УДК 530.12 : 530.145

В. Г. Кречет, С. В. Родичев

Самогравитирующая вращающаяся идеальная жидкость в ОТО

Рассматриваются стационарные конфигурации самогравитирующей вращающейся идеальной жидкости с баротропным уравнением состояния в рамках ОТО. Показано, что такая вращающаяся самогравитирующая сплошная среда способна индуцировать образование вихревого гравитационного поля, что может приводить к возникновению геометрии пространства-времени с нетривиальной топологией, например, «кротовых нор».

Ключевые слова: гравитация, вращение, вихревое гравитационное поле, «кротовые норы».

V. G. Krechet, S. V. Rodichev

Self-Gravitating Rotating Ideal Liquid in OTO

Stationary configurations of the self-gravitating rotating ideal liquid with the barotropic equation of the statement in the framework of OTO are regarded. It is shown that such a rotating self-gravitating solid environment can induce formation of a vortex gravitational field that can lead to emergence of geometry of space-time with uncommon topology, for example “the mole holes”.

Keywords: gravitation, rotation, a vortex gravitational field, “the mole holes”.

Рассматриваются стационарные распределения самогравитирующей вращающейся жидкости в рамках эйнштейновской теории гравитации – ОТО. Отдельные случаи таких распределений были нами проанализированы ранее в работах [2], [3] и др. В данной статье мы рассмотрим более полный набор подобных возможных конфигураций.

Простейшим стационарным пространством-временем, совместимым с вращающейся самогравитирующей жидкостью, является цилиндрически-симметрическое пространство, описываемое метрикой:

$$ds^2 = Adx^2 + Bd\varphi^2 + Cdz^2 + 2Edtd\varphi - Ddt^2. \qquad (1)$$

Здесь метрические коэффициенты A, B, C, D, E являются функциями лишь одной радиальной координаты x.

Рассмотрение цилиндрически-симметричных конфигураций позволяет изучить поля изолированных тел, по форме существенно отличающихся от сферической (диски, стержни, космические струны), избегая значительных математических трудностей.

Случаи статических цилиндрически-симметричных конфигураций идеальной жидкости без вращения в наиболее полном виде были представлены в работе [4].

Геометрические свойства пространственно-подобного сечения в пространстве-времени, определяемом метрикой (1), описываются линейным 3-мерным элементом [1]:

$$dl^2 = Adx^2 + \frac{BD+E^2}{D}d\varphi^2 + Cdz^2. \qquad (2)$$

Кроме того, в пространстве-времени (1) существует стационарное вихревое гравитационное поле, определяемое через 4-мерный ротор тетрады e_a^i ; его кинематической характеристикой является угловая скорость ω^i вращения тетрады

$$\omega^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}e_{ak}e^a_{l:m;} . \qquad (3)$$

Здесь латинские буквы середины алфавита – i, k, l,… – соответствуют четырем мировым координатам, а латинские буквы начала алфавита – a, b, c,… – соответствуют локальным координатам.

Вектор ω^i определяет эффективный момент импульса гравитационного поля:

$$\mathrm{s}^{\mathrm{i}} = \frac{\omega^{\mathrm{i}}}{æ} , \qquad (4)$$

где æ – эйнштейновская гравитационная константа: $æ = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Определенный в [2], [3] угловой момент гравитационного поля с точностью до дуального сопряжения совпадает с таковым, данным В. И. Родичевым [4].

Вихревое гравитационное поле может быть как свободным (то есть существовать без материального источника), так и порожденным определенными полями с поляризованным спином, такими как спинорные поля, а также вращающейся самогравитирующей идеальной жидкостью. Об этом речь будет идти ниже.

Рассматривается совместная система уравнений Эйнштейна и самогравитирующей вращающейся идеальной жидкости в пространстве-времени с метрикой (1):

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = æ[(p + \varepsilon) u_i u_k + p g_{ik}]. \quad (5)$$

Здесь p, ε– давление и плотность энергии жидкости, а u_i – ее 4-скорость, нормированная на единицу ($u^i u_i = -1$).

Используем сопутствующую вращающейся жидкости систему отсчета, в которой 4-скорость жидкости будет иметь вид: $u^k = (0,0,0,1/\sqrt{D})$.

В этом случае 4-вектор u^i будет являться времениподобным вектором тетрады, то есть монадой [1], определяющей вращающуюся систему отсчета, а угловая скорость вращения жидкости будет представлять собой одновременно угловую скорость вращения гравитационного вихря.

В рассматриваемом пространстве-времени (1) интенсивность вращения $\omega = \sqrt{\omega^k \omega_k}$ определяется формулой:

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{E'D - D'E}{D\sqrt{C(BD + E^2)}}, \quad (6)$$

где «штрих» обозначает дифференцирование по радиальной координате *x*.

В пространственной метрике (2) коэффициент при угловой координате $R^2 = \frac{BD+E^2}{D}$ пропорционален, но не прямо, расстоянию до оси вращения (оси симметрии), так как $R = \sqrt{\frac{BD+E^2}{D}}$ определяет длину окружности с центром на оси симметрии.

При данной постановке задачи из уравнений Эйнштейна (5) для самогравитирующей вращающейся идеальной жидкости можно получить уравнение для углового метрического коэффициента $R(x)$:

$$\frac{1}{A}\left[\frac{2R''}{R} + \frac{R'}{R}\frac{D'}{D}\right] = æ(p - \varepsilon) + \frac{4\omega^2}{c^2}, \quad (7)$$

где c – скорость света.

Здесь очень важно отметить, что второе слагаемое ($\frac{4\omega^2}{c^2}$) в правой части (7), пропорциональное квадрату угловой скорости ω, всегда положительно определено.

Поэтому при выполнении неравенства:

$$\frac{4\omega^2}{c^2} + æ(p - \varepsilon) > 0 \quad (8)$$

получается, что $R'' > 0$ при $R' = 0$, а это есть необходимое условие для существования «кротовой норы». В этом случае в точке, где $R' = 0$, а $R \neq 0$, образуется горловина «кротовой норы», то есть ее самое узкое место.

Отсюда следует вывод, что вихревое гравитационное поле может способствовать образованию «кротовых нор», то есть туннелей в пространстве-времени, соединяющих удаленные области Вселенной или даже две параллельные Вселенные.

В пустом пространстве с метрикой (1), когда $p = \varepsilon = 0$, условие (8) заведомо выполняется. В этом случае имеем следующее решение вакуумных уравнений Эйнштейна: $R_{ik} = 0$; при координатном условии: $(A = C)$ – «изотермические» координаты:

$$R^2(x) = (x^2 + b^2) \cdot \exp\left(\arcsin\frac{b^2}{x^2 + b^2}\right), (-\infty < x < \infty);$$

$$A(x) = C(x) = \frac{b^3 c}{\omega_0} \frac{1}{(x^2+b^2)^2}; D(x) = \frac{b^2}{x^2+b^2} \cdot \exp\left(\arcsin\frac{b^2}{x^2+b^2}\right). \quad (9)$$

Здесь ω_0, b – константы интегрирования, а для угловой скорости ω получается формула:

$$\omega = \frac{\omega_0}{A\sqrt{D}} = \frac{{\omega_0}^2 (x^2+b^2)^{5/2}}{b^4 c \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{b^2}{x^2+b^2}\right)}. \quad (9')$$

Из (9) видно, что угловой метрический коэффициент $g_{\varphi\varphi} = R^2$ нигде в ноль не обращается и $R^2 \to \infty$ при $x \to \pm\infty$, что соответствует геометрии «кротовой норы». При этом в точке, где $R' = 0$, функция $R^2(x)$ имеет минимум $R^2_{min} = \sqrt{2}b^2 e^{\frac{\pi}{4}}$ (при $x = b\sqrt{\sqrt{2}-1}$), так что в этой точке находится «горловина» «кротовой норы» – ее самое узкое место. Радиус «горловины» $r_0 = \sqrt{R^2_{min}} = 2^{\frac{1}{4}} b e^{\frac{\pi}{8}}$.

Таким образом, в данном случае подтверждается, что вихревое гравитационное поле может образовывать «кротовые норы».

Далее мы будем рассматривать уже не пустое пространство-время с вихревым гравитационным полем, а заполненное вращающейся самогравитирующей идеальной жидкостью с уравнением состояния $p = k\varepsilon$ $(k = const)$.

Кроме того, приведем метрические коэффициенты к экспоненциальному виду:

$$A = e^{\lambda};\ R^2 = e^{\mu}; C = e^{\alpha}; D = e^{\nu}, \tag{10}$$

и будем пользоваться двумя видами координатных условий: 1) $A = C$ – так называемые «изотермические» координаты; 2) $A = R^2CD$ – гармонические координаты. Это связано с тем, что при различных уравнениях состояния $p = p(\varepsilon)$ решения уравнений Эйнштейна могут быть получены или представлены в более удобном виде.

С нашей точки зрения, более удобны для физической интерпретации решения, полученные при «изотермических» координатных условиях $(A = C)$, так как именно эти условия получаются для метрики пространства Минковского в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = dx^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 - dt^2. \tag{11}$$

В результате будем иметь два вида уравнений Эйнштейна $R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = æT_{ik}$ для самогравитирующей вращающейся идеальной жидкости в пространстве-времени с цилиндрической симметрией, описываемом метрикой (1), причем будем пользоваться экспоненциальным представлением метрических коэффициентов (10) и учитывать решение (9') для угловой скорости $\omega = \frac{\omega_0}{A\sqrt{D}}$.

1. Уравнения в изотермических координатах $(A = C)$:

$$\begin{cases} \lambda'\mu' + \lambda'\nu' + \mu'\nu' = 4æpe^{\lambda} - \omega_0^2 e^{-2\nu} \\ \mu'' + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} = æ(p-\varepsilon)e^{\lambda} + \omega_0^2 e^{-2\nu} \\ \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} = æ(3p+\varepsilon)e^{\lambda} - \omega_0^2 e^{-2\nu} \\ \lambda'' + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\lambda'\mu'}{2} = æ(p-\varepsilon)e^{\lambda} \end{cases}. \tag{12}$$

2. Уравнения в гармонических координатах:

$$\begin{cases} \mu'\nu' + \mu'\alpha' + \nu'\alpha' = 4æpe^{\mu+\nu+\alpha} - \omega_0^2 e^{\mu-\nu} \\ \mu'' = æ(p-\varepsilon)e^{\mu+\nu+\alpha} + \omega_0^2 e^{\mu-\nu} \\ \nu'' = æ(3p+\varepsilon)e^{\mu+\nu+\alpha} - \omega_0^2 e^{\mu-\nu} \\ \alpha'' = æ(p-\varepsilon)e^{\mu+\nu+\alpha} \end{cases} \tag{13}$$

Следствием уравнений Эйнштейна является уравнение движения материи, которое имеет одинаковый вид для обоих координатных условий:

$$p' + \frac{\nu'}{2}(p+\varepsilon) = 0. \tag{14}$$

Им будем пользоваться для исключения материальных характеристик p и ε из уравнений гравитационного поля (12), (13) и, как уже говорилось выше, используем уравнение состояния $p = k\varepsilon$ $(k = const)$.

1. Рассмотрим сначала случай пылевидной материи, когда $p = 0$ $(k = 0)$.

Тогда из уравнения движения (14) следует, что $\nu' = 0,$ то есть $e^{\nu} = 1$. Так что уравнения Эйнштейна (12) в изотермических координатах для вращающегося пылевого распределения примут очень простой вид:

$$1)\ \lambda'\mu' = -\omega_0^2;\ 2)\ \mu'' + \frac{\mu'^2}{2} = \omega_0^2 - æ\varepsilon e^{\lambda}$$

$$3)\ \lambda'' + \frac{\lambda'\mu'}{2} = -æ\varepsilon e^{\lambda};\ 4)\ æ\varepsilon e^{\lambda} = \omega_0^2. \quad (15)$$

Здесь уравнение первого порядка (15.1) служит для согласования граничных условий.

Общее решение системы (15) имеет следующий вид:

$$\lambda = c_1 \ln x - \frac{\omega_0^2}{4}x^2 + \ln c_2;\ e^{\mu} = c_3^2 x^2;\ e^{\nu} = 1;\ æ\varepsilon = \omega_0^2 e^{-\lambda}. \quad (16)$$

Подстановка (16) в уравнение (15.1) приводит к условию $c_1 = 0$. Поэтому получаем, что $e^{\lambda} = c_2 e^{-\frac{\omega_0^2 x^2}{4}}$, а выбором масштаба для координаты x можно сделать $c_3 = c_2 = 1$. Поэтому окончательно решение уравнения Эйнштейна, описывающее распределение вращающейся пылевидной материи, будет иметь вид:

$$e^{\nu} = 1;\ e^{\mu} = x^2;\ e^{\lambda} = e^{-\frac{\omega_0^2 x^2}{4}};\ \varepsilon = \frac{\omega_0^2}{æ} e^{\frac{\omega_0^2 x^2}{4}};\ (0 \le x < \infty)\ . \quad (17)$$

Решение (17) показывает, что в случае вращения возможна равновесная конфигурация самогравитирующей пылевидной материи, в то время как при отсутствии вращения это невозможно [3]. Кроме того, из (16) видно, что плотность материи экспоненциально возрастает по мере удаления от оси вращения.

Еще необходимо отметить, что расстояние от оси симметрии $l = \int_0^{\infty} \sqrt{g_{11}}dx = \int_0^{\infty} e^{\frac{\lambda}{2}}dx$ остается всегда конечным даже при неограниченном возрастании радиальной координаты x:

$$l = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega_0^2 x^2}{8}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega_0}. \quad (18)$$

2. Далее рассмотрим вращающуюся конфигурацию идеальной жидкости с предельным уравнением состояния ($p = \varepsilon$). При этом уравнении состояния скорость звука будет равна скорости света.

В таком случае уравнение движения примет вид: $\varepsilon' + \nu'\varepsilon = 0$, откуда имеем $\varepsilon = p = \varepsilon_0 e^{-\nu}$; ($\varepsilon_0 = const$).

В результате уравнения Эйнштейна для вращающейся жидкости с предельным уравнением состояния примут вид:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lambda'\mu' + \lambda'\nu' + \mu'\nu' = 4æ\varepsilon_0 e^{\lambda-\nu} - \omega_0^2 e^{-2\nu};\\
&2)\ \mu'' + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} = \omega_0^2 e^{-2\nu};\\
&3)\ \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} = 4æ\varepsilon_0 e^{\lambda-\nu} - \omega_0^2 e^{-2\nu}; \quad (19)\\
&4)\ \lambda'' + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\lambda'\mu'}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что самое простое решение уравнения (19.4) есть $\lambda' = 0$; тогда выбором масштаба координаты x можно получить, что $e^{\lambda} = 1$. Поэтому систему уравнений (19) можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
&1)\ \mu'\nu' = 4e^{-\nu} - \omega_0^2 e^{-2\nu};\\
&2)\ \mu'' + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{\nu'^2}{2} = \omega_0^2 e^{-2\nu}; \quad (20)\\
&3)\ \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь опять самым простым решением уравнения (20.3) является $\nu' = 0$; откуда выбором масштаба времени t можно получить, что $e^{\nu} = 1$. Отсюда имеем условие на константы ε_0 и ω_0:

$$4æ\varepsilon_0 = \omega_0^2, \quad (21)$$

и для функции $e^{\mu(x)}$ получаем уравнение:

$$\mu'' + \frac{\mu'^2}{2} = \omega_0^2. \quad (22)$$

Его решение для функции $\mu'(x)$ имеет вид:

$$\mu' = \sqrt{2}\omega_0 \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x} + Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x}}{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x} - Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x}},\ (A = const). \quad (23)$$

Чтобы точка $x = 0$ была центром симметрии для функции (23), а также метрического коэффициента при угловой координате $R^2 \equiv e^{\mu}$, необходимо, чтобы константа интегрирования A принимала значения ± 1, то есть для $\mu'(x)$ имеется два варианта:

$$1)\, A = +1, \text{тогда}\, \mu' = \sqrt{2}\omega_0 \frac{\mathrm{ch}(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x)}{\mathrm{sh}(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x)}, (-\infty < x < \infty);$$

$$2)\, A = -1, \text{тогда}\, \mu' = \sqrt{2}\omega_0 \frac{\mathrm{sh}(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x)}{\mathrm{ch}(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x)}, (-\infty < x < \infty). \quad (24)$$

В первом случае получаем:

$$e^{\mu} \equiv R^2 = a^2 \mathrm{sh}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x\right),\ (a = const, -\infty < x < \infty)\,. \quad (25)$$

Здесь $R^2 = 0$ при $x = 0$, то есть точка $x = 0$ лежит на оси симметрии, и тогда можно в качестве области определения всех функций взять область $0 \le\ x < \infty$. Тогда координата x будет являться настоящей радиальной координатой $r \equiv x$, так что пространственная метрика будет иметь вид:

$$dl^2 = dr^2 + a^2 \mathrm{sh}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x\right) d\varphi^2 + dz^2 \ \text{ и } g_{tt} = e^{\nu} = 1. \quad (26)$$

В малой окрестности оси симметрии, когда $\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0\, r \ll 1$, выбирая $a^2 = \frac{2}{\omega_0^2}$, получим метрику плоского пространства Минковского: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 - dt^2$. Однако при дальнейшем увеличении расстояния от оси метрика будет все более отличаться от метрики Минковского.

Рассмотрим второй случай, когда константа $A = -1$. Тогда $\mu' = \sqrt{2}\omega_0 \frac{\mathrm{sh}(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x)}{\mathrm{ch}(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x)}$. Отсюда получаем:

$$e^{\mu} \equiv R^2(x) = a^2 \mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x\right), (a = const, -\infty < x < \infty). \quad (27)$$

Эта функция нигде не обращается в ноль и имеет минимум при $x = 0$, где $R' = 0$. Таким образом, получилась геометрия «кротовой норы», которая в продольном разрезе имеет форму гиперболического косинуса. Ее пространственная метрика имеет вид:

$$dl^2 = dx^2 + a^2 \mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 x\right) d\varphi^2 + dz^2;\ e^{\nu} = g_{tt} = 1. \quad (28)$$

Радиус горловины получившейся «кротовой норы» $R(x = 0) = a$, где a – постоянная интегрирования и является, поэтому, произвольной величиной.

Здесь существенно то, что метрика получившейся «кротовой норы» на всем ее протяжении от входа $(x \to \infty)$ до выхода $(x \to -\infty)$ нигде не имеет особенностей, то есть получилась проходимая «кротовая нора».

Отсюда можно сделать вывод, что самогравитирующая вращающаяся идеальная жидкость может индуцировать геометрию типа (1) с вихревым гравитационным полем и образовывать «кротовые норы». Здесь важно то, что данная сплошная среда должна быть самогравитирующей, то есть создавать собственное гравитационное поле значительной величины. Это возможно только при достаточно большой массе вращающейся сплошной среды, например, для быстро вращающегося массивного астрофизического объекта, когда гравитационные силы и силы инерции уравновешиваются.

3. Далее рассмотрим вращающуюся идеальную жидкость с вакуумо-подобным уравнением состояния: $p + \varepsilon = 0$.

В этом случае из уравнения движения (14) получается, что $p = -\varepsilon = const$, то есть имеем постоянную плотность энергии ε_0 и отрицательное давление $p = -\varepsilon_0$.

Будем пользоваться гармоническим координатным условием $(\lambda = \mu + \nu + \alpha)$, то есть использовать соответствующую описанному случаю систему уравнений (13). Это обусловлено тем, что решения уравнений Эйнштейна в данном случае легче получить в гармонических координатах. Так что получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&1)\, \mu'\nu' + \alpha'\mu' + \alpha'\nu' = -4æ\varepsilon_0 e^{\mu+\nu+\alpha} - \omega_0^2 e^{\mu-\nu};\\
&2)\, \mu'' = -2æ\varepsilon_0 e^{\mu+\nu+\alpha} + \omega_0^2 e^{\mu-\nu};\\
&3)\, \nu'' = -2æ\varepsilon_0 e^{\mu+\nu+\alpha} - \omega_0^2 e^{\mu-\nu}\ ; \qquad (29)\\
&4)\, \alpha'' = -2æ\varepsilon_0 e^{\mu+\nu+\alpha}.
\end{aligned}$$

Комбинируя уравнения 2, 3, 4 системы (29), получим, что $\alpha'' = \frac{\mu''+\nu''}{2}$, откуда после интегрирования будем иметь:

$$\alpha' = \frac{\mu'+\nu'}{2} + b;\ \alpha = \frac{\mu+\nu}{2} + bx\ (b = const). \tag{30}$$

Далее, вычитая (29.2) из (29.3), найдем, что $\mu'' - \nu'' = 2\omega_0^2 e^{\mu-\nu}$, и после интегрирования получим:

$$\mu' - \nu' = -\sqrt{4\omega_0^2 e^{\mu-\nu} + A},\ (A = const, -\infty < A < \infty). \tag{31}$$

Теперь, складывая уравнения (29.2) и (29.3) и исключая α и α' с помощью (30), получим уравнение

$$\left(\frac{3}{2}(\mu+\nu) + bx\right)'' = -6æ\varepsilon_0 e^{\frac{3(\mu+\nu)}{2}+bx}, \tag{32}$$

интегрируя которое, получим еще один первый интеграл системы (29), наряду с (31):

$$\left(\frac{3}{2}(\mu+\nu) + bx\right)' = -\sqrt{c^2 - 12æ\varepsilon_0 e^{\frac{3(\mu+\nu)}{2}+bx}}. \tag{33}$$

Два интеграла (31) и (33) представляют собой замкнутую систему из двух уравнений первого порядка для определения двух метрических коэффициентов e^{μ} и e^{ν}, а затем с помощью (30) и третьего коэффициента e^{α}.

Но сначала, используя уравнение первого порядка (29.1), подставляя в него интегралы (30), (32), (33), найдем условие согласования между константами интегрирования A, b, c. Оно после указанной подстановки будет иметь вид:

$$c^2 = \mathrm{b}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{A}, (\mathrm{b}^2 + \frac{3}{4}\mathrm{A} > 0). \tag{34}$$

Последнее неравенство необходимо, чтобы константа c^2 не обращалась в ноль, в соответствии с (33). Дальнейшее решение зависит от значения константы A. Возможны три варианта:

$$1)\ \mathrm{A} = 0;\ 2)\ \mathrm{A} > 0;\ 3)\ A < 0. \tag{35}$$

В зависимости от этих вариантов будем иметь три группы решений системы гравитационных уравнений (29).

Вариант 1: Пусть $\mathrm{A} = 0$, тогда из (34) следует, что $c^2 = \mathrm{b}^2$, $c = \pm\mathrm{b}$.

Далее, решая уравнение (33), найдем:

$$e^{\frac{3(\mu+\nu)}{2}+bx} = \frac{c_1^2 c^2 e^{-cx}}{3æ\varepsilon_0 (c_1^2 e^{-cx}+1)^2}, \tag{36}$$

где c_1 – новая константа интегрирования.

Это выражение является общим для всех трех вариантов. Различия появляются лишь для решения уравнения (31). Его решение для варианта $\mathrm{A} = 0$ имеет следующий вид:

$$e^{\mu-\nu} = \frac{1}{(\omega_0 x + c^2)^2}, (c_2 = const). \tag{37}$$

Здесь выбором начала координаты x можно занулить константу c_2. При этом будем иметь два типа решений для $x > 0$ и $x < 0$, а изменением знака у констант b, c эти два типа можно сделать совершенно одинаковыми, так что достаточно рассмотреть решение $x > 0$. Тогда, положив $c_1 = 1$ (без ограничения общности), из (36) и (37) будем иметь:

$$e^{\mu} = \left(\frac{c^2}{2æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{-\frac{(b+c)x}{3}}}{(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}\,\omega_0 x};\ e^{\nu} = \left(\frac{c^2}{2æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\omega_0 x e^{-\frac{(b+c)x}{3}}}{(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}};$$

$$e^{\alpha} = \left(\frac{c^2}{2æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{-\frac{(2b-c)x}{3}}}{(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}};\ e^{\lambda} = \frac{c^2}{2æ\varepsilon_0}\frac{e^{-cx}}{(e^{-cx}+1)^2}. \tag{38}$$

При этом там, где $e^{\mu} \to 0$, имеем положение оси вращения (симметрии), а при $e^{\mu} \to \infty$ имеем пространственную бесконечность, то есть асимптотику.

Из формул (38) для метрического коэффициента $g_{\varphi\varphi} = e^{\mu}$ видно, что поскольку $|b| = |c|$, то эта функция стремится к нулю, когда $x \to \infty$, и стремится к бесконечности при $x \to 0$. Это значит, что ось симметрии находится при бесконечном значении координаты x, и при $x \to 0$ имеем пространственную бесконечность. Но поскольку функция $e^{\mu(x)}$ имеет нулевое значение на оси, то в этом варианте $(\mathrm{A} = 0)$ «кротовой норы» не получится. Кроме того, в данном случае не существует плоской или струнной асимптотики, поскольку метрический коэффициент $g_{tt} = e^{\nu}$ на пространственной бесконечности (при $x \to 0$) обращается в ноль, хотя метрические коэффициенты $g_{zz} = e^{\alpha}$ и $g_{xx} = e^{\lambda}$ имеют при $x \to 0$ конечные значения. Получается, что данная цилиндрическая конфигурация закрыта горизонтом видимости.

При этом расстояние от оси симметрии до координатной бесконечности $l = \int_{\infty}^{0} \sqrt{g_{xx}}dx$ является конечным:

$$l = \sqrt{\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}} \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{cx}{2}}}{e^{-cx}+1} dx = \sqrt{\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}} \left(-\frac{2}{c}\right) arctge^{-\frac{cx}{2}} \Big|_{\infty}^{0} = \frac{\pi}{2\sqrt{3æ\varepsilon_0}} . \tag{39}$$

Вариант 2: $A > 0$; $A = k^2$; $c^2 = b^2 + \frac{3}{4}k^2$.

Тогда из (31) для функции $e^{\mu-\nu}$ получаем решение:

$$e^{\mu-\nu} = \frac{k^2}{4\omega_0^2} \frac{1}{\text{sh}^2\left(\frac{kx}{2}\right)}; \; e^{\frac{\mu-\nu}{2}} = \frac{k}{2\omega_0 \text{sh}\left(\frac{kx}{2}\right)} . \tag{40}$$

Сопоставляя (40) и (36), получаем выражения для метрических коэффициентов $e^{\mu}, e^{\nu}, e^{\alpha}$ и $e^{\lambda} = e^{\mu+\nu+\alpha}$ (условие гармоничности):

$$e^{\mu} = \left(\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{ke^{-\frac{(b+c)x}{3}}}{2\omega_0 sh\left(\frac{kx}{2}\right)(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}}; \; e^{\nu} = \left(\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{-\frac{(b+c)x}{3}}}{(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}} \frac{2\omega_0}{k} \text{sh}\left(\frac{kx}{2}\right);$$

$$e^{\alpha} = \left(\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\frac{(2b-c)x}{3}}}{(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}}; \; e^{\lambda} = \frac{c^2}{2æ\varepsilon_0} \frac{e^{-cx}}{(e^{-cx}+1)^2}. \tag{41}$$

Решение (41) показывает, что полученная геометрия по своим свойствам совпадает с геометрией варианта 1 ($A = 0$). Разница лишь в том, что в (41) множитель $\frac{kx}{2}$ заменяется на множитель $sh\left(\frac{kx}{2}\right)$.

Вариант 3: $A < 0$; $A = -k^2$; $c^2 = b^2 - \frac{3}{4}k^2$.

Теперь уравнение (31) примет вид:

$$\mu' - \nu' = -\sqrt{4\omega_0^2 e^{\mu-\nu} - k^2}, \tag{42}$$

Его решением является следующее выражение:

$$4\omega_0^2 e^{\mu-\nu} = \frac{k^2}{cos^2\left(\frac{kx}{2}\right)} . \tag{43}$$

Сопоставляя (43) и (36), найдем все метрические коэффициенты получившейся геометрии:

$$e^{\mu} = \left(\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{ke^{-\frac{(b+c)x}{3}}}{2\omega_0 cos\left(\frac{kx}{2}\right)(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}}, \; \left(-\frac{\pi}{k} \le x \le \frac{\pi}{k}\right);$$

$$e^{\nu} = \left(\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{-\frac{(b+c)x}{3}} 2\omega_0 cos\left(\frac{kx}{2}\right)}{k(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}}; \; e^{\alpha} = \left(\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\frac{(2b-c)x}{3}}}{(e^{-cx}+1)^{\frac{2}{3}}}; \tag{44}$$

$$e^{\lambda} = \frac{c^2}{2æ\varepsilon_0} \frac{e^{-cx}}{(e^{-cx}+1)^2} ,$$

с условием на константы: $c^2 = b^2 - \frac{3}{4}k^2; k > 0$.

Из решения (44) видно, что угловой коэффициент $e^{\mu} = R^2(x)$ нигде в области изменения радиальной координаты $\left(-\frac{\pi}{k} \le x \le \frac{\pi}{k}\right)$ не обращается в ноль, а на обоих концах промежутка $\left[-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}\right]$ стремится к бесконечности, то есть при $x \to \frac{\pi}{k}$ и $x \to -\frac{\pi}{k}$ получаются пространственные бесконечности. Таким образом, получилась геометрия «кротовой норы». Вход и выход из нее находятся в точках $x = \pm\frac{\pi}{k}$. Горловина у данной «кротовой норы» находится в точке, где $(e^{\mu})' = 0$. Радиус a_0 горловины равен $\sqrt{e^{\mu}}$ в этой точке и пропорционален величине $\left(\frac{c^2}{3æ\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{k}{2\omega_0}}$.

Следует отметить, что метрические коэффициенты e^{α} и e^{λ} везде, в том числе и на обеих пространственных бесконечностях, имеют конечные и не равные нулю значения. Лишь один метрический коэффициент $g_{tt} = e^{\nu}$ на обеих пространственных бесконечностях равен нулю $\left(e^{\nu} = 0 \text{ при } x = \pm\frac{\pi}{k}\right)$, то есть оба устья получившейся «кротовой норы» закрыты горизонтом видимости.

Таким образом, мы рассмотрели астрофизические эффекты вращающейся самогравитирующей идеальной жидкости при уравнениях состояния: $p = 0$; $p = \varepsilon$; $p = -\varepsilon$. Показано, что такая вращающаяся сплошная среда индуцирует появление вихревого гравитационного поля, что может привести к образованию «кротовых нор». Причем, при вакуумо-подобном уравнении состояния $p + \varepsilon = 0$, образующаяся «кротовая нора» с обоих концов закрыта горизонтом, а в случае предельного уравнения состояния $p = \varepsilon$ геометрия получившейся «кротовой норы» нигде не имеет особенностей и является асимптотически плоской, то есть такая «кротовая нора» будет проходимой.

Библиографический список

1. Владимиров, Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации [Текст] // Ю. С. Владимиров. – М. : Энергоиздат, 1982.

2. Кречет, В. Г. Топологические и астрофизические эффекты вращения и спина в общерелятивистской теории гравитации [Текст] / В. Г. Кречет // Известия ВУЗов. Физика. – 2007. – № 10. – С. 1021–1025.

3. Кречет, В. Г., Садовников, Д. В. Геометрические и физические эффекты спин-спинового взаимодействия в общерелятивистской теории гравитации [Текст] // В. Г. Кречет, Д. В. Садовников // Gravitation and Cosmology. 2007. – Т. 13, № 4. – С. 269–272.

4. Родичев, В. И. Теория тяготения в ортогональном репере [Текст] // В. И. Родичев. – М. : Наука, 1974.

Bibliograficheskiy spisok

1. Vladimirov, Yu. S. Sistemy' otscheta v teorii gravitatsii [Tekst] // Yu. S. Vladimirov. – M. : Energoizdat, 1982.

2. Krechet, V. G. Topologicheskiye i astrofizicheskiye effekty' vrashcheniya i spina v obshcherelyativistskoy teorii gravitatsii [Tekst] / V. G. Krechet // Izvestiya VUZov. Fizika. – 2007. – № 10. – S. 1021–1025.

3. Krechet, V. G., Sadovnikov, D. V. Geometricheskiye i fizicheskiye effekty' spin-spinovogo vzaimodeystviya v obshcherelyativistskoy teorii gravitatsii [Tekst] // V. G. Krechet, D. V. Sadovnikov // Gravitation and Cosmology. 2007. – T. 13, № 4. – S. 269–272.

4. Rodichev, V. I. Teoriya tyagoteniya v ortogonal'nom repere [Tekst] // V. I. Rodichev. – M. : Nauka, 1974.