УДК 004

В. В. Богун, Ю. П. Поварёнков

Численные методы решения задач математического анализа с применением информационных технологий

В статье представлены алгоритмы численных методов золотой пропорции и дихотомии, используемые при решении задач математического анализа с точки зрения нахождения пределов числовых последовательностей и решении алгебраических уравнений. Представлено программное обеспечение в виде динамических расчетных проектов для дистанционной системы, позволяющее реализовать сравнительный анализ рассматриваемых численных методов решения математических задач.

Ключевые слова: численные методы, метод золотой пропорции, метод дихотомии, сравнительный анализ, динамические интернет-сайты.

V. V. Bogun, Ju. P. Povarionkov

Numerical Methods to Solve Problems of the Mathematical Analysis with Use of Information Technologies

Algorithms of numerical methods of the gold proportion and dichotomy used to solve problems of the mathematical analysis from the point of view of finding limits of numerical sequences and the solution of the algebraic equations are presented in the article. The software in the form of dynamic calculated projects for the remote system is presented and it allows to realize a comparative analysis of the considered numerical methods of solving mathematical problems.

Keywords: numerical methods, a method of a gold proportion, a dichotomy method, a comparative analysis, dynamic Internet sites.

Введение

В предлагаемой статье рассматриваются численные методы решения задач математического анализа, подразумевающие реализацию пошагового решения задачи с применением определенных расчетных алгоритмов, которые базируются на использовании комбинации линейных, разветвляющихся и циклических алгоритмов.

Применение численных алгоритмов при решении математических задач [5] обусловлено невозможностью в определенных случаях решения задачи аналитическими методами без использования пошаговых циклических алгоритмов в рамках одной итерации (например, решение определенных алгебраических уравнений или вычисление значений определенных «неберущихся» интегралов).

При решении подобных математических задач с применением численных методов, как правило, пользуются несколькими вычислительными алгоритмами, результаты расчетов по которым впоследствии сравниваются с целью определения либо более точных значений итоговых параметров задачи либо выявления оптимального алгоритма поиска необходимых значений итоговых параметров с целью минимизации количества расчетных итераций [4].

Проведение сравнительного анализа расчетных алгоритмов соответствующих численных методов необходимо осуществлять с применением информационных технологий с целью корректного и оперативного получения значений и определенных параметров задачи.

Нахождение предельных параметров числовых последовательностей

В рамках исследования осуществляется расчет значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей вида $x_n = \dfrac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$,

$\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) с использованием методов золотой пропорции и дихотомии с последующим проведением сравнительного анализа на основе применения разработанного автором программного обеспечения [2, 3].

Пределом рассматриваемых числовых последовательностей является отношение:

$$A = \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{a_2}{b_2}.$$

В рамках рассматриваемой задачи необходимо реализовать расчет значений минимальных номеров n_ε числовых последовательностей $\{x_n\}$ по заданным $\varepsilon > 0$ таких, что для всех членов числовых последовательностей со значениями номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

В качестве исследуемого объекта в данном случае выступает функция $|f(n)| = |x_n - A|$:

$$|f(n)| = \left| \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} - \frac{a_2}{b_2} \right| = \left| \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) n + a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2 (b_2 n^2 + b_1 n + b_0)} \right|.$$

Рассмотрим логические основы реализации численных методов золотой пропорции и дихотомии для выполнения приближенных вычислений значений минимальных номеров n_ε для числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (при $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) в зависимости от различных числовых значений ε в рамках рассматриваемого отрезка $[n_{A0}, n_{B0}]$ с условием $n_{A0} < n_{B0}$, на котором следует осуществлять нахождение значения минимального номера n_ε, где n_{A0} и n_{B0} – произвольные теоретические номера числовой последовательности.

Метод золотой пропорции

Суть золотой пропорции, изображенной на рис. 1, состоит в следующем: если разделить отрезок *C* на отрезки *A* и *B* таким образом, что это будет отражать золотую пропорцию, то *A*, деленное на *B*, будет равно *C*, деленному на *A*.

Символьная запись: $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$.

Действительно, пусть $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = X$.

Так как $A + B = C$, то есть $\frac{A}{A} + \frac{B}{A} = \frac{C}{A}$, то получим квадратное уравнение:

$$1 + \frac{1}{X} = X \Rightarrow X^2 - X - 1 = 0.$$

Положительный действительный корень квадратного уравнения:

$$X = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989.$$

Получим равенства: $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \varphi$ и $\frac{C}{B} = \varphi^2$.

Метод золотой пропорции для нахождения значения минимального номера n_ε исходной числовой последовательности на основании вышеуказанных исходных данных имеет следующую реализацию:

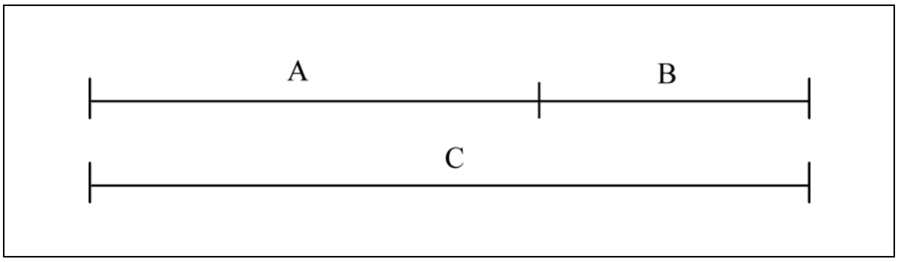

Рис. 1. Золотая пропорция

1. На искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^{GP} и n_{D0}^{GP}, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^{GP} < n_{D0}^{GP} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > |f(n_{C0}^{GP})| > |f(n_{D0}^{GP})| > |f(n_{B0}^{GP})|$ в соответствии с принципами золотой пропорции согласно следующим соотношениям:

$$n_{C0}^{GP} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi^2} = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi},\ n_{D0}^{GP} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi} = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi^2}.$$

2. При наличии положительных дробных частей значения n_{C0}^{GP} и n_{D0}^{GP} округляются до ближайших больших целых чисел.

3. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP} = 0$, и в качестве минимального номера n_{ε}^{GP} выбирается $n_{\varepsilon}^{GP} = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$.

4. Если $n_{B0} - n_{A0} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод дихотомии

Суть дихотомии, или половинного деления, состоит в следующем: если разделить отрезок *C* на отрезки *A* и *B* таким образом, что это будет отражать дихотомию, то *C*, деленное на *A*, будет равно *C*, деленному на *B*, то есть *A* равно *B*: $\frac{C}{A} = \frac{C}{B} = 2$, или $A = B$.

Если рассмотреть отрезок $[n_{A0}, n_{B0}]$ с условием $n_{A0} < n_{B0}$, на котором следует осуществлять нахождение значения минимального номера n_{ε}, где n_{A0} и n_{B0} – произвольные теоретические номера последовательности, то метод золотой пропорции для нахождения значения минимального номера n_{ε} исходной числовой последовательности имеет следующую реализацию:

1. На искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^{D} и n_{D0}^{D}, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^{D} = n_{D0}^{D} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > |f(n_{C0}^{D})| > |f(n_{D0}^{D})| > |f(n)_{B0}|$ в соответствии с принципом дихотомии согласно следующим соотношениям:

$$n_{C0}^{D} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - 1 = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi} - 1,\ n_{D0}^{D} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi} + 1 = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi^2} + 1.$$

2. При наличии положительных дробных частей значения n_{C0}^{D} и n_{D0}^{D} округляются до ближайших больших целых чисел.

3. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} \le 2$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = 0$ и в качестве минимального номера n_ε^D выбирается $n_\varepsilon^D = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \ge \varepsilon > |f(n_{B0})|$.

4. Если $n_{B0} - n_{A0} \ne 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Сравнительный анализ численных методов

Программная реализация описанных численных методов решения рассматриваемой задачи (методы золотой пропорции и дихотомии) осуществляется в виде разработанного автором динамического расчетного проекта в рамках соответствующей дистанционной системы [5], суть которого заключается в генерировании значений исходных данных и расчете значений необходимых параметров согласно определенным программным составляющим.

На рис. 2 представлены определенные составляющие рассматриваемого динамического расчетного проекта. На рис. 2A) отражены значения исходных данных для проекта, на рис. 2B) и 2C) показаны значения промежуточных результатов для «0»-го шага и итоговых результатов соответственно для метода золотой пропорции, тогда как на рис. 2D) и 2E) представлены значения промежуточных результатов для «0»-го шага и итоговых результатов соответственно для метода дихотомии.

Согласно указанным на рис. 2 результатам расчетов, выполненных с применением авторского программного обеспечения, можно сделать вывод, что при одинаковых значениях минимальных номеров n_ε количество шагов итераций s_ε для метода золотой пропорции меньше, чем для метода дихотомии, что характеризует метод золотой пропорции как более оптимальный алгоритм поиска и расчета значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей.

Приближенные решения алгебраических уравнений

В рамках исследования осуществляется приближенное решение алгебраических уравнений вида $f(x) = 0$ с целью определения приближенного значения изолированного действительного корня x_n на отрезке $[a_0, b_0]$ с необходимой точностью ε с использованием методов золотой пропорции и дихотомии с последующим проведением сравнительного анализа на основе применения разработанного автором программного обеспечения [2, 3].

Рассмотрим логические основы реализации численных методов золотой пропорции и дихотомии для выполнения приближенных решений алгебраических уравнений вида $f(x) = 0$ с целью определения приближенного значения изолированного действительного корня x_n в зависимости от различных числовых значений ε в рамках рассматриваемого отрезка $[x_{A0}, x_{B0}]$ с условиями $x_{A0} < x_{B0}$ и $f(x_{A0}) \cdot f(x_{B0}) < 0$, на котором следует осуществлять нахождение значения действительного корня x_n, где x_{A0} и x_{B0} – произвольные значения аргументов рассматриваемой функции.

Метод золотой пропорции

Метод золотой пропорции для нахождения приближенного значения действительного корня x_n алгебраического уравнения вида $f(x) = 0$ на основании вышеуказанных исходных данных имеет следующую реализацию:

1. На искомом отрезке $[x_{A0}, x_{B0}]$ при соблюдении условий $x_{A0} < x_{B0}$ и $f(x_{A0}) \cdot f(x_{B0}) < 0$ выбираются точки с абсциссами x_{C0}^{GP} и x_{D0}^{GP}, исходя из неравенства $x_{A0} < x_{C0}^{GP} < x_{D0}^{GP} < x_{B0}$ в соответствии с принципами золотой пропорции согласно следующим соотношениям:

$$x_{C0}^{GP} = x_{A0} + \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi^2} = x_{B0} - \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi}, \quad x_{D0}^{GP} = x_{A0} + \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi} = x_{B0} - \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi^2}.$$

Исходные данные для работы:

Коэффициенты числовой последовательности:

$a_0 = -1$

$a_1 = 6$

$a_2 = 8$

$b_0 = -6$

$b_1 = -7$

$b_2 = -2$

Параметры поиска:

$eps = 0.08$

$n_{A0} = 7$

$n_{B0} = 5000$

A)

Нахождение параметров расчетов по методу золотой пропорции:

Шаг 0:

$n^{GP}{}_{A0} = 7$

$n^{GP}{}_{B0} = 5000$

$n^{GP}{}_{C0} = 1915$

$n^{GP}{}_{D0} = 3093$

$|y(n^{GP}{}_{C0})-a_2/b_2| = 0.0057$

$|y(n^{GP}{}_{D0})-a_2/b_2| = 0.0036$

B)

Итоговые результаты метода золотой пропорции:

Количество шагов $s^{GP}{}_{eps} = 8$

Минимальный номер $n^{GP}{}_{eps} = 135$

C)

Нахождение параметров расчетов по методу дихотомии:

Шаг 0:

$n^{D}{}_{A0} = 7$

$n^{D}{}_{B0} = 5000$

$n^{D}{}_{C0} = 2503$

$n^{D}{}_{D0} = 2505$

$|y(n^{D}{}_{C0})-a_2/b_2| = 0.0044$

$|y(n^{D}{}_{D0})-a_2/b_2| = 0.0044$

D)

Итоговые результаты метода дихотомии:

Количество шагов $s^{D}{}_{eps} = 11$

Минимальный номер $n^{D}{}_{eps} = 135$

E)

Рис. 2. Реализация динамического расчетного проекта по исследованию числовых последовательностей

2. Осуществляется анализ полученных данных:
   2.1.Если $f\left(x_{A0}\right)\cdot f\left(x_{C0}^{GP}\right)<0$, то $x_{A1}=x_{A0}$ и $x_{B1}=x_{C0}^{GP}$.
   2.2.Если $f\left(x_{C0}^{GP}\right)\cdot f\left(x_{D0}^{GP}\right)<0$, то $x_{A1}=x_{C0}^{GP}$ и $x_{B1}=x_{D0}^{GP}$.
   2.3.Если $f\left(x_{D0}^{GP}\right)\cdot f\left(x_{B0}\right)<0$, то $x_{A1}=x_{D0}^{GP}$ и $x_{B1}=x_{B0}$.

3. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{B0}-x_{A0}\right|\le\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP}=0$ и в качестве приближенного решения уравнения выбирается абсцисса $x_{\varepsilon}^{GP}=\dfrac{x_{A0}+x_{B0}}{2}$.

4. Если $\left|x_{B0}-x_{A0}\right|>\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод дихотомии

Метод золотой пропорции для нахождения приближенного значения действительного корня x_n алгебраического уравнения вида $f(x)=0$, на основании вышеуказанных исходных данных имеет следующую реализацию:

1. На искомом отрезке $[x_{A0},x_{B0}]$ при соблюдении условий $x_{A0}<x_{B0}$ и $f\left(x_{A0}\right)\cdot f\left(x_{B0}\right)<0$ выбирается точка с абсциссой x_0^D исходя из неравенства $x_{A0}<x_0^D<x_{B0}$ в соответствии с принципами дихотомии согласно следующему соотношению: $x_0^D=\dfrac{x_{A0}+x_{B0}}{2}$.

2. Осуществляется анализ полученных данных:
   2.1. Если $f\left(x_{A0}\right)\cdot f\left(x_0^D\right)<0$, то $x_{A1}=x_{A0}$ и $x_{B1}=x_0^D$.
   2.2. Если $f\left(x_0^D\right)\cdot f\left(x_{B0}\right)<0$, то $x_{A1}=x_0^D$ и $x_{B1}=x_{B0}$.

3. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{B0}-x_{A0}\right|\le 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP}=0$ и в качестве приближенного решения уравнения выбирается абсцисса $x_{\varepsilon}^{GP}=x_0^D=\dfrac{x_{A0}+x_{B0}}{2}$.

4. Если $\left|x_{B0}-x_{A0}\right|>2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Сравнительный анализ численных методов

Программная реализация рассмотренных численных методов решения рассматриваемой задачи (методы золотой пропорции и дихотомии) осуществляется аналогичным образом в виде разработанного автором динамического расчетного проекта в рамках соответствующей дистанционной системы [1], суть которого заключается в генерировании значений исходных данных и расчете значений необходимых параметров согласно определенным программным составляющим.

На рис. 3 представлены определенные составляющие рассматриваемого динамического расчетного проекта. По аналогии с первой задачей на рис. 3А) отражены значения исходных данных для проекта, на рис. 3В) и 3С) показаны значения промежуточных результатов для «0»-го шага и итоговых результатов соответственно для метода золотой пропорции, тогда как на рис. 3D) и 3E) представлены значения промежуточных результатов для «0»-го шага и итоговых результатов соответственно для метода дихотомии.

Согласно указанным на рис. 3 результатам расчетов, выполненных с применением авторского программного обеспечения, можно сделать вывод, что при нахождении приближенного решения исходного алгебраического уравнения количество шагов итераций s_{ε} для метода золотой пропорции меньше, чем для метода дихотомии, при этом для первого метода приближенное значение корня уравнения x_{ε} получается более точным, что характеризует метод золотой пропорции не только как более оптимальный алгоритм приближенного решения алгебраических уравнений, но и более точный и корректный по сравнению с методом дихотомии.

Исходные данные для работы:

Коэффициенты уравнения:
$a = 4$
$b = -8$
$c = -10$
$d = 8$
Исходное уравнение: a*x^3+b*x^2+c*x+d=0 или 4*x^3+(-8)*x^2+(-10)*x+8=0.
Параметры поиска:
$a_0 = -6$
$b_0 = -1$
$eps = 0.018$

A)

Нахождение параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:
$a^{GP}{}_0 = -6$
$f(a^{GP}{}_0) = -1084$
$b^{GP}{}_0 = -1$
$f(b^{GP}{}_0) = 6$
$f(a^{GP}{}_0)*f(b^{GP}{}_0) = -6504$
$c^{GP}{}_0 = -4.0902$
$f(c^{GP}{}_0) = -358.6478$
$d^{GP}{}_0 = -2.9098$
$f(d^{GP}{}_0) = -129.1859$
$x^{GP}{}_0 = -3.5$
$f(x^{GP}{}_0) = -226.5$
$|b^{GP}{}_0-a^{GP}{}_0| = 5$

B)

Итоговые результаты метода золотой пропорции:
Количество шагов $s^{GP}{}_{eps} = 7$
Значение корня уравнения $x^{GP}{}_{eps} = -1.2583$
Значение функции $f(x^{GP}{}_{eps}) = -0.0527$

C)

Нахождение параметров расчетов по методу дихотомии:
Шаг 0:
$a^D{}_0 = -6$
$f(a^D{}_0) = -1084$
$b^D{}_0 = -1$
$f(b^D{}_0) = 6$
$f(a^D{}_0)*f(b^D{}_0) = -6504$
$x^D{}_0 = -3.5$
$f(x^D{}_0) = -226.5$
$f(x^D{}_0)*f(a^D{}_0) = 245526$
$f(x^D{}_0)*f(b^D{}_0) = -1359$
$|b^D{}_0-a^D{}_0| = 5$

D)

Итоговые результаты метода дихотомии:
Количество шагов $s^D{}_{eps} = 9$
Значение корня уравнения $x^D{}_{eps} = -1.2638$
Значение функции $f(x^D{}_{eps}) = -0.2136$

E)

Рис. 3. Реализация динамического расчетного проекта по приближенным решениям алгебраических уравнений

Таким образом, при рассмотрении двух задач математического анализа (нахождение предельных параметров числовых последовательностей и приближенные решения алгебраических уравнений), требующих применения численных методов решения (метода золотой пропорции и метода дихотомии), на основе проведенного с помощью разработанного автором программного обеспечения сравнительного анализа вычислительных процедур можно сделать вывод о целесообразности использования метода золотой пропорции как более оптимального и точного численного метода.

Библиографический список

1. Богун, В. В. Использование информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов в обучении математике [Текст] / В. В. Богун. – Индиго, 2010. – 136 с.
2. Богун, В. В. Организация учебного процесса по математике с применением графического калькулятора [Текст] / В. В. Богун. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2012. – 380 с.
3. Богун, В. В., Смирнов, Е. И. Лабораторный практикум с графическим калькулятором [Текст] : учеб. пособие / В. В. Богун, Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во «Канцлер», 2010. – 272 с.
4. Исаков, В. Н. Элементы численных методов [Текст] : учеб. пособие для студ. [Текст] / В. Н. Исаков. – М. : Академия, 2003. – 192 с.
5. Кожухов, И. Б., Прокофьев, А. А. Справочник по математике [Текст] / И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. – М. : «Лист», 1999. – 640 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Bogun, V. V. Ispol'zovanie informacionnoj dinamicheskoj sistemy monitoringa distancionnyh uchebnyh proektov v obuchenii matematike [Tekst] / V. V. Bogun. – Indigo, 2010. – 136 s.
2. Bogun, V. V. Organizacija uchebnogo processa po matematike s primeneniem graficheskogo kal'kuljatora [Tekst] / V. V. Bogun. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2012. – 380 s.
3. Bogun, V. V., Smirnov, E. I. Laboratornyj praktikum s graficheskim kal'kuljatorom [Tekst] : ucheb. posobie / V. V. Bogun, E. I. Smirnov. – Jaroslavl' : Izd-vo «Kancler», 2010. – 272 s.
4. Isakov, V. N. Jelementy chislennyh metodov [Tekst] : ucheb. posobie dlja stud. [Tekst] / V. N. Isakov. – M. : Akademija, 2003. – 192 s.
5. Kozhuhov, I. B., Prokof'ev, A. A. Spravochnik po matematike [Tekst] / I. B. Kozhuhov, A. A. Prokof'ev. – M. : «List», 1999. – 640 s.