УДК 517

Е. А. Зубова, Е. И. Смирнов

Цепочки математических задач учебно- и научно-исследовательского характера в составе фундирующих комплексов

Активному овладению курсом математического анализа, развитию творческой самостоятельности студентов, более глубокому проникновению в качественный анализ основных понятий, методов и теорем математического анализа могут служить приводимые ниже цепочки задач учебно- и научно-исследовательского характера, имеющие непосредственный выход на серьезное математическое исследование. Решение этих задач требует самостоятельных математических рассуждений, ознакомления и проработки научно-методической литературы, умения обрабатывать научную информацию, делать самостоятельные выводы. Каждый цикл представляет собой логическую цепочку заданий, связанную единой опорной идеей, с постепенным накоплением информации о реализации этой идеи. Завершающие задачи цикла могут стать основой курсовых и дипломных работ.

Ключевые слова: фундирующие комплексы, обучение математике, цепочки задач научно-исследовательского характера, подготовка учителя математики.

E. A. Zubova, E. I. Smirnov

Chains of Mathematical Sums of Educational and Research Character as a Part of Funding Complexes

To active understanding of the Course of the mathematical analysis, development of students' creative independence, deeper penetration into the qualitative analysis of the main concepts, methods and theorems of the mathematical analysis the following presented below chains of sums of educational and research character may serve which have a way-out to the serious mathematical research. The solution of these sums demands independent mathematical reasonings, acquaintance and study of scientific and methodical literature, an ability to work up scientific information, to draw independent conclusions. Each cycle represents a logical chain of tasks connected by a uniform basic idea, with gradual accumulation of information on realization of this idea. Finishing sums of the cycle can become a basis of a course paper or theses.

Keywords: funding complexes, training Mathematics, chains of sums of research character, a Mathematics teacher's training.

Метод последовательных приближений

1. Доказать, что последовательность, задаваемая рекуррентным соотношением $x_0 = 1$ $x_n = \frac{1}{3} x_{n-1}$, сходится.

2. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{n^k}{a^n}$, $k \in N, a > 1$;

б) $x_n = \frac{a^n}{n!}$.

3. Пусть X – n-мерное пространство, в котором расстояние определяется по формуле $\rho(x, y) = \max\limits_{i=1,2,..,n} |x_i - y_i|$, где $x = (x_1, x_2, .., x_n)$, $y = (y_1, y_2, .., y_n)$.

Пусть отображение $A : X \to Y$ задается системой линейных уравнений

$$y_i = (AX)_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_i, i = \overline{1, n}.$$

При каких условиях отображение A будет сжимающим, то есть $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$, где $a \in (0,1),\ x, y \in X$?

4. При каких значениях параметра λ оператор $F : C \to C$, задаваемый формулой $F(f)(x) = \lambda \int_a^b \sin(x-y) f(y) dy + \cos x$, будет сжимающим? Методом последовательных приближений найти решение уравнения $F(f) = f$.

5. Составить блок-схему, определить метод вычислений и программу на алгоритмическом языке для задачи 4. Обеспечить эффективную оценку погрешности и практически обеспечить заданную точность.

Литература

1. *Бобков В. В., Городецкий Л. М.* Избранные численные методы решения на ЭВМ инженерных и научных задач. – Минск: Вышейша школа, 1985.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1969.
4. *Осташков В. Н.* Диалоги о фракталах. – Тюмень: Изд-во ТюмГНГУ,2011. – 280 с.

Компактность

1. Будут ли следующие множества ограничены:

а) $\{\sin n\}_{n\in N}$; б) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n\in N}$; в) $\left\{\frac{n!}{2^n}\right\}$?

2. Будут ли семейства функций равномерно ограниченными:

а) $\{f_\alpha(x) = \sin(\alpha x), \alpha \in R, x \in R\}$; б) $\{f_\alpha(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in R, x \in [0,1]\}$;

в) $\{f_\alpha(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in [-1,1], x \in [0,1]\}$?

3. Будут ли следующие функции непрерывны, на каких множествах:

а) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; б) $f(x) = arcctg(\cos\frac{x}{2})$; в) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, x \ne 1 \\ 4, x = 1 \end{cases}$?

4. Исследовать функции на равномерную непрерывность. Результат обосновать на языке (ε, δ).

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $(0 \le x \le 1)$; б) $f(x) = e^x \cos\frac{1}{x}$, $(0 < x < 1)$;

в) $f(x) = x\sin x$, $(x \ge 0)$.

5. Пусть $F = \{f_1, f_2, .. f_n, ..\}$– некоторое семейство функций. Будет ли F равностепенно непрерывным, если:

а) F состоит из конечного числа равномерно непрерывных функций;

б) $F = \left\{x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, .., x^{\frac{1}{n}}, ..\right\}$.

6. С помощью теоремы Арцела определить, являются ли следующие множества функций предкомпактными в равномерной метрике (по max):

а) $\left\{\cos\frac{1}{\alpha}t, 0 \le t \le 2\pi\right\}_{\alpha\in R}$; б) $\{e^{\alpha t}, 0 \le t \le 1\}_{\alpha\in[0,1]}$.

Литература

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.

2. *Макаров И. П.* Дополнительные главы математического анализа. – М.: Просвещение, 1966.
3. *Бережной Е. И., Голубев Б. И., Дьячков А М.* Сходимость и асимптотическое разложение сингулярных интегралов. Монография. – М.: Изд-во МГУ, 2005. – 130 с.

Последовательность

1. Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Следует ли отсюда ее сходимость?

2. Пусть дано бесконечное число последовательностей:

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, .., x_n^{(1)}, ...$ – первая последовательность;

$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, .., x_n^{(2)}, ...$ – вторая последовательность;

……..

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, .., x_n^{(k)}, ... - k$ последовательность.

Известно, что для любого $k \in N$ последовательность $\{x_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к нулю и для любого $n \in N$ последовательность $\{x_n^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Что можно сказать о сходимости «диагональной» последовательности $\{x_i^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$?

3. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ – какой-нибудь базис пространства R^n, тогда любой элемент последовательности $(x_k)_{k\in N}$ может быть представлен в виде:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \zeta_{jk} e_j \quad (k = 1,2,...) \qquad (*)$$

Доказать: чтобы для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходилась к вектору $x = \sum_{j=1}^{n} \zeta_k e_j$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{k\to\infty} \zeta_{jk} e_j \quad (j = \overline{1,n})$.

4. Доказать: если все сходящиеся подпоследовательности некоторой ограниченной последовательности (∗) имеют один и тот же предел, то и сама последовательность сходится к этому пределу.

5. Пусть *f* – непрерывная функция на отрезке *[−π, π]* и S_n *(n=1, 2,...)* – частичные суммы ряда Фурье функции f .

Пусть далее $\lambda_{i,n} > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} = 1 \quad (n \in N), \ l\,\underset{n\to\infty}{im} \left\{\max_i \lambda_{i,n}\right\} = 0$. Доказать, что последовательность функции $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{in} S_i\right\}$ – сходится равномерно к функции f на отрезке *[−π, π]*.

Литература

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. – М.: Наука, 1969.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.
3. *Бельхеева Р. К.* Ряды Фурье в примерах и задачах. Учебное пособие. – Новосибирск, 2011. – 76 с.

Выпуклость

1. Описать все замкнутые, выпуклые множества на прямой.

2. Пусть $F\alpha$ – произвольное семейство замкнутых выпуклых множеств на прямой. Доказать: если любые два множества семейства $F\alpha$ пересекаются по непустому множеству, то все множества имеют общую точку.

3. Пусть M – замкнутое выпуклое множество на плоскости. Если M – ограниченное множество, всегда ли проекция M на одну из координатных осей является выпуклым замкнутым множеством? Провести доказательство. Те же вопросы для неограниченного множества M.

4. Пусть $F\alpha$ – произвольное семейство замкнутых ограниченных выпуклых множеств на плоскости. Используя задачу 2, показать, что если любые четыре множества из $F\alpha$ имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку.

Указание. Рассмотреть проекции на одну из координатных осей попарных пересечений множеств из $F\alpha$.

5. Если пересечение любых трех из k $(k \geq 4)$ ограниченных замкнутых выпуклых множеств на плоскости не пусто, то и пересечение всех k множеств также не пусто (теорема Хелли).

6. Доказать теорему Каратеодори: всякое выпуклое подмножество $M = co\ N$ из R^n может быть представлено как выпуклая оболочка не более чем $n+1$ точек из N.

Литература

1. *Рокафеллар Р*. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1976.
2. *Рудин У*. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.
3. *Магрил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В .М.* Выпуклый анализ и его приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.

Приближение

1. Найти точные нижние и верхние грани следующих множеств:

а) $\left\{\dfrac{n^4}{n^4+1}\right\}_{n\in N}$; б) $\left\{\dfrac{n+1}{n^3+7}\right\}_{n\in N}$; в) $\left\{((-1)^n+1)n+\dfrac{(-1)^n-1}{n^2}\right\}_{n\in N}$.

Пусть A – некоторое подмножество метрического пространства X. Через $\rho(x, y)$ будем обозначать расстояние между элементами $x \in X$ и $y \in X$. Наилучшим приближением элемента x $\in X$ элементами множества A называется число $e(x, A) = \inf\limits_{a\in A} \rho(x, A)$.

Элемент a_0, на котором достигается точная нижняя грань, называется элементом наилучшего приближения.

Геометрически наилучшее приближение элемента x есть расстояние от x до множества A, а элемент наилучшего приближения – точка $a_0 \in A$, ближайшая к X.

2. Пусть A – множество рациональных чисел из $[0, 1]$, x – иррациональное число, принадлежащее этому отрезку. Найти наилучшее приближение $e(x, A)$.

3. Пусть $A = \{a \in R^2 : 2a_1 + 3a_2 = 0\}$ – прямая на плоскости.

Найти наилучшее приближение для точки $x = (1, 2)$ элементами множества A в пространстве $X = \{x = (x_1, x_2); \rho(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}\}$. Найти элемент наилучшего приближения; будет ли он единственным?

4. Найти $e(x; A)$ и элемент наилучшего приближения, используя три способа измерения расстояний на плоскости:

а) $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

б) $\rho_2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$;

в) $\rho_3(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$,

если $x = (x_1, x_2)$, $A = \{a = (a_1, a_2) : a_1c_1 + a_2c_2 = 0\}$, здесь c_1, c_2 – произвольные действительные числа.

Литература

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965.

2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.
3. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М.: Мир, 1974. – 124 с.

Числовые ряды и вероятность

1. Докажите, что

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+...=1$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+...=\frac{1}{4}$.

2. Найти сумму ряда:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{31}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}+...$$

3. а) Классический, вероятностный и геометрический способы суммирования геометрической прогрессии.

б) При последовательном вычислении с возвратом из полного набора домино первый игрок поставил на нечетную сумму, а второй на четную. В каком соотношении находятся их шансы на победу?

4. Покажите геометрическим и вероятностным способами, что

а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}+...=\frac{1}{18}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+...+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}+...=\frac{1}{3}$.

5. Найдите вероятностным и геометрическим способами суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+3)!}$;

б) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{10}+...+\frac{3^{n-1}(3n-2)}{4\cdot 7...(3n+1)}+...$

Литература

1. *Афанасьев В. В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1996.
2. *Афанасьев В. В.*, *Суворова М. А.* Школьникам о вероятности в играх. – Ярославль: Академия развития, 2006. – 192 с.
3. *Смирнов Е. И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. – Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2012. – 647 с.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 2000.