УДК 512.7

С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, О. А. Войлокова

Инварианты стабильных 2-расслоений на комплексном проективном пространстве и адаптация вычислительной технологии Барта

В данной статье мы вычисляем инварианты некоторых стабильных 2-расслоений на P^3 и адаптируем известную вычислительную технологию Барта поиска соответствия расслоений спектрам на случай обобщенных нуль-корреляционных расслоений.

Ключевые слова: векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна, спектр расслоения.

S. A. Tikhomirov, A. P. Lyapin, O. A. Voylokova

Invariants of Stable 2-Bundles on Complex Projective Space and Adaptation of Bart's Computing Technology

In this article we calculate invariants of some stable 2-bundles on P^3 and adapt Bart's known computing technology of search of compliance of bundles to spectra on a case of generalized null correlation bundles.

Keywords: a vector bundle, a stable bundle, Chern's classes, spectrum of bundle.

Хорошо известно, что непостоянная функция, голоморфная на комплексной плоскости, неограничена. Другими словами, в некоторых случаях по локальным свойствам функций (например, голоморфности) можно судить о ее глобальных свойствах. Взаимосвязь локальных и глобальных свойств позволяет исследовать явление в целом, начиная с его локальных, обычно проще контролируемых свойств.

Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на теории пучков. Пучки, разновидности пучков – расслоения и их инварианты – составляют в наше время основу геометрической науки. Свойства пучков автоматизируют свойства тензорных полей на многообразиях. Пучкам отвечают коммутативные группы, называемые группами когомологий со значениями в пучке, и специальные элементы групп когомологий со значениями в постоянном пучке, называемые классами Черна. Группы когомологий и классы Черна определяют важнейшие фундаментальные свойства пучков. Эти понятия являются основным языком всех разделов современной геометрии.

Настоящая работа посвящена вычислению важных инвариантов – размерностей некоторых групп когомологий для стабильных расслоений ε_2 ранга 2 с нулевым первым классом Черна и вторым классом от 1 до 8 включительно на трехмерном проективном пространстве. Кроме того, мы адаптируем технологию Барта поиска соответствия расслоений спектрам посредством вычисления инвариантов – групп когомологий на случай обобщенных нуль-корреляционных расслоений. Для решения поставленных задач активно задействуется спектральный анализ расслоений (пучков, предпучков), высокая эффективность работы которого в различных аспектах была неоднократно показана ранее (см., например, [6] и [1]). Все конструкции рассматриваются над полем комплексных чисел C.

Пусть ε_2 – стабильное векторное расслоение ранга 2 на P^3 с $c_1=0$ и заданным c_2 над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики. Тогда расслоению ε_2 можно сопоставить его спектр.

Барт и Эленцвайг в статье [3] под спектром ε_2 в характеристике 0 понимали определенную последовательность чисел в количестве c_2 штук. Пусть $\chi=\{k_1, k_2,\ldots,k_{C2}\}$, $k_i\in Z$ – спектр ε_2. Тогда χ и ε_2 удовлетворяют:

(S1) симметричность $\{-k_i\}=\{k_i\}$.

(S2) связность: для любых двух чисел в χ, каждое число, лежащее между ними, также лежит в χ.

(S3) если число l_0 такое, что $1 \le l_0 \le \max\{k_i\}$, появляется только один раз в χ, то каждое число l такое, что $l_0 \le l \le \max\{k_i\}$, появляется только один раз в χ.

Определение спектра, не зависящее от характеристики, а также свойства спектра (S1)-(S3), указанные выше, были даны и доказаны Хартсхорном в статье [7].

Эйлерова характеристика $\chi(\varepsilon_2)$ названных выше расслоений равна *2-2n*, где $n=c_2(\varepsilon_2)$ – второй класс Черна расслоения (см, например, [7]). С другой стороны, по двойственности Серра (см., например, [2]) с учетом симплектичности ε_2, то есть наличия изоморфизма $\varepsilon_2 \approx \varepsilon^*_2$ и равенств $h^i(\varepsilon_2)=h^{3-i}(\varepsilon_2(-4))$, $0 \le i \le 3$, получаем:

$h^2(\varepsilon_2) = h^1(\varepsilon_2(-4))$, $h^3(\varepsilon_2) = h^0(\varepsilon_2(-4))$. (*)

В силу (*) имеем $2\text{-}2n= \chi(\varepsilon_2)= h^0(\varepsilon_2) - h^1(\varepsilon_2) + h^2(\varepsilon_2) - h^3(\varepsilon_2)=h^0(\varepsilon_2) - h^1(\varepsilon_2) + h^1(\varepsilon_2(-4)) - h^0(\varepsilon_2(-4)) =0 - h^1(\varepsilon_2) + h^1(\varepsilon_2(-4)) - 0= - h^1(\varepsilon_2) + h^1(\varepsilon_2(-4))$. Здесь первое и четвертое слагаемые, очевидно, зануляются в силу стабильности ε_2.

Теперь, пользуясь последней формулой и данными табл. 1 из статьи Барта [4], находим интересующие нас инварианты:

1. n=1; спектр 0; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 1=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=0$.
2. n=2; спектр 00; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 2=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=2$.
3. n=3; спектр 000; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 3=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=4$.
4. n=3; спектр -101; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 3=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=4$.
5. n=4; спектр 0000; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 4=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=6$.
6. n=4; спектр -1001; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 4=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=6$.
7. n=5; спектр 00000; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 5=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=8$.
8. n=5; спектр -10001; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 5=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=8$.
9. n=5; спектр -1-1011; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 5=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=8$.
10. n=5; спектр -2-1012; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 5=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=8$.
11. n=6; спектр 000000; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 6=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=10$.
12. n=6; спектр -100001; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 6=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=10$.
13. n=6; спектр -1-10011; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 6=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=10$.
14. n=6; спектр -2-10012; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 6=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=10$.
15. n=7; спектр 0000000; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=12$;
16. n=7; спектр -1000001; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=12$.
17. n=7; спектр -1-100011; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=12$.
18. n=7; спектр -1-1-10111; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=12$.
19. n=7; спектр -2-100012; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$;

тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=12$.

20. n=7; спектр -2-1-10112; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=12$.
21. n=7; спектр -2-2-10122; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=12$.
22. n=7; спектр -3-2-10123; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=1$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 7=0 - h^1(\varepsilon_2) + 1 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=13$.
23. n=8; спектр 00000000; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=14$.
24. n=8; спектр -10000001; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=14$.
25. n=8; спектр -1-1000011; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=14$.
26. n=8; спектр -1-1-100111; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=14$.
27. n=8; спектр -2-1000012; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=14$.
28. n=8; спектр -2-1-100112; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=14$.
29. n=8; спектр -2-2-100122; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=0$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 0 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=14$.
30. n=8; спектр -3-2-100123; $h^0(\varepsilon_2)=0$; $h^1(\varepsilon_2(-4))=1$; $h^0(\varepsilon_2(-4))=0$; тогда $2\text{-}2\cdot 8=0 - h^1(\varepsilon_2) + 1 - 0$, отсюда $h^1(\varepsilon_2)=15$.

Результаты наших вычислений мы представляем в следующей табл.:

C_2	*Спектры*	$h^0(\varepsilon_2)$	$h^1(\varepsilon_2)$	$h^2(\varepsilon_2)$	$h^3(\varepsilon_2)$
1	0	0	0	0	0
2	00	0	2	0	0
3	000	0	4	0	0
	-101	0	4	0	0
4	0000	0	6	0	0
	-1001	0	6	0	0
5	00000	0	8	0	0
	-10001	0	8	0	0
	-1-1011	0	8	0	0
	-2-1012	0	8	0	0
6	000000	0	10	0	0
	-100001	0	10	0	0
	-1-10011	0	10	0	0
	-2-10012	0	10	0	0
7	0000000	0	12	0	0
	-1000001	0	12	0	0
	-1-100011	0	12	0	0
	-1-1-10111	0	12	0	0
	-2-100012	0	12	0	0
	-2-1-10112	0	12	0	0
	-2-2-10122	0	12	0	0
	-3-2-10123	0	13	1	0
8	00000000	0	14	0	0
	-10000001	0	14	0	0

	-1-1000011	0	14	0	0
	-1-1-100111	0	14	0	0
	-2-1000012	0	14	0	0
	-2-1-100112	0	14	0	0
	-2-2-100122	0	14	0	0
	-3-2-100123	0	15	1	0

Полученные экспериментальные данные имеют ценность, поскольку существенно помогают в изучении пространств модулей $M_{P^3}(2;0,n)$ стабильных 2-расслоений на P^3 с c_1=0 и c_2=n для высоких значений c_2. О данных пространствах модулей в настоящее время мало что известно.

Адаптация технологии Барта на случай обобщенных нуль-корреляционных расслоений

Данный раздел посвящен адаптации технологии Барта поиска соответствия расслоений спектрам посредством вычисления инвариантов – групп когомологий на случай обобщенных нуль-корреляционных расслоений.

Л. Эйн в работе [5] рассмотрел специальный класс стабильных векторных расслоений ранга 2 на P^3 – класс так называемых обобщенных нуль-корреляционных расслоений ε_2, являющихся когомологическими пучками монад типа

$$0 \to O_{P^3}(-c) \to O_{P^3}(-b) \oplus O_{P^3}(-a) \oplus O_{P^\#}(a) \oplus O_{P^\#}(b) \to O_{P^3}(c) \to 0, \quad (1)$$

где a, b и c – целые числа, удовлетворяющие условию

$$c > b \geq a \geq 0. \quad (2)$$

В этом случае, как нетрудно вычислить, $c_1(\varepsilon_2)=0, c_2(\varepsilon_2)=c^2 - a^2 - b^2$. Более того, Л. Эйн показал, что такие расслоения стабильны тогда и только тогда, когда

$$c > a + b, \quad (3)$$

и из утверждения (а) теоремы 3.1 работы [5] следует, что пространство (многообразие) модулей $M_{P^3}(2;0,c^2 - a^2 - b^2)$ имеет неприводимую компоненту $N(a,b,c)$, общая точка которой соответствует классу расслоений, являющихся когомологическими пучками монад типа (1).

С другой стороны, В. Барт в статье [4] предложил технологию поиска соответствия расслоений спектрам посредством вычисления инвариантов – групп когомологий. А именно, как показал Барт,

$$h^1\varepsilon_2(-1)=h^0K,\ h^1\varepsilon_2(-2)=h^0K(-1),\ K=\oplus\, O_{P^1}(k), \quad (4)$$

где числа k пробегают спектр расслоения ε_2.

Если расслоение ε_2 удовлетворяет условиям (1), (2) и (3), то дисплей его монады имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & O_{P^3}(-c) & \to & & L & \to & \varepsilon_2 & \to 0 \\
 & \| & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & O_{P^3}(-c) & \to & & O_{P^3}(-b) \oplus O_{P^3}(-a) \oplus O_{P^3}(a) \oplus O_{P^3}(b) & \to & Q & \to 0, \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & O_{P^3}(c) & = & O_{P^3}(c) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

где L и Q – некоторые пучки. Тем самым, для $\varepsilon_2(-1)$ диаграмма имеет вид:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-c-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L(-1) \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon_2(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-c-1) \arrow[r] & O_{P^3}(-b-1)\oplus O_{P^3}(-a-1)\oplus O_{P^3}(a-1)\oplus O_{P^3}(b-1) \arrow[r] \arrow[d] & Q(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & & O_{P^3}(c-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & O_{P^3}(c-1) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

откуда с учетом стабильности ε_2 и (4) легко получаем равенство

$$h^0(K)=h^0O_{P^3}(c-1)-h^0O_{P^3}(b-1)-h^0O_{P^3}(a-1). \qquad (5)$$

Аналогично, для $\varepsilon_2(-2)$ имеем:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-c-2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L(-2) \arrow[r] \arrow[d] & \varepsilon_2(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_{P^3}(-c-2) \arrow[r] & O_{P^3}(-b-2)\oplus O_{P^3}(-a-2)\oplus O_{P^3}(a-2)\oplus O_{P^3}(b-2) \arrow[r] \arrow[d] & Q(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & & O_{P^3}(c-2) \arrow[r, equal] \arrow[d] & O_{P^3}(c-2) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

откуда с учетом стабильности ε_2 и (*) также легко получаем равенство

$$h^0K(-1)=h^0O_{P^3}(c-2)-h^0O_{P^3}(b-2)-h^0O_{P^3}(a-2). \qquad (6)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Обобщенные нуль-корреляционные расслоения ε_2, удовлетворяющие условиям (1), (2) и (3), соответствуют спектрам, для которых выполняются равенства (5) и (6).

Библиографический список

1. Тихомиров, С. А. О многообразиях модулей $M_{P^3}(2;0,10)$ и $M_{P^3}(2;0,11)$ стабильных 2-расслоений с классами Черна $c_1=0$, $c_2=10$ и 11 на комплексном проективном пространстве [Текст] / С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, Е. А. Рузанов // Ярославский педагогический вестник. – 2012. – № 4. – Т. III (Естественные науки). – С. 13–18.
2. Хартсхорн, Р. Алгебраическая геометрия [Текст] / Р. Хартсхорн. – М. : Мир, 1981. – 597 с.
3. Barth W., Elencwajg G. Concernant la cohomologie des fibres algebriques stables sur $P^n(C)$ // Springer Lecture Notes, 683 (1978), 1–24.
4. Barth W. Some experimental data // Les equations de Yang-Mills. A.Douady, J.-L.Verdier, eds, seminaire E.N.S. 1977–1978, Asterisque, 71–72 (1980), 205–218.
5. Ein L. Generalized null correlation bundles // Nagoya Math. J., 111 (1988), 13–24.
6. Smirnov E. Hausdorff Spectra in Functional Analysis. – Springer, 2002, 209 p.
7. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.

Bibliograficheskij spisok

1. Tikhomirov, S. A. O mnogoobraziyakh moduley i stabil'nykh 2-rassloyeniy s klassami Cherna $c_1=0$, $c_2=10$ i 11 na kompleksnom proyektivnom prostranstve [Tekst] / S. A. Tikhomirov, A. P. Lyapin, Ye. A. Ruzanov // Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik. – 2012. – № 4. – T. III (Yestestvennyye nauki). – S. 13–18.
2. Khartskhorn, R. Algebraicheskaya geometriya [Tekst] / R. Khartskhorn. – M. : Mir, 1981. – 597 s.
3. Barth W., Elencwajg G. Concernant la cohomologie des fibres algebriques stables sur // Springer Lecture Notes, 683 (1978), 1–24.

4. Barth W. Some experimental data // Les equations de Yang-Mills. A.Douady, J.-L.Verdier, eds, seminaire E.N.S. 1977–1978, Asterisque, 71–72 (1980), 205–218.

5. Ein L. Generalized null correlation bundles // Nagoya Math. J., 111 (1988), 13–24. 6. Smirnov E. Hausdorff Spectra in Functional Analysis. – Springer, 2002, 209 p. 7. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.