УДК 004

О. В. Ли

Информационные технологии в преподавании курса математического анализа в педвузе

В данной статье рассматривается применение математической программы MathCAD в преподавании курса математического анализа в педвузе.

Ключевые слова: информационные технологии, MathCAD, математический анализ.

O. V. Lee

Information Technologies in Teaching the Mathematical Analysis Course in the Pedagogical Higher Educational Institution

In this article use of the mathematical MathCAD programme in teaching the Mathematical Analysis course in the pedagogical higher educational institutions is regarded.

Keywords: information technologies, MathCAD, a mathematical analysis.

В данной статье рассматривается применение математической программы MathCAD в преподавании темы курса математического анализа «Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла» (из раздела «Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных») бакалавров по направлению «Педагогическое образование» (профиль: Информатика).

Современный преподаватель-предметник не может игнорировать тот факт, что применение современных информационных технологий и соответствующей им программно-технической платформы в преподавании курса математического анализа в педвузе является актуальной проблемой на сегодняшний день. Во-первых, это связано с тем, что нужно повышать уровень заинтересованности студентов в изучении тем данной дисциплины. Во-вторых, возникает проблема интеграции накопленных методических знаний и дидактических материалов с возможностями ИКТ.

Математическая программа MathCAD облегчает решение сложных задач из разделов математического анализа и позволяет готовить электронные уроки, книги, видеофильмы с использованием новейших мультимедийных средств.

Если рассмотреть изучение темы «Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла» из раздела «Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных» курса математического анализа, то здесь крайне необходимым в преподавании будет применение программы MathCAD. Разберем причины, по которых необходимо применять данную программу:

- возможность визуально показать учащимся, как будет выглядеть геометрическая фигура;
- сократить до минимума трудности в определении искомой области и ее границ;
- сократить до минимума трудности в определении взаимного расположения и линий пересечения заданных поверхностей.

В результате студенты смогут без труда представить тело, объем которого нужно найти, и приступить к вычислению интеграла.

Рассмотрим этапы построения решения задач по теме «Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла».

Тема занятия: «Вычисление объема тела вращения с помощью определенного интеграла»

Целями занятия по данной теме являются:

1. Научить студентов вычислять интеграл и применять интегрирование функций в качестве одного из способов решения геометрических задач на нахождение объемов.

2. Развивать у студентов логическое мышление, пространственное воображение, умения алгоритмизировать вычислительные действия.

3. Воспитывать у студентов познавательную активность и самостоятельность.

Оборудование, которое потребуется на занятие, – это компьютер, мультимедийный проектор, интерактивная доска.

Постановка задач.

Замечание: графики выполняются в Декартовой системе координат.

Задача I типа.

Требуется вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ и, возможно, прямыми $x_1 = a$ и $x_2 = b$, вокруг оси *Ox*.

План решения:

1 этап

1) Если выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases},$$

то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b ({f_2}^2(x) - {f_1}^2(x))dx. \tag{1}$$

Для наглядности построим график в программе MathCAD.

2) Если же неизвестны a и b или неизвестно, какая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ больше другой на отрезке [*a*; *b*], то переходим ко второму этапу.

2 этап

Находим точки a и b как точки пересечения графиков функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$. Для этого нужно решить уравнение $f_1(x) = f_2(x)$. Для решения уравнения можно применить программу MathCAD.

Для наглядности построим график в программе MathCAD.

3 этап

Необходимо выяснить знак разности $f_1(x) - f_2(x)$ на отрезке [*a*; *b*]. Для этого достаточно взять любую точку из интервала (*a*; *b*) и вычислить в этой точке значение разности $f_1(x) - f_2(x)$. Возможны два случая:

1) Если $f_1(x) - f_2(x) \ge 0$, то $f_1(x) \ge f_2(x)$, тогда объем тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b ({f_1}^2(x) - {f_2}^2(x))dx. \tag{2}$$

2) Если $f_1(x) - f_2(x) \le 0$, то $f_1(x) \le f_2(x)$, тогда объем тела вычисляется по формуле (1)

$$V = \pi \int_a^b ({f_2}^2(x) - {f_1}^2(x))dx.$$

Для наглядности построим график в программе MathCAD.

Замечание:

Аналогично решается задача, если тело образовано вращением фигуры вокруг оси *Oy*.

Пример к задаче I типа.

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y_1 = 3x - x^2$ и $y_2 = 3 - x$, вокруг оси *Ox*.

Решение:

1) В данной задаче неизвестны параметры a и b, неизвестно, какая из функций $y_1 = 3x - x^2$ и $y_2 = 3 - x$ больше другой на отрезке [*a*; *b*].

2) Найдем точки пересечения графиков функций $y_1 = 3x - x^2$ и $y_2 = 3 - x$, решая уравнение $3x - x^2 = 3 - x$. Для того, чтобы применить программу MathCAD для решения данного уравнения (рис. 1), необходимо привести его к виду $f(x) = 0$. Получим $x^2 - 4x + 3 = 0$.

На рисунке видно, что мы получили два корня $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

3) Построим график в программе MathCAD. Графиком функции $y_1 = 3x - x^2$ является парабола, а $y_2 = 3 - x$ является прямая (рис. 2).

4) Выясним знак разности $f_1(x) - f_2(x)$. Возьмем точку x=2 из интервала (1;3). Вычислим $f_1(2) - f_2(2)$. Разность будет равна 1. Следовательно, объем тела вычисляется по формуле (2) (рис. 3):

$V = \pi \int_1^3 ((3x - x^2)^2 - (3 - x)^2)dx.$

$V = 3{,}733\pi$ куб. ед.

5) Построим график получившегося тела в программе MathCAD (рис. 4).

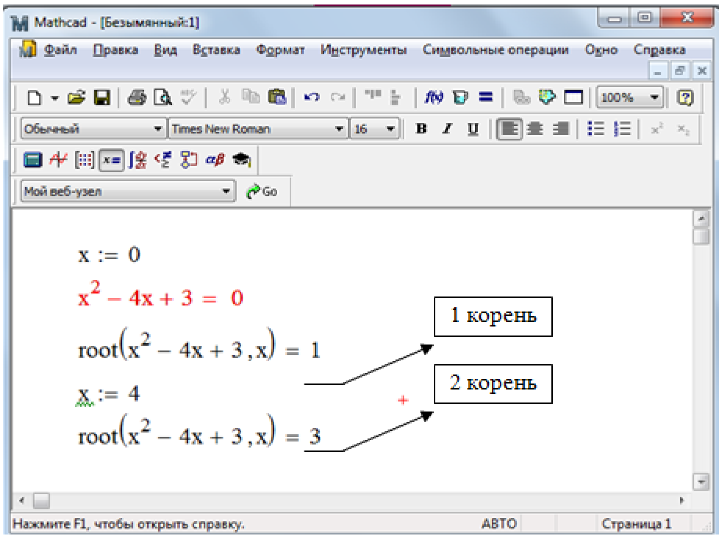


Рис. 1

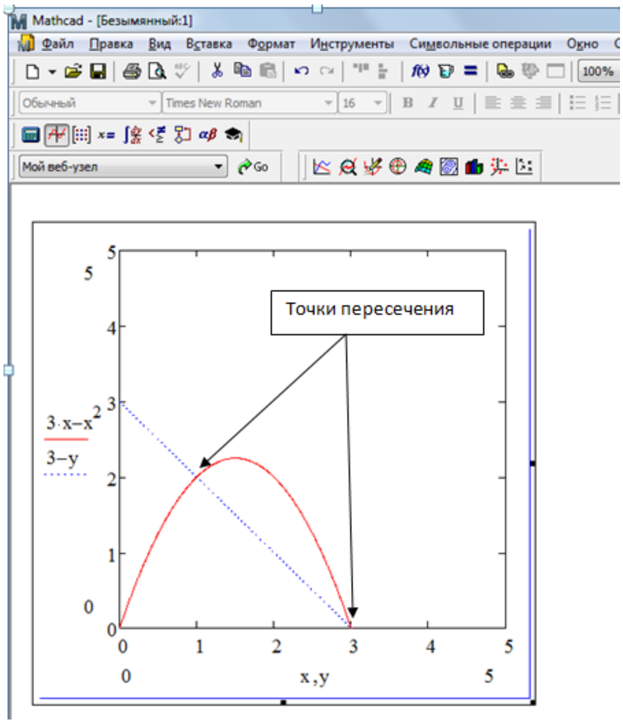


Рис. 2

Задача II типа.

Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного поверхностями.

План решения:

1) Построим заданные поверхности в программе MathCAD.

2) Найдем искомую область и границы изменения этой области. Для этого построим проекцию искомого тела на плоскость Oxy в программе MathCAD.

3) Зададим искомую область системой неравенств

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \\ z(x,y) \le z \le h(x,y) \end{cases}.$$

4) Вычислим объем искомого тела с помощью тройного интеграла

$$V = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{z(x,y)}^{h(x,y)} dz. \qquad (3)$$

Пример к задаче II типа.

Вычислить тройным интегрированием объем тела, ограниченного поверхностями: параболоидом $z = x^2 + y^2 - 5$ и плоскостью z=10.

Решение:

1) Построим заданные поверхности в программе MathCAD (рис. 5)

2) Приравняем функции $z = x^2 + y^2 - 5$ и z=10. Получим уравнение окружности с центром в точке (0;0) и радиусом равным $\sqrt{15}$:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{15})^2.$$

Выразим y

$$y = \mp\sqrt{15 - x^2}.$$

Полученная окружность является проекцией искомого тела на плоскость Oxy. Построим эту окружность в программе MathCAD (рис. 6).

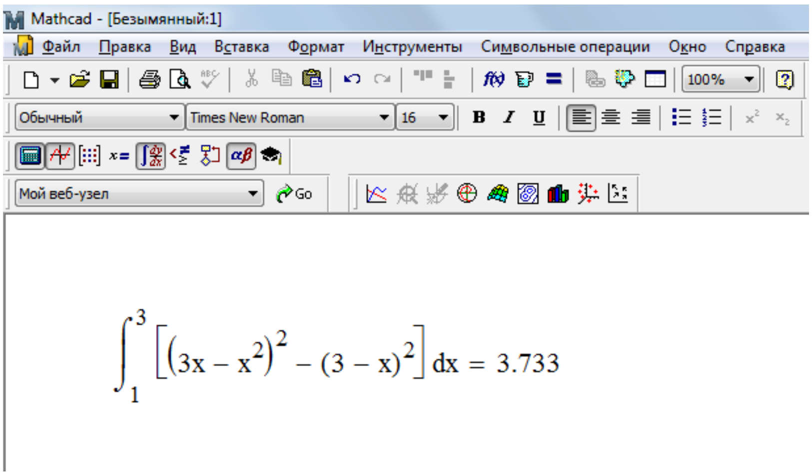
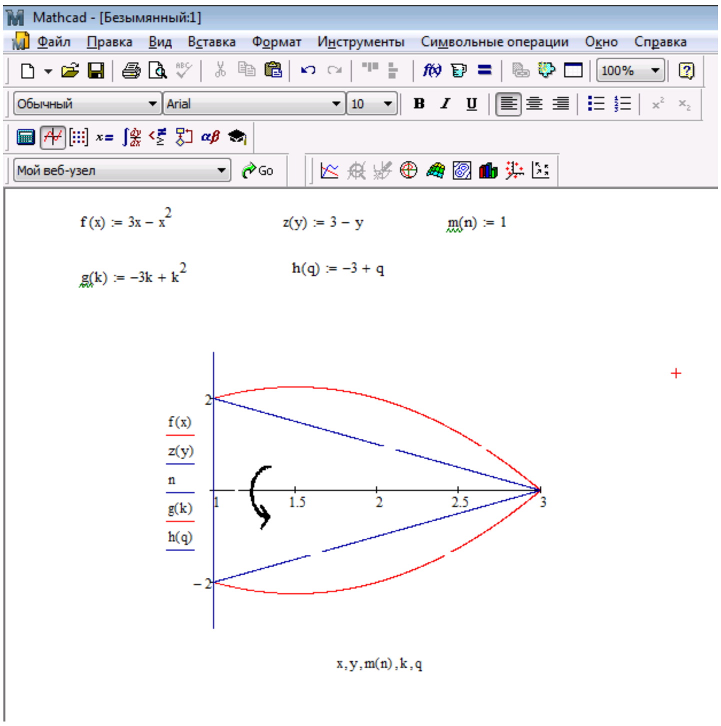


Рис. 3



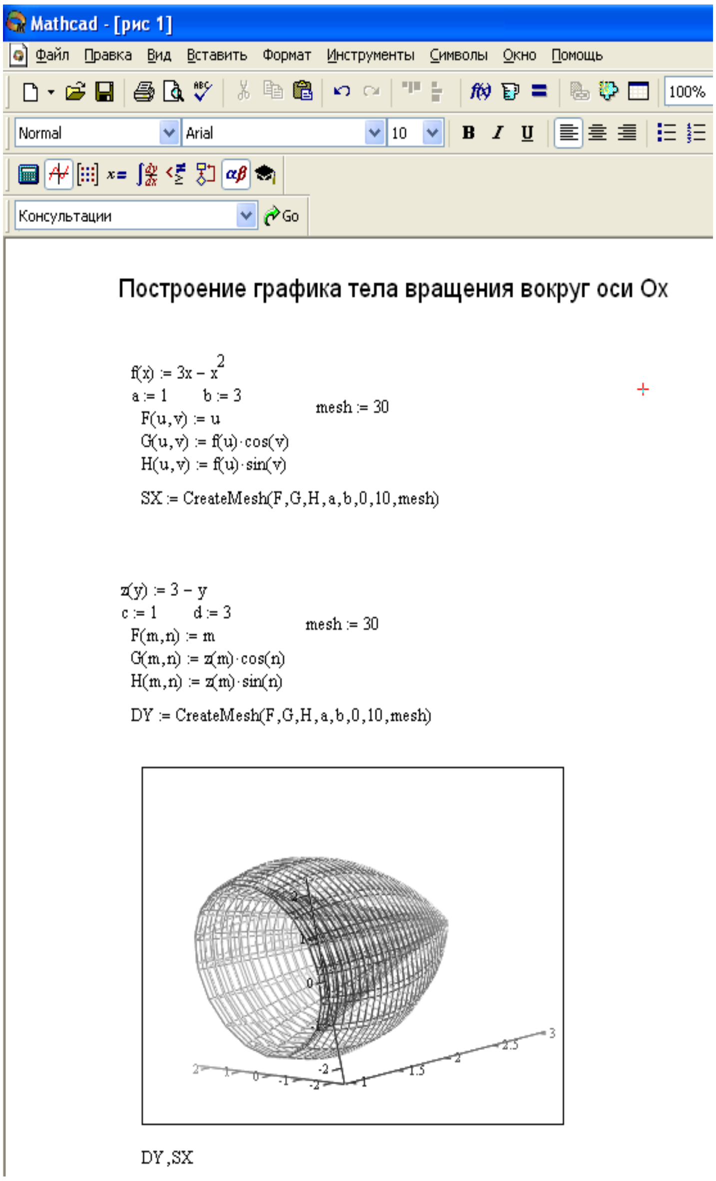


Рис. 4

3) Искомая область

$$\begin{cases} -\sqrt{15} \le x \le \sqrt{15} \\ -\sqrt{15-x^2} \le y \le \sqrt{15-x^2}. \\ x^2+y^2-5 \le z \le 10 \end{cases}$$

4) $V = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dx \int_{-\sqrt{15-x^2}}^{\sqrt{15-x^2}} dy \int_{x^2+y^2-5}^{10} dz = \frac{225\pi}{2}$ куб. ед.

В заключение можно сказать, что использование современных информационных технологий в преподавании курса математического анализа:

- способствует улучшению качества преподавания;
- способствует повышению знаний, умений и навыков учащихся и скорости их получения;
- способствует развитию пространственно-графической культуры;
- позволяет студентам моделировать геометрические объекты в трехмерном пространстве, описываемые интегральным исчислением, научиться работать с такой математической программой, как MathCAD.

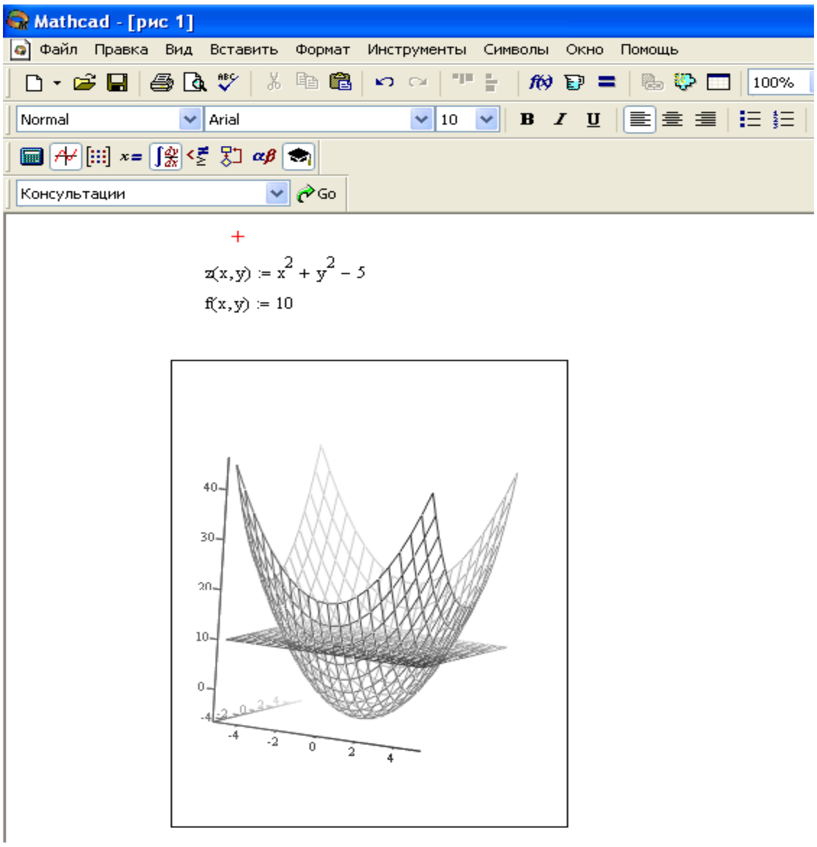

Mathcad - [рис 1]
Файл Правка Вид Вставить Формат Инструменты Символы Окно Помощь
100%
Normal
Arial
10
Консультации
Go
z(x,y) := x^2 + y^2 − 5
f(x,y) := 10
40
30
20
10
0
-4
-2
0
2
4

Рис. 5

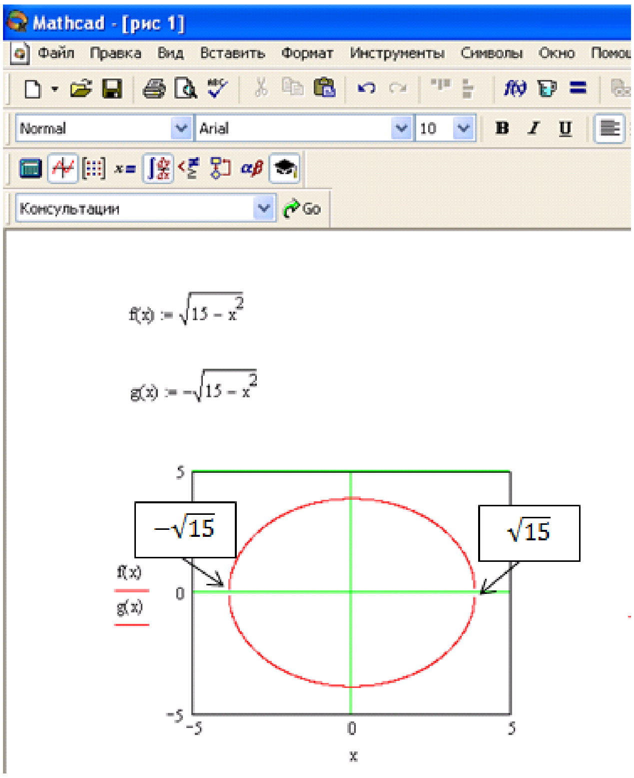

Mathcad - [рис 1]
Файл Правка Вид Вставить Формат Инструменты Символы Окно Помощ
Normal
Arial
10
Консультации
Go
f(x) := √(15 − x^2)
g(x) := −√(15 − x^2)
−√15
√15
f(x)
g(x)
5
0
-5
-5
0
5
x

Рис. 6

Библиографический список

1. Асланов, Р. М., Федорова, А. А. Начала анализа и их приложения [Текст] : учебное пособие / Р. М. Асланов, А. А. Федоров ; под общей редакцией В. Л. Матросова. – М. : МПГУ, 2008. – 225 с.
2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст] : учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев. – Том 1. – М. : Дрофа, 2003. – 704 с.
3. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу [Текст] / Л. Д. Кудрявцев [и др.]. – Том 1, 2, 3. – М. : Физматлит, 2003.
4. Макаров, Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15 [Текст] : учебный курс / Е. Макаров. – СПб. : Питер, 2011. – 400 с. : ил.
5. Советов, Б. Я. Информационные технологии в образование и общество XXI века [Текст] / Б. Я. Советов // Информатика и информационные технологии в образовании. – 2004. – № 5.

Bibliograficheskij spisok

6. 1. Aslanov, R. M., Fedorova, A. A. Nachala analiza i ih prilozhenija [Tekst] : uchebnoe posobie / R. M. Aslanov, A. A. Fedorov ; pod obshhej redakciej V. L. Matrosova. – M. : MPGU, 2008. – 225 s.
7. 2.Kudrjavcev, L. D. Kurs matematicheskogo analiza [Tekst] : uchebnoe posobie / L. D. Kudrjavcev. – Tom 1. – M. : Drofa, 2003. – 704 s.
8. 3.Kudrjavcev, L. D. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu [Tekst] / L. D. Kudrjavcev [i dr.]. – Tom 1, 2, 3. – M. : Fizmatlit, 2003.
9. 4.Makarov, E. Inzhenernye raschety v Mathcad 15 [Tekst] : uchebnyj kurs / E. Makarov. – SPb. : Piter, 2011. – 400 s. : il.
10. 5.Sovetov, B. Ja. Informacionnye tehnologii v obrazovanie i obshhestvo XXI veka [Tekst] / B. Ja. Sovetov // Informatika i informacionnye tehnologii v obrazovanii. – 2004. – № 5.