УДК 37.02

Е. С. Смирнова

Развитие исследовательских компетенций студентов при анализе свойств тентообразного отображения

В статье представлены методические приемы обучения фрактальной геометрии на примере цикла занятий, связанного с изучением тентообразного отображения. Особое внимание уделяется формам и методам обучения, направленным на развитие исследовательских компетенций студентов (направление подготовки «Прикладная математика и информатика»).

Ключевые слова: исследовательская компетенция, тентообразное отображение, фрактальное множество, фрактальная геометрия, множество Кантора, итерация, многоэтапное математико-информационное задание.

E. S. Smirnova

The Students' Development of Research Competences Analyzing the Properties of the Tent Map

This article presents a teaching method in fractal geometry on the example of lessons, which are related to studying tent map. A special attention is given to forms and methods aimed at students' development of research competences (development area is «The applied mathematics and informatics»).

Keywords: reseach competences, tent map, fractal set, fractal geometry, Cantor's set, iteration, multistep mathematical and informational task.

Знакомство студентов с понятием тентообразного отображения, или тентообразной функцией, происходит в рамках занятий по фрактальной геометрии.

Понятия «фрактал» и «фрактальная геометрия» возникли в конце 70-х годов прошлого столетия, а с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков, программистов и компьютерных художников. Фрактальная геометрия находит свое применение в самых разных сферах человеческой жизни: компьютерная графика, мультипликация, медицина, метеорология, физика и пр.

Изучение фрактальных множеств на физико-математических факультетах дает прекрасные возможности для развития профессиональных компетенций студентов, в частности исследовательских. Определяя исследовательскую компетенцию, мы будем придерживаться точки зрения А.В. Хуторского, считая, что это знания как результат познавательной деятельности человека в определённой области науки, методы, методики исследования, которыми он должен овладеть, чтобы осуществлять исследовательскую деятельность, а также мотивацию и позицию исследователя, его ценностные ориентации [2].

Познакомиться с основами фрактальной геометрии студенты могут, изучив курс дисциплин по выбору, таких как «Метод итераций», «Фракталы и хаос», разработанных в КГУ им. Н.А. Некрасова. Дисциплина по выбору «Метод итераций» является подготовительной базой для изучения фрактальной геометрии. Сам метод итераций рассматривается здесь как универсальный метод решения разнообразного класса задач. Обучаемые получают первые представления об итерационных отображениях, заданных на действительной и комплексной плоскостях. Дальнейшее знакомство с идеями фрактальной геометрии происходит при изучении дисциплины по выбору: «Фракталы и хаос», «НИТ в образовании».

В данной статье мы опишем методику проведения цикла занятий, связанного с изучением тентообразного отображения, и раскроем приемы и методы обучения, направленные на развитие исследовательских компетенций студентов.

Под тентобразным отображением мы понимаем функцию, вида

$$f(x)=\begin{cases}3x,\ x\le\dfrac{1}{2}\\[2ex] 3-3x,\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Такое название функция получила в связи с тем, что ее график на отрезке [0;1] напоминает тент (см. рис. 1).

Знакомство обучаемых с тентообразным отображением и его особенностями происходит в процессе выполнения многоэтапного математико-информационного задания.

Следуя [1], опишем многоэтапные математико-информационные задания как специально составленную последовательность задач, упражнений, проблем и дидактических ситуаций, которые соединяют друг с другом:

а) различные виды творческой математической деятельности;

б) создание изображений фрактальных множеств с помощью компьютерных программ;

в) проведение компьютерных экспериментов;

г) поиск информации в Интернете;

д) решение нестандартных задач по математике, прогнозирование результатов математической деятельности и др.

После знакомства студентов с понятием тентообразного отображения им предлагается выполнить многоэтапное математико-информационное задание по следующей схеме:

1) исследовать данную функцию $f(x)$ и построить ее график;

2) проследить за видимыми изменениями при построении графиков функций $f(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x)$;

3) выявить связь между функцией $f(x)$ и множеством Кантора.

Общая схема исследования функции студентам известна из курса математического анализа, поэтому первый этап задания не вызывает у них трудностей. Исследование функции заканчивается построением графика (рис. 1).

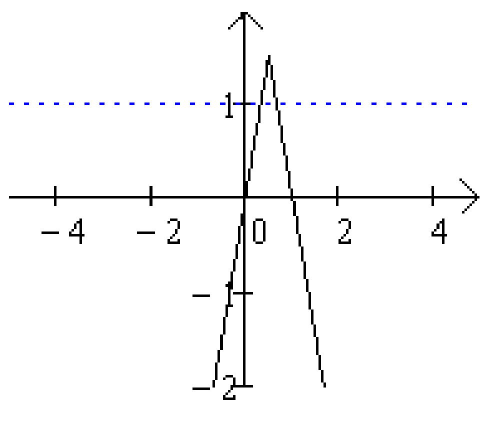

Рис. 1

На втором этапе студенты сталкиваются с трудностью получения аналитической формы записи второй итерации функции. Этот этап связан с такими методами исследования, как выдвижение гипотез и их проверка, анализ информации, обобщение и конкретизация. В результате обучаемые должны получить следующую зависимость:

$$f^{(2)}(x)=\begin{cases} 9x,\ 0\le x\le \dfrac{1}{6} \\ 3-9x,\ \dfrac{1}{6}<x\le \dfrac{1}{2} \\ -6+9x,\ \dfrac{1}{2}<x\le \dfrac{5}{6} \\ 9-9x,\ \dfrac{5}{6}<x\le 1 \end{cases}$$

После этого становится возможным построение графика функции (рис. 2).

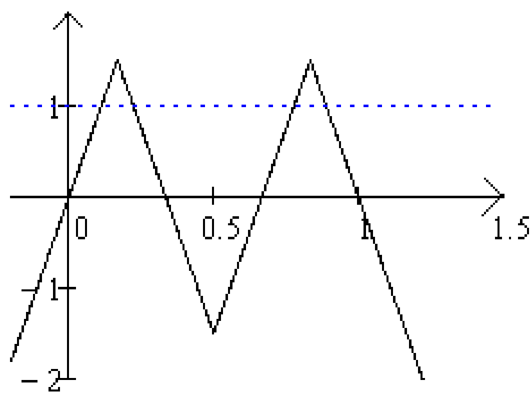

Рис. 2

Далее студенты сталкиваются с проблемой построения графика функции $f^{(3)}(x)$. Очевидно, что процесс получения аналитической формулы очень долгий и трудоемкий, поэтому появляется идея попробовать построить график функции, воспользовавшись средствами ИКТ. В среде MathCAD построение графика функции $f^{(3)}(x)$ не вызывает затруднений (рис. 3).

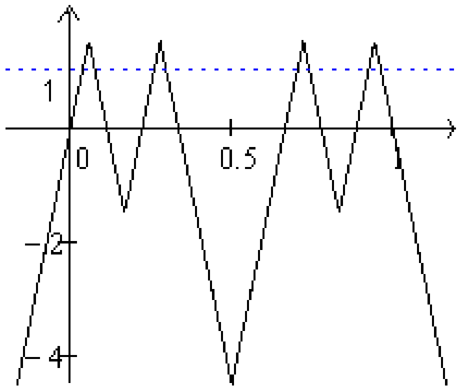

Рис. 3

Построив все три графика с помощью компьютерных средств, студенты наглядно отмечают заметные изменения. Среди мнений, которые они высказывали, можно отметить следующие: «линии все больше становятся изрезанными», «с каждой последующей итерацией увеличивается количество точек минимума и максимума функции», «кривая приближается к виду фрактальной кривой».

Последнее замечание подводит учащихся к третьему этапу задания и исследованию связи тентообразного отображения и классического фрактального множества Кантора. После проведения этапа коллективного выдвижения гипотез о связи множеств появляется утверждение: «Множество Кантора совпадает с множеством начальных точек, орбиты которых при итерировании тентообразной функции ограничены». Студентам предлагается объединиться в микрогруппы и доказать это утверждение.

Представим доказательство. Обозначим *W* – множество начальных точек, орбиты которых при итерировании функции $f(x)=\begin{cases}3x, x\le\dfrac{1}{2}\\ 3-3x, x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ограничены, а *K* – множество Кантора (см. также [3]).

Пусть x_0 – начальная точка, и пусть $x_n = f(x_{n-1})$ или, что равносильно, $x_n = f^{(n)}(x_0)$. Очевидно, что если при некотором $n \ge 0$ либо $x_n < 0$, либо $x_n > 1$, то орбита расходится к $-\infty$. Таким образом, $W \subset [0;1]$. Более того, в *W* не входят все точки отрезка [0;1], в которых $f^{(n)}(x) > 1$ для некоторого *n*. Для *n=1* это означает, что *W* не содержит открытый интервал $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$. Для *n=2* два интервала $(\frac{1}{9};\frac{2}{9})$ и $(\frac{7}{9};\frac{8}{9})$ не принадлежат W. Продолжая рассуждения, мы убеждаемся, что из *W* выбрасываются те же самые открытые интервалы, что и при построении классического канторова множества K. Таким образом, $W \subset K$.

Теперь докажем обратное включение. Пусть $x \in K$. Для этого положим, что $x \in K$ имеет представление, $x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \ldots$, где $x_i = 0$ или 2. Если $x_1 = 0$, то

$$f(x) = 3x = 3\cdot\left(\frac{x_2}{3^2}+\frac{x_3}{3^3}+\ldots\right) = \frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{3^2}+\frac{x_4}{3^3}+\ldots \in K$$

Если $x_1 = 2$, то

$$f(x)=3-3x=3\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots\right)-3\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{x_2}{3^2}+\frac{x_3}{3^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{(2-x_2)}{3}+\frac{(2-x_3)}{3^2}+\frac{(2-x_4)}{3^3}+\ldots$$

Так как каждый числитель в последнем выражении принимает значение 0 или 2, то и в этом случае $f(x) \in K$. И мы имеем включение $K \subseteq W$. В итоге заключаем, что $K = W$. Что и требовалось доказать.

В целом рассматриваемые на спецкурсах по фрактальной геометрии многоэтапные математико-информационные задания направлены на развитие таких составляющих исследовательской компетенции, как умение выдвигать гипотезы, создавать алгоритмы, делать выводы, сравнивать и анализировать информацию, аргументировать и доказывать свою точку зрения. В ходе выполнения таких заданий закрепляются навыки работы с языками программирования, прикладными математическими пакетами, формируются умения применять математический аппарат для решения прикладных задач, развиваются волевые качества личности. Обучение фрактальной геометрии открывает большие возможности как для развития исследовательских компетенций студентов, так и для становления профессиональной компетентности будущих бакалавров по направлению «Прикладная математика и информатика».

Библиографический список

1. Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств [Текст] : учеб. пособие. – Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2005. – С. 164.

2. Компетенции в образовании: опыт проектирования [Текст] : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Хуторского. – М. : Научно-внедренческое предприятие «ИНЭК», 2007. – С. 327.

3. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах [Текст]. – М. : Постмаркет, 2000. – С. 352.

Bibliograficheskij spisok

1. Sekovanov, V. S. Elementy' teorii fraktal'ny'h mnozhestv [Tekst] : ucheb. posobiye. – Kostroma: KGU im. N. A. Nekrasova, 2005. – s. 164.

2. Kompetencii v obrazovanii: opy't proyektirovaniya [Tekst] : sb. nauch. tr. / pod red. A. V. Hutorskogo. – M. : Nauchno-vnedrencheskoye predpriyatiye «INEK», 2007. – S. 327.

3. Kronover, R. M. Fraktaly' i haos v dinamicheskih sistemah [Tekst]. – M. : Postmarket, 2000. – S. 352.