УДК 517.929

А. Р. Абдуллаев, О. А. Неволина

О квазилинейном дифференциальном уравнении нейтрального типа в критическом случае

Рассматривается задача Коши для квазилинейного дифференциального уравнения нейтрального типа $a(t)x'(t)+b(t)x'(h_1(t))+c(t)x'(h_2(t))= f(t,(Tx)(t))$. Доказана теорема существования для случая, когда оператор, соответствующий левой части уравнения, является сюръективным, но необязательно обратимым.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа, задача Коши, теоремы существования, оператор внутренней суперпозиции.

A. R. Abdullaev, O. A. Nevolina

On a Quasilinear Differential Equation of a Neutral Type in a Critical Case

Cauchy problem for the differential quasilinear equation of a neutral type $a(t)x'(t)+b(t)x'(h_1(t))+c(t)x'(h_2(t))= f(t,(Tx)(t))$ is considered. We prove the existence theorem for the case, when an operator corresponding to the left part of the equation is surjective, but not necessary invertible.

Keywords: an equation of a neutral type, Cauchy problem, existence theorems, an inner superposition (composition) operator.

В работе [2] доказаны теоремы существования решения задачи Коши для квазилинейного уравнения нейтрального типа с двумя отклонениями аргумента, задаваемыми линейными функциями. В настоящей работе упомянутое уравнение рассматривается с наиболее общими отклонениями аргумента, для которого устанавливается теорема существования решения задачи Коши. Нас будет интересовать случай, когда разрешимость задачи доказывается на основе утверждения о сюръективности оператора внутренней суперпозиции, являющегося суммой двух слагаемых – одночленных операторов суперпозиции. При этом оператор $L: L_p \to L_p$, $L = A + S$, соответствующий левой части уравнения, оказывается сюръективным, но необязательно обратимым. В этом смысле изучаемый в работе случай является критическим для уравнения (1). Кроме того, коэффициент при $x'(t)$ может обращаться в нуль. Для обыкновенных дифференциальных уравнений это бы означало сингулярность уравнения.

Как ранее отмечалось [1], уравнения нейтрального типа могут обладать свойствами, не характерными для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоретические исследования таких свойств будут способствовать более широкому применению дифференциальных уравнений нейтрального типа в математических моделях реальных процессов.

Будем рассматривать задачу Коши

$$\begin{cases} a(t)x'(t)+b(t)x'(h_1(t))+c(t)x'(h_2(t))= f(t,(Tx)(t)) & (1)\\ x(0)=\alpha, & (2)\end{cases}$$

где $t\in[0;1]$, $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$ – измеримые функции, $f:[0,1]\times R^1 \to R^1$ удовлетворяют условиям Каратеодори, T – линейный оператор. Условия на порождающие оператор внутренней суперпозиции функции h_1, h_2 сформулированы ниже.

Будем пользоваться обозначениями работы [2]. Для удобства чтения напомним основные из них. Положим $E=[0,1]\subset R^1=(-\infty,\infty)$. Через L_p, $1<p<+\infty$, обозначим банахово пространство функций $y: E\to R^1$, суммируемых (здесь и далее – по Лебегу) в p-й степени, с нормой

$\|y\|_p = \left(\int_E |y(t)|^p dt \right)^{1/p}$; L_∞ – пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $y: E \to R^1$ с нормой $\|y\|_\infty = vrai\sup_{t\in E}|y(t)|$; D_p – пространство таких абсолютно непрерывных функций $x: E \to R^1$, что $x' \in L_p$, с нормой $\|x\|_{D_p} = |x(a)| + \|x'\|_p$.

Для измеримого множества $e \subset R^1$ через $m(e)$ будем обозначать его меру Лебега. Пусть $h_i : E \to R^1$, $i = \overline{1;2}$ – измеримые функции, множества $h_i(E)$ измеримы и $h_i(E) \subset E$. Определим одночленные операторы внутренней суперпозиции

$$(S_1 y)(t) = b(t) y(h_1(t))$$

$$(S_2 y)(t) = c(t) y(h_2(t))$$

и положим $S = S_1 + S_2$.

Определим функции множеств (подробное изложение последующих предположений и пояснение к ним приведено в работе [1]):

$$\mu_1(e) = m(h_1^{-1}(e)),$$

$$\mu_2(e) = m(h_2^{-1}(e)),$$

и будем предполагать их абсолютную непрерывность относительно меры Лебега. Через $\mu_i'(\cdot)$ обозначим производную Радона – Никодима функции множества $\mu_i(e)$, $i = \overline{1;2}$. Будем предполагать выполненными условия

$$vrai\sup_{t\in E}\left| b(t)(\mu_1'(h_1(t)))^{1/p} \right| < +\infty, \quad vrai\sup_{t\in E}\left| c(t)(\mu_2'(h_2(t)))^{1/p} \right| < +\infty.$$

При выполнении этих условий операторы $S_i : L_p \to L_p$, $i = \overline{1;2}$, $1 < p < +\infty$ являются ограниченными. Нам потребуются некоторые утверждения, сформулированные в работе [2], в частности, теорема 1 и лемма 4. Следующее утверждение содержит условия, гарантирующие сюръективность оператора $L: L_p \to L_p$, где $L = A + S$, $(Ay)(t) = a(t)y(t)$ и $S = S_1 + S_2$. Для характеристики функций h_1^{-1} и h_2^{-1} нам потребуются функции множеств

$$\lambda_1(e) = m(h_1(e)), \quad \lambda_2(e) = m(h_2(e)), \quad e \in E.$$

О связи функций множеств λ_1, λ_2 соответственно с функциями множеств μ_1, μ_2 и вычислении их производных Радона – Никодима см. [1].

Лемма. Пусть выполнены условия:

1) $h_i(E) \subset E$, $i = \overline{1;2}$, и $m(h_1(E) \cap h_2(E)) = 0$;

2) существуют измеримые функции $h_1^{-1} : h_1(E) \to E$ и $h_2^{-1} : h_2(E) \to E$ такие, что $h_1^{-1}(h_1(t)) = t$, $h_2^{-1}(h_2(t)) = t$ почти всюду на E;

3) $0 < \beta \le vrai\inf_{t\in E}\left(|b(t)|^q (\lambda_1'(t))^{1-q} + |c(t)|^q (\lambda_2'(t))^{1-q} \right)^{1/q}$ и $\|a\|_\infty < \beta$.

Тогда оператор $L: L_p \to L_p$, $L = A + S$, где $(Ay)(t) = a(t)y(t)$, $(Sy)(t) = (S_1 y((t) + (S_2 y)(t)$, является сюръективным, причем

$$\left(\beta - \|a\|_\infty\right)\|\omega\|_q \le \left\|L^*\omega\right\|_q, \quad \omega \in L_q. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала докажем, что оператор $S : L_p \to L_p$, $S = S_1 + S_2$, сюръективен и выполняется неравенство

$$\beta \|\omega\|_q \le \|S^* \omega\|_q, \tag{4}$$

где $\beta \le \underset{t\in E}{vrai\inf} \left(|b(t)|^q (\lambda_1'(t))^{1-q} + |c(t)|^q (\lambda_2'(t))^{1-q} \right)^{1/q}$.

Операторы, сопряженные с S_1, S_2, имеют вид

$$(S_1^* \omega)(\tau) = \begin{cases} b\left(h_1^{-1}(\tau)\right)\omega\left(h_1^{-1}(\tau)\right)\mu_1'(\tau), & \tau \in h_1(E) \\ 0, & \tau \notin h_1(E), \end{cases}$$

$$(S_2^* \omega)(\tau) = \begin{cases} c\left(h_2^{-1}(\tau)\right)\omega\left(h_2^{-1}(\tau)\right)\mu_2'(\tau), & \tau \in h_2(E) \\ 0, & \tau \notin h_2(E) \end{cases}.$$

Рассмотрим $\|S^* \omega\|_q^q$ и с учетом условия 1) леммы представим в виде суммы двух интегралов

$$\|S^* \omega\|_q^q = \int_{h_1(E)} \left| b(h_1^{-1}(\tau))\omega(h_1^{-1}(\tau))\mu_1'(\tau) \right|^q d\tau + \int_{h_2(E)} \left| c(h_2^{-2}(\tau))\omega(h_2^{-1}(\tau))\mu_2'(\tau) \right|^q d\tau.$$

В каждом из интегралов произведем замену переменной, соответственно полагая $\tau = h_1(t)$ и $\tau = h_2(t)$. Получим

$$\|S^* \omega\|_q^q = \int_E (|b(t)\mu_1'(h_1(t)|^q \lambda_1'(t) + |c(t)\mu_2'(h_2(t)|^q \lambda_2'(t))|\omega(t)|^q dt.$$

В условиях леммы имеем [1]

$$\lambda_1'(t)\mu_1'(h_1(t)) = 1, \; \lambda_2'(t)\mu_2'(h_2(t)) = 1.$$

Следовательно,

$$\|S^* \omega\|_q^q = \int_E (|b(t)|^q (\lambda_1'(t))^{1-q} + |c(t)|^q (\lambda_2'(t))^{1-q})|\omega(t)|^q dt.$$

Из этого равенства в силу условия 3) леммы получим неравенство (4). Так как

$$\|A^* \omega\|_q \le \|A^*\| \|\omega\|_q \le \|a\|_\infty \|\omega\|_q,$$

и

$$\|L^* \omega\|_q \ge \|S^* \omega\|_q - \|A^* \omega\|_q,$$

то справедливо неравенство (3). В силу условия 3) это же неравенство гарантирует сюръективность оператора $L : L_p \to L_p$. Лемма доказана.

Вернемся к задаче (1), (2). Решением этой задачи (1), (2) будем называть такую функцию $x = x(t)$, $t \in E$, которая является элементом пространства D_p, почти всюду на E удовлетворяет уравнению (1), а также начальному условию (2).

Для применения теоремы 1 работы [2] представим задачу (1), (2) в виде операторного уравнения

$$Ly = Fy. \tag{5}$$

Для этого при произвольно фиксированном $\alpha \in R^1$ положим $x'(t) = y(t)$ и определим оператор $V: L_p \to L_p$ равенством $(Vy)(t) = \alpha + \int_0^t y(s)ds$. Пусть $N: L_p \to L_p$, $(Nu)(t) = f(t,u(t))$ – оператор Немыцкого. Оператор $F: L_p \to L_p$ определим равенством $Fy = N(T(Vy))$. Тогда задача (1), (2) принимает вид квазилинейного операторного уравнения (5). В следующей теореме предполагается, что $1 < p < \infty$.

Теорема. Пусть выполнены условия леммы, а также следующие:

1) существуют константы $\delta > 0, \gamma > 0$ такие, что функция $f: E \times R^1 \to R^1$ удовлетворяет неравенству $|f(t,u)| \le \delta + \gamma |u|$ при всех $u \in R^1$ и почти всех $t \in E$;

2) $T: L_p \to L_p$ – линейный ограниченный оператор;

3) существует $\beta > 0$, такое, что $\gamma \|T\| + \|a\|_\infty < \beta$

$$\le \underset{t \in E}{vrai\inf} \left(|b(t)|^q (\lambda_1'(t))^{1-q} + |c(t)|^q (\lambda_2'(t))^{1-q} \right)^{1/q}.$$

Тогда задача (1), (2) для произвольного $\alpha \in R^1$ имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Покажем, что условия данной теоремы обеспечивают выполнение условий 1)–3) теоремы 1 работы [2].

Оператор $V: L_p \to L_p$ при $1 < p < \infty$ является вполне непрерывным. Поэтому вполне непрерывным будет и оператор $F: L_p \to L_p$. Величины d и q, фигурирующие в упомянутой теореме, в силу леммы 4 работы [2] соответственно равны

$$q = \beta - \|a\|_\infty, \; d = \gamma \|T\|.$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы 1 работы [2], поэтому задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x \in D_p$, $1 < p < \infty$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Абдуллаев, А. Р., Неволина, О. А. Задача Коши для квазилинейного дифференциального уравнения нейтрального типа [Текст] / А. Р. Абдуллаев, О. А. Неволина // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – № 3. – Том III (Естественные науки) – С. 7–12.
2. Неволина, О. А. О разрешимости задачи Коши для одного уравнения нейтрального типа [Текст] / О. А. Неволина // Ярославский педагогический вестник.– 2012. – № 3. – Том III (Естественные науки) – С. 22–27.

Bibliograficheskij spisok

1. Abdullayev, A. R., Nevolina, O. A. Zadacha Koshi dlya kvazilineynogo differentsial'nogo uravneniya neytral'nogo tipa [Tekst] / A. R. Abdullayev, O. A. Nevolina // Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik. – 2011. – № 3. – Tom III (Yestestvennyye nauki) – S. 7–12.
2. Nevolina, O. A. O razreshimosti zadachi Koshi dlya odnogo uravneniya neytral'nogo tipa [Tekst] / O. A. Nevolina // Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik.– 2012. – № 3. – Tom III (Yestestvennyye nauki) – S. 22–27.