^2\gamma$.

В табл. 1 представлены отношения между квадратами тангенсов углов при основаниях поперечного, граневого и диагонального треугольников правильной четырехугольной пирамиды.

Таблица 1

Отношения между углами при основаниях поперечного, граневого и диагонального треугольников правильной четырехугольной пирамиды

Соотношения	α	β	γ
α	1	$tg^2\alpha = tg^2\beta - 1$	$tg^2\alpha = 2tg^2\gamma$
β	$tg^2\beta = tg^2\alpha + 1$	1	$tg^2\beta = 2tg^2\gamma + 1$
γ	$tg^2\gamma = \dfrac{tg^2\alpha}{2}$	$tg^2\gamma = \dfrac{tg^2\beta - 1}{2}$	1

Рассмотрим пропорциональные зависимости между линейными элементами двух равнобедренных треугольников на плоскости при наличии условия, что углы при основаниях равнобедренных треугольников являются углами при основаниях основной тройки равнобедренных треугольников, образующих правильную четырехугольную пирамиду, то есть поперечного, граневого и диагонального треугольников.

Между линейными элементами двух равнобедренных треугольников, один из которых является поперечным треугольником, а второй – граневым треугольником одной правильной четырехугольной пирамиды, то есть выполняются равенства $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ и $tg^2\alpha_2 = tg^2\beta = tg^2\alpha + 1 = tg^2\alpha_1 + 1$, имеют место следующие пропорциональные зависимости, полученные в качестве результатов обработки в представленном в монографии [3] программном обеспечении для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях (при доказательствах используются отношения линейных элементов треугольников к основным высотам треугольников):

– Отношение основной высоты второго треугольника к боковой стороне первого треугольника равно отношению половины основания второго треугольника к половине основания первого треугольника, то есть:

$$\frac{h_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}.$$

$$\frac{h_2}{b_1}=\frac{h_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{b_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=1\cdot\sin\alpha\cdot\frac{h_2}{h_1}=\sin\alpha\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{a_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{tg\beta}\cdot tg\alpha\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{tg\alpha}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}}\cdot\frac{h_2}{h_1}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\sin\alpha\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{h_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}.$$

– Отношение основной высоты второго треугольника к разности между основной высотой первого треугольника и радиусом вписанной в него окружности равно отношению половины основания второго треугольника к радиусу вписанной в первый треугольник окружности, то есть: $\frac{h_2}{(h-r)_1}=\frac{a_2}{r_1}$.

$$\frac{h_2}{(h-r)_1}=\frac{h_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{(h-r)_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=1\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\frac{h_2}{h_1}=(1+\cos\alpha)\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

$$\frac{a_2}{r_1}=\frac{a_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{r_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{tg\beta}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\cos\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=(1+\cos\alpha)\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{h_2}{(h-r)_1}=\frac{a_2}{r_1}.$$

– Отношение основной высоты второго треугольника к радиусу описанной вокруг первого треугольника окружности равно учетверенному отношению разности между основной высотой второго треугольника и радиусом описанной вокруг него окружности к основной высоте первого треугольника и равно удвоенному отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к разности между диаметром описанной вокруг первого треугольника окружности и его основной высотой, то есть:

$$\frac{h_2}{R_1}=4\cdot\frac{(h-R)_2}{h_1}=2\cdot\frac{(D-h)_2}{(D-h)_1}.$$

$$\frac{h_2}{R_1} = \frac{h_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{R_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = 1 \cdot 2\sin^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1} = 2\sin^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1}.$$

$$4 \cdot \frac{(h-R)_2}{h_1} = 4 \cdot \frac{(h-R)_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = 4 \cdot \frac{2\sin^2\beta - 1}{2\sin^2\beta} \cdot 1 \cdot \frac{h_2}{h_1} =$$

$$= 4 \cdot \frac{tg^2\beta - 1}{1 + tg^2\beta} \cdot \frac{1 + tg^2\beta}{2tg^2\beta} \cdot \frac{h_2}{h_1} = 2 \cdot \frac{tg^2\beta - 1}{tg^2\beta} \cdot \frac{h_2}{h_1} = 2 \cdot \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1} \cdot \frac{h_2}{h_1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1} = 2\sin^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1}.$$

$$2 \cdot \frac{(D-h)_2}{(D-h)_1} = 2 \cdot \frac{(D-h)_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{(D-h)_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = 2 \cdot \frac{1}{tg^2\beta} \cdot tg^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} \cdot \frac{h_2}{h_1} = 2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1} = 2\sin^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{h_2}{R_1} = 4 \cdot \frac{(h-R)_2}{h_1} = 2 \cdot \frac{(D-h)_2}{(D-h)_1}.$$

– Отношение половины основания второго треугольника к боковой стороне первого треугольника равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к половине основания первого треугольника, то есть: $\frac{a_2}{b_1} = \frac{(D-h)_2}{a_1}$.

$$\frac{a_2}{b_1} = \frac{a_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{b_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{tg\beta} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \cdot \frac{h_2}{h_1} =$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1}.$$

$$\frac{(D-h)_2}{a_1} = \frac{(D-h)_2}{h_2} \cdot \frac{h_1}{a_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{tg^2\beta} \cdot tg\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} \cdot \frac{h_2}{h_1} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos^2\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{h_2}{h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{a_2}{b_1} = \frac{(D-h)_2}{a_1}.$$

– Отношение половины основания второго треугольника к разности между основной высотой первого треугольника и радиусом вписанной в него окружности равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к радиусу вписанной в первый треугольник окружности, то есть: $\frac{a_2}{(h-r)_1} = \frac{(D-h)_2}{r_1}$.

$$\frac{a_2}{(h-r)_1}=\frac{a_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{(h-r)_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{tg\beta}\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\frac{h_2}{h_1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\frac{h_2}{h_1}=\cos\alpha\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

$$\frac{(D-h)_2}{r_1}=\frac{(D-h)_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{r_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{tg^2\beta}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=$$

$$=\frac{1}{1+tg^2\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\cos^2\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\cos\alpha\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{a_2}{(h-r)_1}=\frac{(D-h)_2}{r_1}.$$

Между линейными элементами двух равнобедренных треугольников, один из которых является поперечным треугольником, а второй – диагональным треугольником одной правильной четырехугольной пирамиды, то есть выполняются равенства $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\gamma$ и $tg\alpha_2=tg\gamma=\frac{tg\alpha}{2}=\frac{tg\alpha_1}{2}$, имеет место следующая пропорциональная зависимость, полученная в качестве результатов обработки в представленном в монографии [3] программном обеспечении для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях (при доказательствах используются отношения линейных элементов треугольников к основным высотам треугольников):

– Отношение основной высоты второго треугольника к основной высоте первого треугольника равно половине отношения разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к разности между диаметром описанной вокруг первого треугольника окружности и его основной высотой, то есть: $\frac{h_2}{h_1}=\frac{(D-h)_2}{2\cdot(D-h)_1}$.

$$\frac{(D-h)_2}{2\cdot(D-h)_1}=\frac{(D-h)_2}{2h_2}\cdot\frac{h_1}{(D-h)_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{tg^2\alpha}{2tg^2\gamma}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{h_2}{h_1}.$$

Таким образом, $\frac{h_2}{h_1}=\frac{(D-h)_2}{2\cdot(D-h)_1}$.

Между линейными элементами двух равнобедренных треугольников, один из которых является граневым треугольником, а второй – диагональным треугольником одной правильной четырехугольной пирамиды, то есть выполняются равенства $\alpha_1=\beta$, $\alpha_2=\gamma$ и $tg^2\alpha_2=tg^2\gamma=\frac{tg^2\beta-1}{2}=\frac{tg^2\alpha_1-1}{2}$, имеет место следующая пропорциональная зависимость, полученная в качестве результатов обработки в представленном в монографии [3] программном обеспечении для графического калькулятора и персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях (при доказательствах используются отношения линейных элементов треугольников к основным высотам треугольников):

– Отношение основной высоты второго треугольника к разности между основной высотой первого треугольника и радиусом описанной вокруг первого треугольника окружности равно отношению диаметра описанной вокруг второго треугольника окружности к радиусу описанной вокруг первого треугольника окружности и равно отношению разности между диаметром описанной вокруг второго треугольника окружности и его основной высотой к разности между диаметром описанной вокруг первого треугольника окружности и его основной высотой, то есть: $\dfrac{h_2}{(h-R)_1}=\dfrac{D_2}{R_1}=\dfrac{(D-h)_2}{(D-h)_1}$.

$$\frac{h_2}{(h-R)_1}=\frac{h_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{(h-R)_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=1\cdot\frac{2\sin^2\beta}{2\sin^2\beta-1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{2\sin^2\beta}{2\sin^2\beta-1}\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

$$\frac{D_2}{R_1}=\frac{D_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{R_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{\sin^2\gamma}\cdot 2\sin^2\beta\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1+tg^2\gamma}{tg^2\gamma}\cdot 2\sin^2\beta\cdot\frac{h_2}{h_1}=$$

$$=\frac{1+tg^2\beta}{2}\cdot\frac{2}{tg^2\beta-1}\cdot 2\sin^2\beta\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1+tg^2\beta}{tg^2\beta-1}\cdot 2\sin^2\beta\cdot\frac{h_2}{h_1}=$$

$$=\frac{2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\cdot\frac{\cos^2\beta}{1-2\cos^2\beta}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{2\sin^2\beta}{1-2\cos^2\beta}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{2\sin^2\beta}{2\sin^2\beta-1}\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

$$\frac{(D-h)_2}{(D-h)_1}=\frac{(D-h)_2}{h_2}\cdot\frac{h_1}{(D-h)_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{tg^2\gamma}\cdot tg^2\beta\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{2tg^2\beta}{tg^2\beta-1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=$$

$$=\frac{2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\cdot\frac{\cos^2\beta}{2\sin^2\beta-1}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{2\sin^2\beta}{2\sin^2\beta-1}\cdot\frac{h_2}{h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{h_2}{(h-R)_1}=\frac{D_2}{R_1}=\frac{(D-h)_2}{(D-h)_1}.$$

Описание программного обеспечения

Рассмотрим разработанное автором программное обеспечение для проведения тригонометрического анализа двух равнобедренных треугольников на плоскости, входящих в состав правильной четырехугольной пирамиды, представленное на графическом калькуляторе [3, 4, 5] и персональном компьютере на локальном и сетевом уровнях в виде программ под общим названием *“PYRAM 2”*.

Для начала работы с программой на графическом калькуляторе необходимо запустить программу с наименованием *“PYRAM 2”*, в рамках которой в диалоговом окне меню (рис. 2A) выбирается наименование исходного угла равнобедренного треугольника (угол при основании поперечного, граневого или диагонального треугольника). После непосредственного ввода значения угла (рис. 2B) осуществляется выбор для каждого из двух исследуемых треугольников угла при основании (рис. 2C и 2D), то есть одного их трех треугольников, образующих пирамиду, вывод в виде матрицы *“A”* значений углов при основаниях треугольников, входящих в пирамиду, в градусах и радианах, а также тригонометрических функций для данных углов (рис. 2E).

После вывода данного информационного окна реализуется последовательный выбор совпадающих линейных элементов первого и второго равнобедренного треугольников соответственно (рис. 2F и 2G), а затем по выбору наименования операции (расчет и вывод значений отношений, целочисленных отношений или пропорциональных зависимостей между линейными элементами равнобедренных треугольников), что отражено на рис. 2H, осуществляется вывод необходимых диалоговых окон результатов вычислений в виде соответствующих матриц *“D”, “E”*и *“F”* (рис. 2I, 2J и 2K).

На следующем шаге осуществляется выбор наименования линейного элемента равнобедренных треугольников (рис. 2L), ввод значения данного элемента (рис. 2M) и вывод в виде матрицы *“G”*значений линейных элементов равнобедренных треугольников (рис. 2N). Затем реализуется выбор характерной точки равнобедренных треугольников (рис. 2O), ввод значений ее координат (рис. 2P) и последующий вывод в виде матрицы *“H”* значений координат характерных точек (рис. 6Q) и вывод в виде матрицы *“J”* значений координат совпадающих характерных точек равнобедренных треугольников (рис. 6R).

На последнем этапе работы программы осуществляется настройка параметров вывода рассматриваемых равнобедренных треугольников с точки зрения отображения вписанных и описанных окружностей (рис. 6S, 6T) с последующей визуализацией равнобедренных треугольников (рис. 6U).

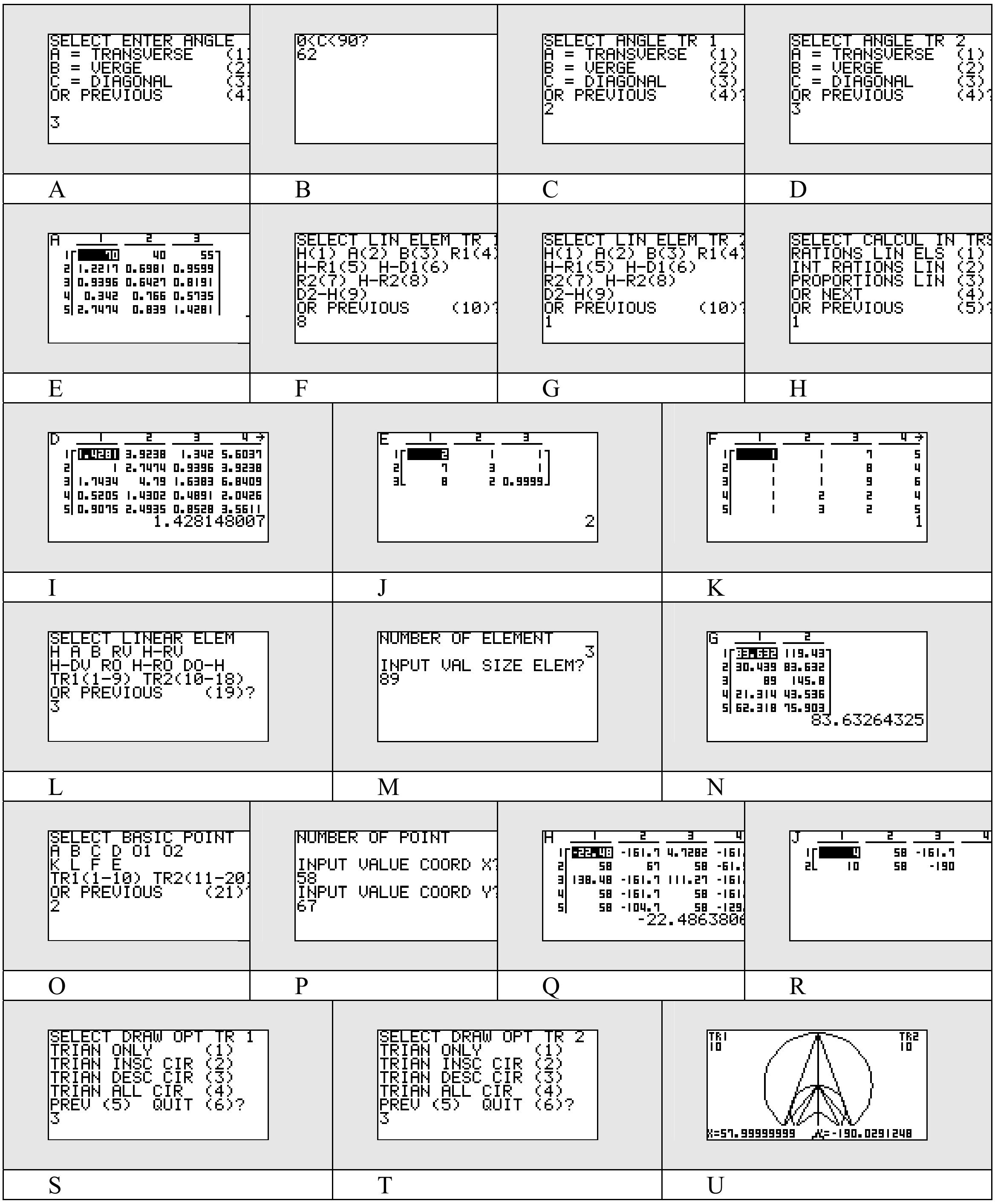

Рис. 2. Скриншоты из программы *“PYRAM 2”*

Программы для персонального компьютера на локальном и сетевом уровнях под общим названием *“PYRAM 2”* состоят из двух компонентов: формы для указания параметров значений исходных данных и формируемой на основе расчетов статической интернет-страницы для вывода и визуализации результатов вычислений.

Для ввода и выбора значений исходных данных в рамках программ выступают необходимые компоненты визуальных графических форм (рис. 3 и рис. 4 для локального и сетевого уровней соответственно), которые позволяют настроить необходимые параметры решаемой задачи.

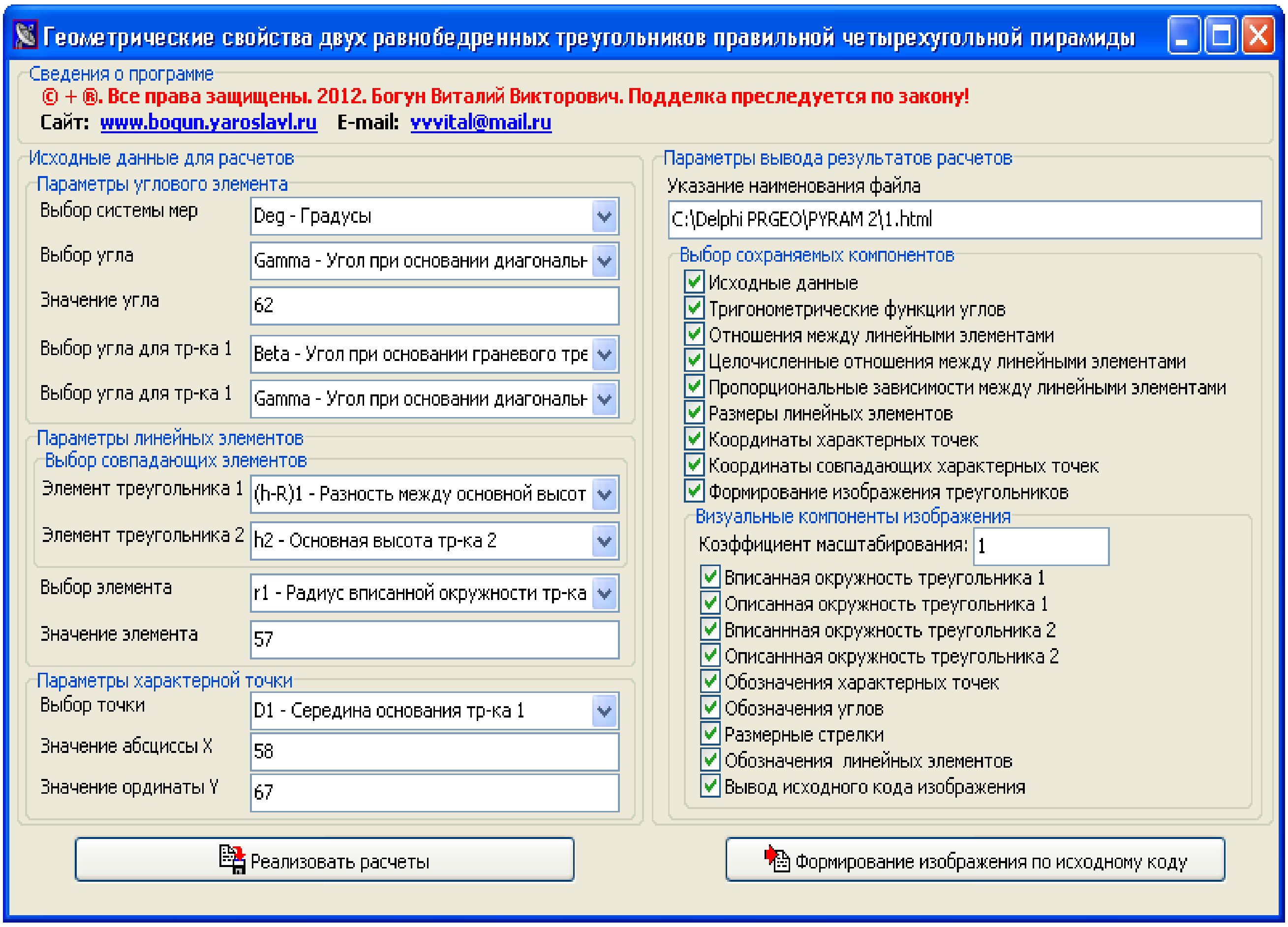

Рис. 3. Форма указания исходных данных и параметров визуализации для программы “*PYRAM 2*” (локальный уровень)

Для вывода и визуализации результатов вычислений в рамках рассматриваемых программ выступают идентичные для локального и сетевого уровней статические интернет-страницы, которые отображают следующие заранее выбранные компоненты расчетов для рассматриваемых равнобедренных треугольников:

1. Значения исходных данных для равнобедренных треугольников.
2. Значения тригонометрических функций углов.
3. Отношения между линейными элементами.
4. Целочисленные отношения между линейными элементами.
5. Пропорциональные зависимости между линейными элементами (рис. 5).
6. Значения размеров линейных элементов.
7. Значения координат характерных точек.
8. Значения координат совпадающих характерных точек (рис. 6).
9. Визуальный вывод равнобедренных треугольников с отображением визуальных компонентов (рис. 7).
10. Исходный код изображения равнобедренных треугольников для локального и сетевого уровней, который позволяет осуществлять последующую полноценную обработку графического изображения равнобедренных треугольников.

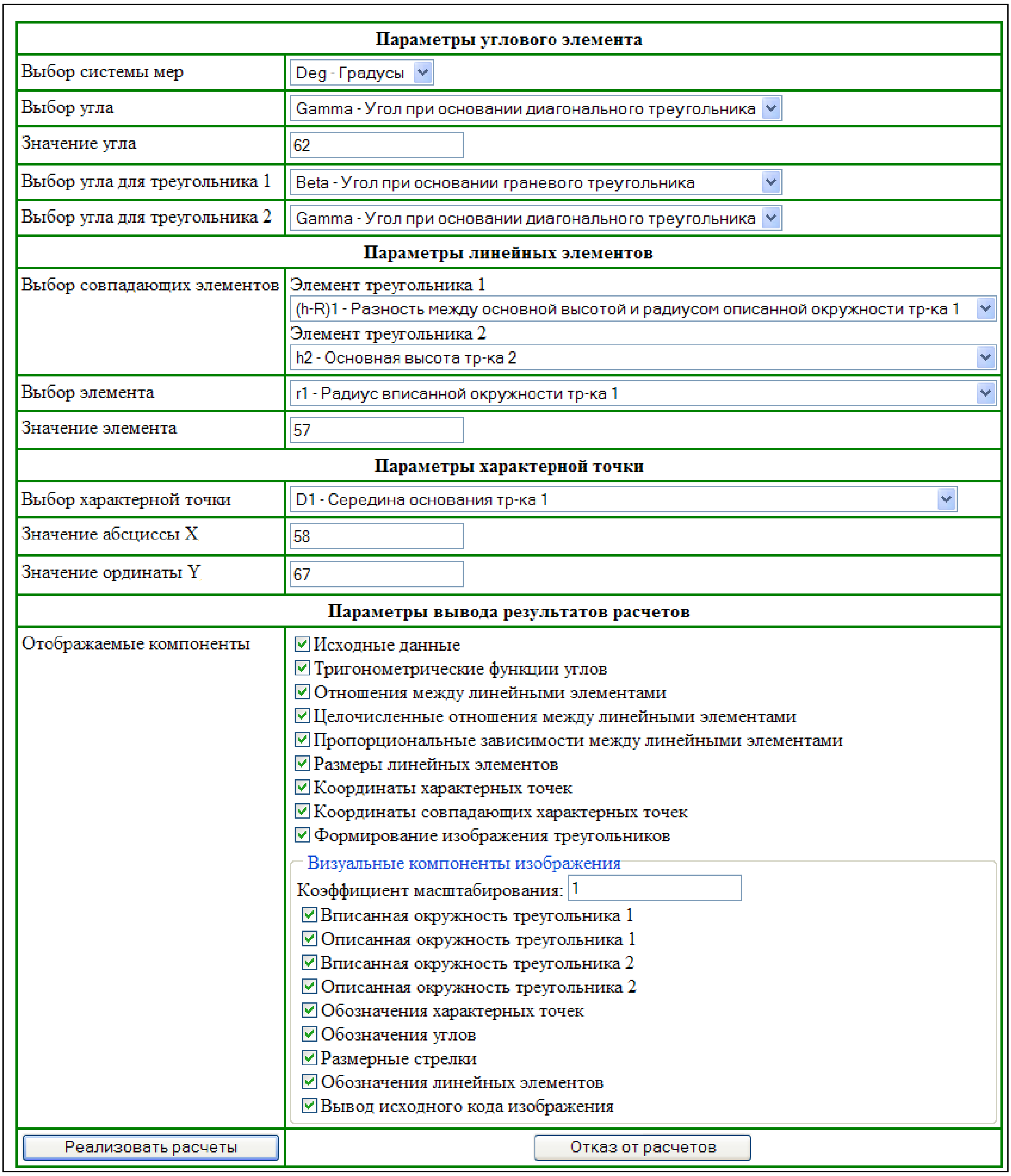

Рис. 4. Скриншот диалогового окна указания значений параметров исходных данных для программы “*PYRAM 2*” (сетевой уровень)

Пропорциональные зависимости между линейными элементами двух равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основаниях Alpha 1 [Beta (Bt)] = 70.611820870201° и Alpha 2 [Beta (Bt)] = 62°

№	Выражение	Числовые эквиваленты
1	$h_2/h_1 = (D\text{-}h)_2/(2(D\text{-}h)_1)$	0.4293 = 0.8586/2

Рис. 5. Вывод пропорциональных зависимостей и значений между линейными элементами равнобедренных треугольников

Значения координат совпадающих характерных точек двух равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основаниях Alpha 1 [Beta (Bt)] = 70.611820870201° и Alpha 2 [Beta (Bt)] = 62°

№	Треугольник 1				Треугольник 2			
	Наименование точки	Обозначение	Значение X	Значение Y	Наименование точки	Обозначение	Значение X	Значение Y
1	Середина основания треугольника	D_1	58.0000	67.0000	Середина основания треугольника	D_2	58.0000	67.0000
2	Центр описанной окружности треугольника	O_{21}	58.0000	161.0072	Вершина между боковыми сторонами треугольника	B_2	58.0000	161.0072

Рис. 6. Вывод значений координат совпадающих характерных точек равнобедренных треугольников

Визуальный вывод двух равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основаниях Alpha 1 [Beta (Bt)] = 70.611820870201° и Alpha 2 [Beta (Bt)] = 62°

Дополнительные визуальные компоненты:

1. Вписанная окружность треугольника 1.
2. Описанная окружность треугольника 1.
3. Вписанная окружность треугольника 2.
4. Описанная окружность треугольника 2.
5. Обозначения характерных точек.
6. Обозначения углов.
7. Размерные стрелки.
8. Обозначения линейных элементов.
9. Вывод исходного кода изображения.

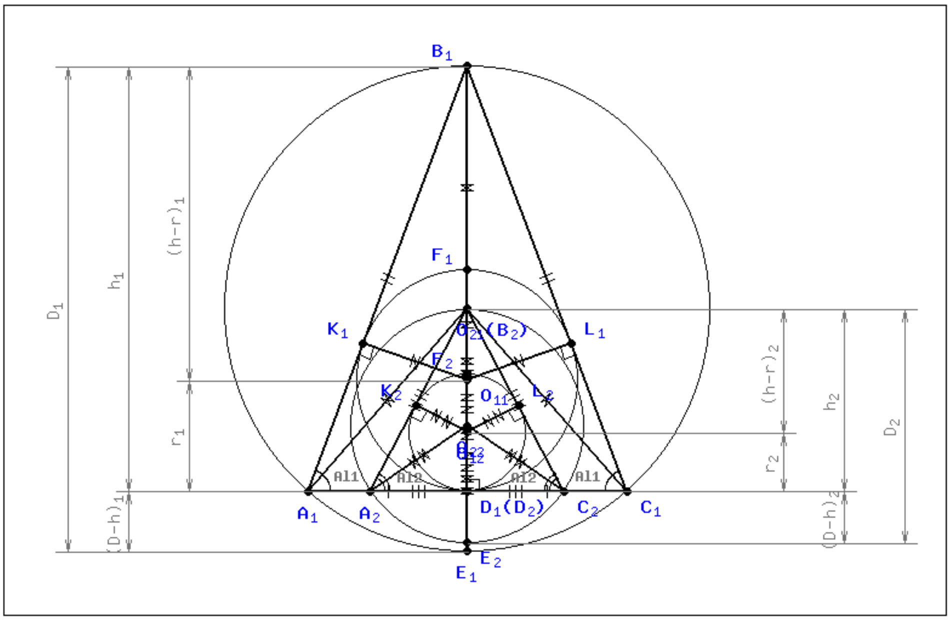

Рис. 7. Визуальный вывод равнобедренных треугольников

Библиографический список

1. Богун, В. В. Геометрические свойства равнобедренных треугольников [Текст] / В. В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2002. – № 2. – С. 119–124.

2. Богун, В. В. Геометрия древнего Египта [Текст] / В. В. Богун. – М. : Компания Спутник+, 2003. – 203 с.

3. Богун, В. В. Организация учебного процесса по математике с применением графического калькулятора [Текст] / В. В. Богун. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2012. – 380 с.

4. Богун, В. В. Применение различных средств информатизации для исследования правильных четырехугольных пирамид [Текст] / В. В. Богун // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. 2012. – № 1. – С. 106–110.

5. Богун, В. В., Смирнов, Е. И. Лабораторный практикум с графическим калькулятором [Текст] : учеб. пособие / В. В. Богун, Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во «Канцлер», 2010. – 272 с.

6. Дьяконов, В. П. Современные зарубежные микрокалькуляторы [Текст] / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Р, 2002. – 400 с.

7. Кожухов, И. Б., Прокофьев, А. А. Справочник по математике [Текст] / И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. – М. : «Лист», 1999. – 640 с.

Bibliograficheskiy spisok

1. Bogun, V. V. Geometricheskiye svoystva ravnobedrenny'h treugol'nikov [Tekst] / V. V. Bogun // Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik. – 2002. – № 2. – S. 119–124.

2. Bogun, V. V. Geometriya drevnego Yegipta [Tekst] / V. V. Bogun. – M. : Kompaniya Sputnik+, 2003. – 203 s.

3. Bogun, V. V. Organizatsiya uchebnogo protsessa po matematike s primeneniyem graficheskogo kal'kulyatora [Tekst] / V. V. Bogun. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2012. – 380 s.

4. Bogun, V. V. Primeneniye razlichny'h sredstv informatizatsii dlya issledovaniya pravil'ny'h chetyrekhugol'ny'h piramid [Tekst] / V. V. Bogun // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. 2012. – № 1. – S. 106–110.

5. Bogun, V. V., Smirnov, Ye. I. Laboratorny'y praktikum s graficheskim kal'kulyatorom [Tekst] : ucheb. posobiye / V. V. Bogun, Ye. I. Smirnov. – Yaroslavl' : Izd-vo «Kantsler», 2010. – 272 s.

6. D'yakonov, V. P. Sovremenny'ye zarubezhny'ye mikrokal'kulyatory' [Tekst] / V. P. D'yakonov. – M. : SOLON-R, 2002. – 400 s.

7. Kozhuhov, I. B., Prokof'yev, A. A. Spravochnik po matematike [Tekst] / I. B. Kozhukhov, A. A. Prokof'yev. – M. : «List», 1999. – 640 s.