УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

О типичных уравнениях Льенара

Грубые уравнения Льенара типичны: множество таких уравнений содержит открытое и всюду плотное множество в банаховом пространстве уравнений Льенара.

Ключевые слова: уравнения Льенара, векторные поля на плоскости, грубые дифференциальные уравнения, типичные дифференциальные уравнения.

V. Sh. Roitenberg

On Generic Lienard Equations

Structurally stable Lienard equations are generic: a set of these equations contains an open and everywhere dense set in Banach space of Lienard equations.

Keywords: Lienard equations, vector fields on the plane, structurally stable differential equations, generic differential equations.

Принято считать, что дифференциальное уравнение, описывающее реальный процесс, должно быть грубым – топологическая структура фазового портрета не должна меняться при малых возмущениях уравнения [3]. Поскольку уравнения Льенара

$$\ell:\ \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

важны для теории колебаний – им посвящено много работ (см. [4]), – то представляет интерес вопрос о «типичности» грубых уравнений Льенара.

Уравнение Льенара (1), где $f, g \in C^r[-d,d]$, $r \ge 1$, определяет автономную систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = -y,\ \dot{y} = f(x)y + g(x)$ и векторное поле $-y\partial/\partial x + (f(x)y + g(x))\partial/\partial y$ на цилиндре $D := [-d,d]\times\mathbf{R}$. Мы будем отождествлять эти объекты. Множество таких уравнений Льенара обозначим $\Lambda^r(D)$. Введем в $\Lambda^r(D)$ структуру банахова пространства с нормой

$$\|\ell\|_r := \max_{k=0,1,\dots,r}\ \max_{x\in[-d,d]}\ \max\{f^{(k)}(x), g^{(k)}(x)\}\,. \tag{2}$$

Назовем уравнение $\ell \in \Lambda^r(D)$ *грубым (относительно* $\Lambda^r(D)$*)*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех уравнений $\tilde{\ell} \in \Lambda^r(D)$, для которых $\|\tilde{\ell} - \ell\|_r < \varepsilon$, существует гомеоморфизм $h: D \to D$, переводящий ориентированные траектории уравнения $\tilde{\ell}$ в ориентированные траектории уравнения ℓ.

В точках $z_- := (-d,0)$ и $z_+ := (d,0)$ векторное поле $-y\partial/\partial x + (f(x)y + g(x))\partial/\partial y$ касается $\partial D = \{-d,d\}\times\mathbf{R}$, а в остальных точках ∂D оно трансверсально ∂D. Если $\pm g(\pm d) \le 0$, то траектория, проходящая через точку $z_\pm$, состоит только из этой точки. Если $\pm g(\pm d) > 0$, то траектория, проходящая через точку $z_\pm$, содержит и дугу вида $x = X(y),\ -\eta < y < \eta$.

Обозначим $\Sigma_0^r(D)$ множество уравнений $\ell \in \Lambda^r(D)$ со следующими свойствами: 1) все особые точки и замкнутые траектории гиперболические [5] и принадлежат $(-d,d)\times\mathbf{R}$; 2) нет траектории, проходящей через обе точки z_+ и z_-; 3) нет сепаратрис, идущих из седла в седло или проходящих через точки $z_\pm$.

Теорема. 1) *Множество* $\Sigma_0^r(D)$ *открыто и всюду плотно в* $\Lambda^r(D)$.

2) *Уравнения из* $\Sigma_0^r(D)$ *являются грубыми*.

Доказательство теоремы. Пусть уравнение $l \in \Lambda^r(D) \setminus \Sigma_0^r(D)$. Покажем, что в любой окрестности уравнения l в $\Lambda^r(D)$ есть уравнение из $\Sigma_0^r(D)$. Так как в любой окрестности функции из $C^r[-d, d]$ существует аналитическая функция, то без ограничения общности можно считать, что f и g – аналитические функции. Зададим число $\varepsilon > 0$ и найдем уравнение $\tilde{l} \in \Sigma_0^r(D)$, $\left\|\tilde{l} - l\right\|_r < \varepsilon$.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство уравнений $l_{\mu,\nu} \in \Lambda^r(D)$, $l_{\mu,\nu}(x, y) = -y\partial/\partial x + ((f(x) - \mu)y + (g(x) - \nu)\partial/\partial y$. Особые точки у $l_{\mu,\nu}$ имеют вид $(x_0, 0)$, где x_0 – нули функции $g(x) - \nu$. По теореме Сарда [6] существует сколь угодно малое $\nu_0 > 0$, при котором все нули x_0 функции $g(x) - \nu_0$ простые: $g'(x_0) \neq 0$; при этом можно считать, что числа $\pm d$ нулями не являются. Тогда при достаточно малом $\mu_0 > 0$ для любого нуля x_0 функции $g(x) - \nu_0$ имеем $f(x_0) - \mu_0 \neq 0$. Будем считать, что $\mu_0 < \varepsilon$ и $\nu_0 < \varepsilon$. Тогда $\left\|l_{\mu_0,\nu_0} - l\right\|_r < \varepsilon$. Так как характеристическое уравнение в особой точке $(x_0, 0)$ имеет вид $\lambda^2 - (f(x_0) - \mu_0)\lambda + g'(x_0) = 0$, то все особые точки у l_{μ_0,ν_0} гиперболические. При достаточно малом $\delta > 0$ для всех μ таких, что $\left|\mu - \mu_0\right| < \delta$, уравнение l_{μ,ν_0} имеет те же особые точки, при этом они гиперболические и имеют тот же топологический тип, что и для l_{μ_0,ν_0}, и, кроме того, $\left\|l_{\mu,\nu_0} - l\right\|_r < \varepsilon$. Мы можем также считать, что для любой входящей (выходящей) сепаратрисы L_0 седла z_0 поля l_{μ_0,ν_0} на окружности с центром в z_0 достаточно малого радиуса для любого μ, $\left|\mu - \mu_0\right| < \delta$ существует единственная точка $s(\mu)$, непрерывно зависящая от μ, через которую проходит входящая (выходящая) сепаратриса $L(\mu)$ седла z_0 поля l_{μ,ν_0}, совпадающая при $\mu = \mu_0$ с L_0. Будем называть $L(\mu)$ продолжением по параметру μ сепаратрисы L_0.

Пусть векторное поле l_{μ_*,ν_0}, $\left|\mu_* - \mu_0\right| < \delta$ имеет сепаратрису, идущую из седла z_α в седло z_ω. Обозначим ее L_1. Согласно [1] существует единственная последовательность сепаратрис $L_1, L_2, ..., L_n$ такая, что при $i \in \{1, ..., n-1\}$ L_i идет из седла в седло, а L_{i+1} является ω-продолжением L_i с положительной стороны, и либо (А) все сепаратрисы в этой последовательности различны, а L_n не является входящей сепаратрисой седла, либо (Б) $L_n = L_1$ и $L = \overline{L}_1 \cup ... \cup \overline{L}_n$ является или (Б$_1$) предельным множеством для траекторий поля l_{μ_*,ν_0}, или (Б$_2$) граничным континуумом для ячейки из замкнутых траекторий.

Рассмотрим случай (А). Пусть сначала L_n ω-предельна к узлу или фокусу или при возрастании времени трансверсально пересекает ∂D. При $\mu > \mu_*$ для любой точки $(x, y) \in D$, $y \neq 0$, угол поворота вектора $l_{\mu_*,\nu_0}(x, y)$ к вектору $l_{\mu,\nu_0}(x, y)$ положителен. Отсюда следует, что при достаточно малых $\mu - \mu_* > 0$ выходящая сепаратриса $L_1(\mu)$ поля l_{μ,ν_0}, являющаяся продолжением по параметру μ сепаратрисы L_1 седла z_α, также ω-предельна к узлу или фокусу или трансверсально пересекает ∂D. Пусть ω-предельное множество $\omega(L_n)$ – цикл или сепаратрисный контур. Тогда через точку, принадлежащую L_n и достаточно близкую к $\omega(L_n)$, можно провести замкнутую трансверсаль Γ векторного поля l_{μ_*,ν_0}. По теореме Жордана $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент. Точка z_ω и множество $\omega(L_n)$ принадлежат разным компонентам. Если $\mu - \mu_* > 0$ и достаточно мало, то Γ –

трансверсаль и для векторного поля l_{μ,v_0}, а сепаратриса $L_1(\mu)$ также пересекает Γ. Но тогда z_ω и множество $\omega(L_1(\mu))$, если оно существует, также принадлежат разным компонентам и потому не совпадают.

В случае (Б$_1$) существует такая замкнутая трансверсаль Γ векторного поля l_{μ_*,v_0}, что пересекающие ее траектории предельны к L. При μ, достаточно близких к μ_*, кривая Γ является трансверсалью и для поля l_{μ,v_0}. В случае (Б$_2$) пусть Γ – одна из замкнутых траекторий ячейки. По теореме Жордана $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент C_1 и C_2. Континуум L принадлежит одной из них, для определенности C_1. Так как при $\mu > \mu_*$ угол поворота вектора $l_{\mu_*,v_0}(x,y)$, $y \neq 0$, к вектору $l_{\mu,v_0}(x,y)$ положителен, то при достаточно малых $\mu - \mu_* > 0$ сепаратриса $L_1(\mu)$ либо не пересекает Γ и тогда ω-предельна к замкнутой траектории, либо пересекает Γ и тогда ее возможное ω-предельное множество принадлежит компоненте C_2 и не совпадает с z_ω.

Пусть по-прежнему L_1 – сепаратриса, идущая из седла z_α в седло z_ω, а $L_1, L_2, \ldots, L_k$ – теперь такая последовательность сепаратрис, что L_{i+1} является ω-продолжением L_i с отрицательной стороны. Аналогично предыдущему доказывается, что при достаточно малых $\mu_* - \mu > 0$ сепаратриса $L_1(\mu)$ не совпадает с входящей сепаратрисой седла z_ω.

Таким образом, если имеются значения параметра μ, $|\mu - \mu_0| < \delta$, при которых существует траектория поля l_{μ,v_0}, идущая из седла z_α в седло z_ω, то они изолированы. Поскольку число пар сёдел конечно, то существует такой интервал $(\underline{\mu}, \overline{\mu}) \subset (\mu_0 - \delta,\ \mu_0 + \delta)$, что для любого μ из него векторное поле $l_{\mu,v_0}(x,y)$ не имеет сепаратрис, идущих из седла в седло.

Пусть при некотором $\mu_* \in (\underline{\mu}, \overline{\mu})$ векторное поле l_{μ_*,v_0} имеет выходящую (входящую) сепаратрису L_0 седла z_0, проходящую через одну из точек $z_\pm$. Тогда найдется интервал $(\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1) \subset (\underline{\mu}, \overline{\mu})$, где $\underline{\mu}_1 = \mu_*$ ($\overline{\mu}_1 = \mu_*$), для значений параметра μ, из которого сепаратриса $L(\mu)$ пересекается с ∂D в единственной точке, причем трансверсально. Если при некотором $\mu_* \in (\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1)$ уравнение l_{μ_*,v_0} имеет сепаратрису, проходящую через одну из точек $z_\pm$, то аналогично получаем, что найдется интервал $(\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2) \subset (\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1)$, где $\underline{\mu}_2 = \mu_*$ ($\overline{\mu}_2 = \mu_*$), для значений параметра μ, из которого у уравнения l_{μ,v_0} есть, по крайней мере, две сепаратрисы, пересекающиеся с ∂D в единственной точке, причем трансверсально. Повторяя описанную процедуру не более чем $4N$ раз, где N – число седел уравнения l, получим интервал $(\mu_-, \mu_+) \subset (\mu_0 - \delta,\ \mu_0 + \delta)$ для значений μ, из которого у уравнения l_{μ,v_0} все сепаратрисы не идут из седла в седло и не проходят через точки $z_\pm$. При необходимости уменьшив интервал (μ_-, μ_+), мы можем также добиться того, чтобы у l_{μ,v_0}, $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$, не было траектории, проходящей через обе точки $z_\pm$.

Выберем $\hat{\mu} \in (\mu_-, \mu_+)$. Рассмотрим поведение траекторий уравнения $l_{\hat{\mu},v_0}$ «на бесконечности». На множествах $[-d,d] \times (0,\infty)$ и $[-d,d] \times (-\infty,0)$ траектории задаются уравнением $dy/dx = -(f(x) - \hat{\mu}) - (g(x) - v_0)/y$. Сделав в нем замену $z = 1/y$, получим уравнение $dz/dx = (f(x) - \hat{\mu})z^2 + (g(x) - v_0)z^3$. При некотором $\varsigma > 0$ для любого $z_0 \in [-\varsigma, 0)$ ($z_0 \in (0, \varsigma]$) это уравнение имеет решение $Z(x, z_0)$, $x \in [-d, d]$, удовлетворяющее начальному условию $Z(-d, z_0) = z_0$, причем $Z(x, z_0) < 0$ ($Z(x, z_0) > 0$). График решения является незамкнутой траекторией уравнения $l_{\hat{\mu},v_0}$. Таким образом, все замкнутые траектории уравнения $l_{\hat{\mu},v_0}$ лежат в компактном множестве $\{(x,y):1/Z(x,-\varsigma)\le y\le 1/Z(x,\varsigma), x\in[-d,d]\}$.

Так как аналитическое векторное поле $l_{\hat{\mu},v_0}$ имеет только гиперболические особые точки и не имеет сепаратрис, идущих из седла в седло, то число его замкнутых траекторий конечно. Пусть L – замкнутая траектория периода τ, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ – ее уравнения. На трансверсали к L выберем координату u так, чтобы точка пересечения трансверсали с L имела координату $u=0$. Пусть $u\mapsto P(u,\mu)$ – функция последования по траекториям векторного поля l_{μ,v_0} на трансверсали. По формуле (36) из [2, с. 391] получаем

$$P'_\mu(0,\hat{\mu})=\Delta^{-1}\int_0^\tau e^{\int_s^\tau f(\varphi(t))dt}\psi^2(s)ds,$$

где $\Delta>0$. Поэтому $P'_\mu(0,\hat{\mu})>0$. Из пунктов 32.4 и 18.4 книги [2] теперь следует, что существует интервал $(\hat{\mu},\hat{\mu}+\sigma)\subset(\mu_-,\mu_+)$, для любого числа μ из которого все замкнутые траектории векторного поля l_{μ,v_0} являются гиперболическими. Если L проходит через точку z_+ или z_-, для определенности пусть через z_+, то в качестве трансверсали к L можно выбрать отрезок прямой $y=0$ с координатой $u=d-x$. Тогда при малом σ точка $u=0$ не будет неподвижной для $P(\cdot,\mu)$, то есть через точки z_+ и z_- замкнутые траектории l_{μ,v_0} не проходят. Таким образом, при $\mu\in(\hat{\mu},\hat{\mu}+\delta)$ $l_{\mu,v_0}\in\Sigma_0^r(D)$ и $\left\|l_{\mu,v_0}-l\right\|_r<\varepsilon$, что нам и требовалось.

Открытость $\Sigma_0^r(D)$ очевидна.

Доказательство грубости уравнений $l\in\Sigma_0^r(D)$ аналогично доказательству достаточных условий грубости на плоскости [2].

Замечание 1. Если уравнение $\ell\in\Lambda^r(D)$ является грубым, то из пункта 1) теоремы легко следует, что оно имеет только гиперболические особые точки, конечное число замкнутых траекторий, являющихся или аттрактором, или репеллером, и не имеет сепаратрис, идущих из седла в седло или проходящих через точки $z_\pm$. Неизвестно, будут ли замкнутые траектории гиперболическими.

Замечание 2. В работе автора [7] изучались уравнения Льенара с 1-периодическими коэффициентами $f(x)$ и $g(x)$ и соответствующие векторные поля на цилиндре $D:=\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$. Утверждение теоремы остается верным и для этого случая, если $\Lambda^r(D)$ – банахово пространство таких уравнений с нормой, заданной равенством (2) при $d=1/2$, а $\Sigma_0^r(D)$ – множество уравнений со следующими свойствами: 1) все особые точки и замкнутые траектории – гиперболические; 2) нет сепаратрис, идущих из седла в седло; 3) $\int_0^1 f(x)dx\ne 0$.

Библиографический список

1. Андронов, А. А. Качественная теория динамических систем второго порядка [Текст] / А. А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1966.
2. Андронов, А. А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости [Текст] / А. А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1967.
3. Андронов, А. А. Теория колебаний [Текст] / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981.
4. Рейссиг, Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти. – М. : Наука, 1974.
5. Палис, Ж. Геометрическая теория динамических систем : Введение [Текст] / Ж. Палис, В. ди Мелу. – М. : Мир, 1986.
6. Хирш, М. Дифференциальная топология [Текст] / М. Хирш. – Мир, 1979.
7. Ройтенберг, В. Ш. Об уравнениях Льенара на окружности [Текст] / В. Ш. Ройтенберг // Труды X международных Колмогоровских чтений : сб. статей. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2012.– С. 83–85.

Bibliograficheskiy spisok

1. Andronov, A. A. Kachestvennaya teoriya dinamicheskih sistem vtorogo poryadka [Tekst] / A. A. Andronov [i dr.]. – M. : Nauka, 1966.
2. Andronov, A. A. Teoriya bifurkatsiy dinamicheskih sistem na ploskosti [Tekst] / A. A. Andronov [i dr.]. – M. : Nauka, 1967.
3. Andronov, A. A. Teoriya kolebaniy [Tekst] / A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Haykin. – M. : Nauka, 1981.
4. Reyssig, R. Kachestvennaya teoriya nelineyny'h differentsial'ny'h uravneniy [Tekst] / R. Reyssig, G. San-sone, R. Konti. – M. : Nauka, 1974.
5. Palis, Zh. Geometricheskaya teoriya dinamicheskih sistem : Vvedeniye [Tekst] / Zh. Palis, V. di Melu. – M. : Mir, 1986.
6. Hirsh, M. Differentsial'naya topologiya [Tekst] / M. Hirsh. – Mir, 1979.
7. Roytenberg, V. Sh. Ob uravneniyah L'yenara na okruzhnosti [Tekst] / V. Sh. Roytenberg // Trudy X mezhduna-rodny'h Kolmogorovskih chteniy : sb. statey. – Yaroslavl' : Izd-vo YAGPU, 2012.– S. 83–85.