УДК 37.02

А. С. Бабенко

Формирование гибкости мышления студентов при изучении систем дифференциальных уравнений с хаотическим поведением фазовых траекторий

В статье описывается методика развития гибкости мышления студентов физико-математических специальностей по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» на занятиях по нелинейной динамике. Особое внимание уделяется изучению систем трех нелинейных дифференциальных уравнений, в результате исследования которых обнаруживается хаотическое поведение фазовых траекторий.

Ключевые слова: гибкость мышления, системы с хаотическим поведением, корреляционная размерность, существенная зависимость от начальных условий.

A. S. Babenko

Formation of Flexibility of Students' Thinking at Studying Systems of Differential Equations with Chaotic Behaviour of Phase Trajectories

This article describes development methods in flexible thinking of students specializing in the area of Physics and Mathematics in the direction «Applied Mathematics and Informatics» at the lessons of nonlinear dynamics. A special attention is given to research of systems of three nonlinear differential equations. As a result of this research the systems with chaotic behaviour are revealed.

Keywords: flexible thinking, systems with chaotic behaviour, correlated dimension, essential dependence on initial conditions.

В настоящее время мы все чаще убеждаемся в том, что будущее предсказать невозможно. В попытке описать то или иное явление у человека всегда возникают ошибки измерения, порожденные, в том числе, незнанием всех факторов и условий. Сложные системы зависимы от начальных условий, и небольшие изменения в них ведут к непредсказуемым последствиям. Результатом чувствительности к начальным условиям является то, что поведение такой системы оказывается случайным, или хаотическим.

Для восприятия студентами понятия хаоса служат занятия по нелинейной динамике, где они осознают идею о существенной зависимости решения от начальных условий, нерегулярном поведении траекторий точек. Для знакомства с хаосом эффективны задания, связанные с исследованием систем трех нелинейных дифференциальных уравнений, методику исследования которых опишем далее. Следует отметить, что предварительно проводились занятия, на которых рассматривались понятия хаоса, фрактальной размерности, описывались характеристики хаотического поведения.

Для развития гибкости мышления студентам предлагается нахождение решения задачи несколькими путями, выбор необходимых компьютерных средств.

Первый этап. Тремя различными способами проверить, что одна из систем Спротта [3] обладает хаотическим поведением:

$$\begin{cases} x' = -y + z^2, \\ y' = x + 0.5y, \\ z' = x - z \end{cases} \qquad (1)$$

Студенты коллективно выдвигают гипотезы решения данной задачи.

Второй этап. Обучающимся предлагается разделиться на три группы, за каждой из которых закрепляется по одному из предложенных способов решения данной задачи, и по необходимости задаются наводящие вопросы.

Среди наводящих вопросов для первой группы можно перечислить следующие: 1) Как доказать, что траектории неустойчивые? Что для этого нужно сделать? 2) Постройте фазовый портрет. Каким свойством обладает траектория? Каковы особенности траекторий точки с координатами $x(t), y(t), z(t)$ при $t \to \infty$?

Наводящие вопросы для второй группы: 1) Что нужно построить для определения существенной зависимости от начальных условий? 2) Достаточно ли посмотреть на фазовый портрет?

Наводящие вопросы для третьей группы: 1) Вспомнить определение размерности Минковского. 2) Для вычисления корреляционной размерности непрерывная траектория заменяется множеством точек N_i в фазовом пространстве.

Корреляционную функцию *C(r)* можно вычислить по формуле (2), описав в фазовом пространстве сферу вокруг каждой точки x_i и подсчитав число точек в каждой сфере

$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} H(r - |x_i - x_j|) \quad (2),$$

где $H(s) = 1$ при $s > 0$ и $H(s) = 0$ при $s < 0$ [1].

Корреляционную размерность можно определить:

$$d_c = \lim_{r\to 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (3)$$

Результаты работы студентов

Первый способ

Находим неподвижные точки системы (1) и исследуем поведение системы (1) в их окрестности.

Первая неподвижная точка $O(0;0;0)$ системы (1). Собственные значения матрицы коэффициентов системы (1) после линеаризации $\lambda_1 = -1; \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

В окрестности первой неподвижной точки $O(0;0;0)$ траектории неустойчивы, так как действительная часть собственных значений $\lambda_{2,3}$ – положительное число.

Вторая неподвижная точка $A(-2;4;-2)$ системы (1). Собственные значения матрицы коэффициентов системы (1) после линеаризации $\lambda_1 = 0,215; \lambda_{2,3} = 0,215 \pm 0,00002i$.

В окрестности второй неподвижной точки $A(-2;4;-2)$ траектории неустойчивы, так как действительная часть собственных значений $\lambda_{2,3}$ и собственное значение λ_1 – положительные числа.

Таким образом, траектории неустойчивы.

Построим фазовый портрет системы

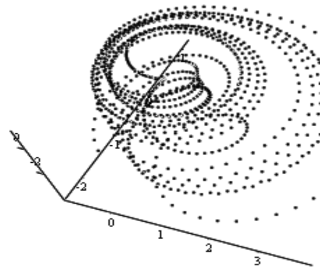
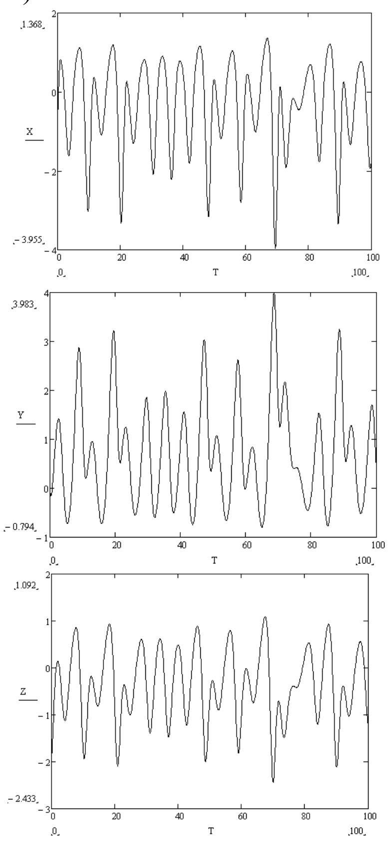


Рис. 1. Фазовая траектория системы (1) при начальных условиях (–1; 0; 2)

При построении обнаруживаются необычные свойства фазовых траекторий, которые являются неустойчивыми и ограниченными (рис.1).

Продемонстрируем ограниченность траекторий (рис. 2):



X У

Z

Рис. 2. Зависимости $x(t), y(t), z(t)$ при начальных условиях (–1; 0; 2)

Одной из характеристик хаотического поведения является следующая особенность фазовых траекторий динамической системы, которые при $t \to \infty$ не покидают заданной области и не притягиваются ни к неподвижным точкам, ни к циклам. Они притягиваются к некоторой траектории, называемой странным аттрактором, так как находятся в ограниченном пространстве, но при этом на самом аттракторе они расходятся, так как неустойчивы.

Второй способ

Проведем анализ траектории точек при различных начальных условиях. Построим график зависимости $x(t)$ при начальных условиях (–1; 0; 2) и малейших изменениях начальных условий

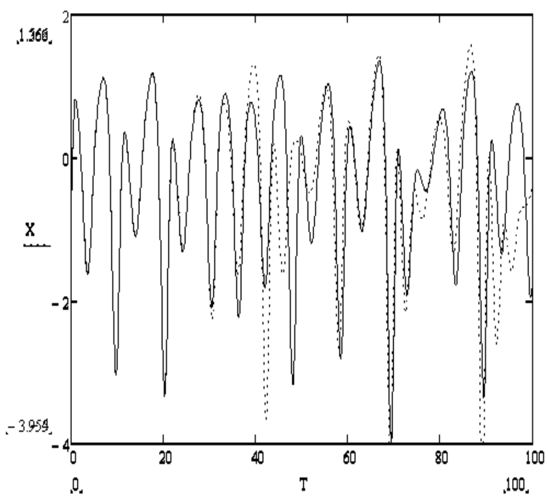


Рис. 3. Зависимость $x(t)$ при начальных условиях (–1; 0; 2) (сплошная) и при начальных условиях (–1, 01; 0; 2) (пунктирная)

При построении фазового портрета обнаруживается необычная траектория, которая при малом изменении начальных условий меняет свое поведение. Таким образом, наблюдается существенная зависимость от начальных условий, являющаяся одной из характеристик хаотического поведения (рис. 3).

Третий способ

Вычислим размерность траектории, опираясь на формулы (2) и (3).

Укажем блок-схему вычисления корреляционной размерности (рис. 4).

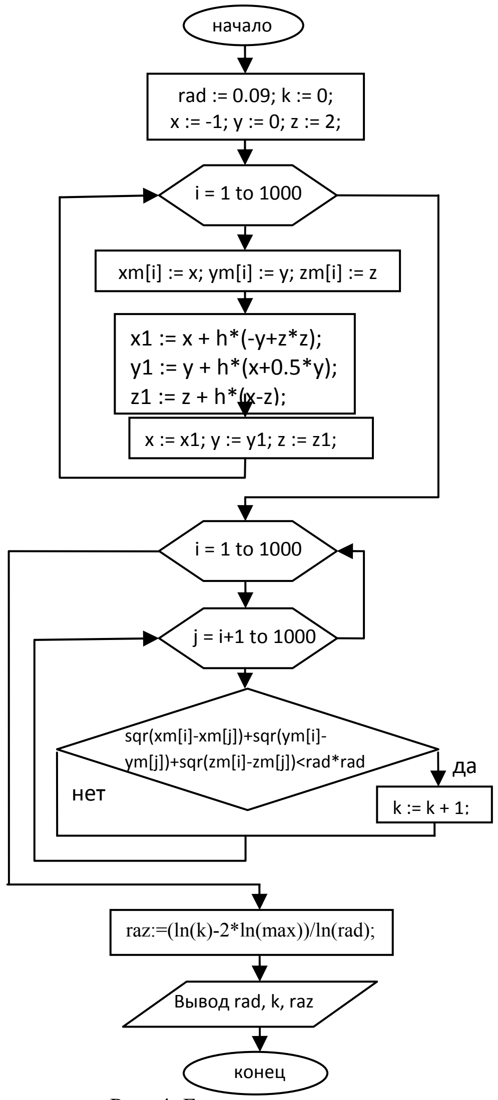


Рис. 4. Блок-схема вычисления корреляционной размерности

В результате получаем, что корреляционная размерность примерно равна 2,11, что является одной из характеристик хаотического поведения.

Третий этап. После выполнения задания от каждой группы выступает представитель у доски с решением. После выступления студентов происходит коллективное обсуждение характеристик хаотического поведения.

Данный подход изучения одной из систем Спротта нацелен на развитие гибкости мышления – одного из креативных качеств, так как на различных этапах находятся несколько решений поставленной задачи, или обнаруживается один из возможных способов разрешения проблемы, или выбираются информационные и коммуникационные технологии, необходимые для нахождения способа построения фазового портрета [2].

На первом этапе студенты предлагают различные, оригинальные идеи решения задачи.

На втором этапе в группах студенты обнаруживают наличие хаотического поведения в системе определенным способом, оценивают свои результаты, выбирают правильный путь обоснования и выбор способа построения, вычисления (программирование в какой-либо среде или использование какого-либо математического пакета).

На третьем этапе студенты обсуждают полученные результаты, оценивают свою работу и работу других, анализируют способы исследования систем с хаотическим поведением.

Библиографический список

1. Мун, Ф. Хаотические колебания: вводный курс для научных работников и инженеров [Текст]. – М. : Мир, 1990. – 312 с.

2. Секованов, В. С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии [Текст]. – Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2005. – 279 с.

3. Sprott, J. C. Some simple chaotic flows [Текст] // Physical Review. – 1994. – V. 50, № 2. – P. R647-R650.

Bibliograficheskij spisok

1. Mun, F. Haoticheskiye kolebaniya: vvodny'j kurs dlya nauchny'h rabotnikov i inzhenerov [Tekst]. – M. : Mir, 1990. – 312 s.

2. Sekovanov, V. S. Metodicheskaya sistema formirovaniya kreativnosti studenta universiteta v processe obucheniya fraktal'noj geometrii [Tekst]. – Kostroma : KGU im. N. A. Nekrasova, 2005. – 279 s.

3. Sprott, J. C. Some simple chaotic flows [Tekst] // Physical Review. – 1994. – V. 50, № 2. – P. R647-R650.